Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1984 г., вып. 25

УДК 519.8

АСИМПТОТИЧЕСКИ ТОЧНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧИ УПАКОВКИ В КОНТЕЙНЕРЫ

Э.Х.Гимади, В.В.Залюбовский

1. Задача одномерной упаковки в контейнеры [5] заключается в размещении предметов из списка $\mathcal{L}=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ в минимальное количество контейнеров с заданной вместимостью $S > a_i$, $i=\overline{1,n}$. Известно, [9], что эта задача принадлежит к классу NP-трудных проблем.

Большинство работ, посвященных решению задачи упаковки в контейнеры, было направлено на разработку алгоритмов с гарантированными оценками максимального уклонения получаемого решения от оптимального. К наилучшим таким алгоритмам [5] на сегодняшний день принадлежит алгоритм FFD ("первый пригодный с упорядочением") с оценкой отклонения 11/9.*) В последние годы все большую популярность приобретает вероятностный подход к анализу малотрудоемких приближенных алгоритмов решения дискретных экстремальных задач комбинаторного типа [1, 2].

Известные попытки вероятностного анализа алгоритмов упаковки в контейнеры относятся к отысканию асимптотического отношения ожидаемого числа требуемых контейнеров к ожидаемому оптимальному числу контейнеров. Так, в [6] исследуется среднее поведение алгоритма NF ("следующий пригодный"). В предположении, что веса предметов равномерно распределены в интервале $[0, S]$, получена оценка отношения, равная 3/2. В [7] описан алгоритм, который в случае равномерного распределения дает асимптотическое отношение $1+O(n^{-1/3})$. В [8] для аналогичного случая получена оценка $1+O(n^{-1/2})$.

Несомненный интерес представляют асимптотически точные алгоритмы [1, 3, 4] с оценками относительной погрешности ε и вероятности несрабатывания алгоритма δ, стремящимися к нулю с увеличением размерности задачи. В данной статье изучаются свойства одного простого алгоритма, имеющего линейную трудоемкость. Описывается класс распределений весов предметов, для которого в детерминированном случае алгоритм является точным. Описываются списки со случайным распределением весов предметов по весовым классам. Показана асимптотическая точность алгоритма в случае монотонного изменения вероятности попадания предметов в класс в зависимости от номера класса.

---

*) Смотри также обзор А.Д.Вайнштейна по задачам упаковки в контейнеры в настоящем сборнике.

2. Постановка исследуемой задачи A и описание алгоритма $\mathcal{A}$ ее решения

З а д а ч а A. Пусть дан список $\mathcal{L}$ из n предметов с весами a_i, $0 < a_i \leq S$, a_i – целые, $i = \overline{1,n}$. Предметы необходимо разместить в минимальное число контейнеров так, чтобы сумма весов предметов в каждом контейнере не превышала S. Предполагается, что $S = 2^{\tau}$, где τ – некоторое положительное целое число.

Нашей целью является исследование одного простого алгоритма (дадим ему наименование $\mathcal{A}$), который в идейном плане является вариацией на тему алгоритма "Иди в ближайший город, где еще не побывал" для задачи коммивояжера [3, 4]. Алгоритм $\mathcal{A}$ заключается в следующем: сначала объединяются попарно предметы, сумма весов которых в точности равна S. Каждая такая пара целиком заполняет контейнеры. Затем действуем поэтапно: на этапе с номером ν, $1 \leq \nu \leq \tau - 2$, составляем пары из оставшихся предметов с суммарным весом $S/2^{\nu}$. Теперь в каждый новый контейнер укладываем по 2^{ν} таких пар. Предметы, которым ни на одном шаге алгоритма не нашлось соответствующей пары, упаковываем с помощью одного из известных алгоритмов упаковки, имеющим линейную трудоемкость, например, алгоритма NF (см. [5]).

Дадим формальное описание алгоритма $\mathcal{A}$.

1. Все предметы, имеющие вес S, упаковываются по одному в контейнер и удаляются из списка $\mathcal{L}$. Оставшиеся предметы упорядочиваем по невозрастанию весов.

Определим числа $T_j = 2^j$, $j = 0, 1, \ldots, \tau$. Полагаем $j = \tau - 1$, $B = \emptyset$, $D = \emptyset$, $B' = \emptyset$, $\mathcal{L}' = \emptyset$.

2. Для всех K, $T_j < K \leq T_{j+1}$ делаем следующее: каждому предмету веса K из списка $\mathcal{L}$ ставим в соответствие предмет веса $T_{j+1} - K$. Такую пару будем называть j-с в я з к о й. Если же для какого-то предмета пара не найдена, то заносим его в список $\mathcal{L}'$.

Из предметов веса T_j также образуем j-связки. При нечетном числе таких предметов один предмет заносим в множество B'.

Обозначим множество всех образовавшихся j-связок через C. Положим $C' = C \cup B$ и упаковываем элементы множества C' по $2^{\tau - j}$ штук в каждый контейнер. Если последний контейнер оказался незаполненным, то все входящие в него предметы помещаем в список $\mathcal{D}$.

Полагаем $\mathcal{L} = \mathcal{L} \setminus (\mathcal{L}' \cup C')$, $B = B'$, $B' = \emptyset$, $j = j - 1$.

Если $j > 0$, то возвращаемся в начало п. 2, в противном случае переходим на следующий пункт.

3. Упаковываем предметы списка $\mathcal{D}$ с помощью алгоритма NF, рассматривая связку как целый предмет. Неупакованными остались предметы списка $\mathcal{L}'$ и, быть может, некоторые предметы веса 1. Их также упакуем с помощью алгоритма NF.

Описание алгоритма $\mathcal{A}$ закончено.

3. Анализ алгоритма $\mathcal{A}$. Списки с детерминированным распределением весов

Прежде всего заметим, что при $S \le C \cdot n$, где константа $C > 0$, трудоемкость алгоритма имеет порядок n.

Для описания классов списков, для которых алгоритм $\mathcal{A}$ будет давать точное решение, нам потребуются некоторые определения.

Функцию f целочисленного аргумента назовем T-симметричной, если

$$f(T-\ell) = f(T+\ell) \quad \text{при} \quad 0 < \ell < T;$$
$$f(\ell) = 0 \quad \text{при} \quad \ell \geqslant 2T.$$

Функцию f будем называть S-регулярной, если она представима в виде суммы T_j-симметричных функций:

$$f(K) = \sum_{j=0}^{\tau-1} f_j(K),$$

где $f_j(K)$ – T_j-симметричная функция.

Лемма 1. Если f – невозрастающая функция, $f(K) = 0$ при $K \geqslant S$, то она S-регулярна.

Доказательство. Приведем явный вид рекуррентных формул для разложения функции $f(K)$ в сумму T_j-симметричных:

$$f_{\tau-j}(K) = \begin{cases} 0, & K \geqslant T_{\tau-j+1}; \\ f^j(K), & T_{\tau-j} \le K < T_{\tau-j+1}, \quad j = \overline{1,\tau}; \\ f^j(T_{\tau-j+1} - K), & 1 \le K < T_{\tau-j}, \end{cases}$$

где $f^1(K) = f(K)$;

$$f^{j+1}(K) = \begin{cases} f^j(K) - f_{\tau-j}(K), & 1 \le K < T_{\tau-j+1}; \\ 0, & K \geqslant T_{\tau-j+1}. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться в том, что так определенные функции $f_j(K)$ действительно являются T_j-симметричными и дают искомое разложение функции $f(K)$. Лемма доказана.

Пусть имеется список $\mathcal{L} = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, где a_i – целые, $1 \le a_i \le S = 2^\tau$. Характеристической функцией списка $\mathcal{L}$ назовем функцию $\chi_{\mathcal{L}}$, определенную следующим образом:

$\chi_{\mathcal{L}}(K) =$ (числу предметов веса K в списке $\mathcal{L}$), $1 \le K \le S$.

Далее для списка $\mathcal{L}$ будем обозначать: $L_{\mathcal{A}}$ – число контейнеров, требующихся согласно алгоритму $\mathcal{A}$, L^* – минимальное число контейнеров, $|\mathcal{L}|$ – число элементов в списке.

Т е о р е м а 1. Алгоритм $\mathcal{A}$ дает точное решение задачи А, если выполнено одно из следующих условий:

а) функция $\chi_{\mathcal{L}}$ является S-регулярной;

б) $\chi_{\mathcal{L}} = \chi' + \chi''$, где χ' – $S/2$-симметричная функция, $\chi''(K) = 0$ при $1 \le K \le S/2$, $\chi''(K) \ge 0$ при $S/2 < K \le S$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. а) В случае S-регулярной функции в процессе работы алгоритма будут формироваться пары предметов с общим весом S, $S/2, S/4, \ldots, 4$, причем для каждого предмета, кроме, быть может, предметов с весами $S/2, S/4, \ldots, 2, 1$, подходящая пара обязательно будет найдена. Таким образом, исходная задача будет сведена к задаче упаковки списка, состоящего из предметов с весами $S, S/2, \ldots, 1$. Ясно, что процесс упаковки, реализуемый алгоритмом $\mathcal{A}$, даст точное решение задачи, так как все контейнеры, кроме, быть может, последнего, будут загружены полностью.

б) Разобьем список $\mathcal{L}$ на два списка $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$: $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$, $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}$. Последние восстановим по характеристическим функциям χ' и χ''. Очевидно, $L_{\mathcal{A}} = \lceil |\mathcal{L}_1|/2 + |\mathcal{L}_2| \rceil$. Оценим теперь L^*. Ясно, что никакие два предмета весом больше чем $S/2$ не могут попасть в один контейнер, и если в контейнере есть предмет весом больше $S/2$, то туда также не может попасть ни один предмет веса $S/2$, поэтому

$$L^* \ge \sum_{K=1+S/2}^{S} \chi_{\mathcal{L}}(K) + \chi_{\mathcal{L}}(S/2)/2 =$$

$$= \sum_{K=1+S/2}^{S-1} \chi'(K) + \chi'(S/2)/2 + \sum_{K=1+S/2}^{S} \chi''(K).$$

Здесь мы воспользовались следующими свойствами функций χ' и χ'': $\chi'(S)=0$, $\chi''(S/2) = 0$.

Заметим, что

$$\sum_{K=1+S/2}^{S} \chi''(K) = |\mathcal{L}_2|,$$

$$\sum_{K=1+S/2}^{S} \chi'(K) + \chi'(S/2)/2 = \frac{1}{2}\sum_{K=1+S/2}^{S} (\chi'(K) + \chi'(S-K)) + \chi'(S/2)/2 = \frac{|\mathcal{L}_1|}{2}.$$

Окончательно получаем $L^* \ge |\mathcal{L}_1|/2 + |\mathcal{L}_2|$, откуда $L_{\mathcal{A}} = L^*$. Теорема доказана.

С л е д с т в и е. Если $\chi_{\mathcal{L}}$ – монотонная функция, то алгоритм $\mathcal{A}$ обеспечивает точное решение задачи А.

Для случая невозрастающей функции справедливость следствия вытекает из утверждения леммы 1 и п. "а" теоремы 1.

Если же $\chi_{\mathcal{L}}$ – неубывающая функция, то ее можно разложить в сумму двух функций $\chi_{\mathcal{L}} = \chi' + \chi''$, определив их следующим образом:

$$\chi'(K) = \begin{cases} \chi_{\mathcal{L}}(K), & 1 \le K \le S/2; \\ \chi_{\mathcal{L}}(S-K), & S/2 < K \le S-1; \\ 0, & K = S, \end{cases}$$

$$\chi''(K) = \chi_{\mathcal{L}}(K) - \chi'(K), \quad 1 \le K \le S.$$

Нетрудно заметить, что функции χ' и χ'' удовлетворяют требованиям п. "б" теоремы 1.

З а м е ч а н и е. Из определения S-регулярной функции следует, что ее значение в точке S равно 0. Покажем, что в действительности добавление к исходному списку любого числа предметов веса S может лишь улучшить оценку качества любого (в том числе и описанного) алгоритма. В самом деле, пусть список $\mathcal{L}'$ получен из $\mathcal{L}$ добавлением n_S предметов веса S. Тогда $L'_{\mathcal{A}} = L_{\mathcal{A}} + n_S$, $L'^{*} = L^{*} + n_S$. Ясно, что абсолютная погрешность $L'_{\mathcal{A}} - L'^{*}$ при этом не меняется. Сравним относительные погрешности для двух списков:

$$\varepsilon' = \frac{L'_{\mathcal{A}} - L'^{*}}{L'^{*}} = \frac{L_{\mathcal{A}} - L^{*}}{L^{*} + n_S} \le \frac{L_{\mathcal{A}} - L^{*}}{L^{*}} = \varepsilon.$$

Так как обычно оценивается максимальное значение относительной погрешности на списках определенного класса, то в дальнейшем при необходимости мы можем ограничиться рассмотрением лишь тех списков $\mathcal{L}$, в которых нет предметов веса S.

4. Асимптотические свойства алгоритма $\mathcal{A}$ для списков со случайными весами предметов

Предположим, что веса предметов в списке $\mathcal{L}$ – независимые случайные величины с одинаковой функцией распределения. С каждым дискретным распределением случайной величины будем связывать функцию p, определенную соотношением $p(K) = \mathcal{P}\{a_i = K\}$.

Будем считать, что исходный список $\mathcal{L}$ формируется следующим образом: для каждого K, $1 \le K \le S$, проводится серия из n испытаний, каждое из которых завершается одним из двух исходов: либо с вероятностью $p(K)$ в список включается предмет веса K, либо с вероятностью $1-p(K)$ список остается прежним. При этом $\sum_{K=1}^{S} p(K) = 1$.

Введем в рассмотрение случайные величины $\xi_K = \chi_{\mathcal{L}}(K)$, $1 \le K \le S$. Очевидно, $M\xi_K = np(K)$, $\mathcal{D}\xi_K = np(K)(1-p(K))$ и ξ_K - независимые случайные величины.

Т е о р е м а 2. Если $p(K)$ $-T_{S/2}$-симметричная функция, то справедлива оценка

$$\bar{\varepsilon}_{отн} = \frac{M(L_{\mathcal{A}}) - M(L^*)}{M(L^*)} \le \sqrt{\frac{2S}{n}},$$

где $M(L_{\mathcal{A}})$ и $M(L^*)$ -- ожидаемое число контейнеров, необходимых для упаковки списка $\mathcal{L}$ алгоритмом $\mathcal{A}$, и ожидаемое число контейнеров в оптимальной упаковке соответственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оптимальное число контейнеров не может быть меньше, чем сумма весов предметов, входящих в список, отнесенная к S: $L^* \geq \frac{1}{S}\sum_{K=1}^{S} K\cdot\xi_K$. Тогда для $M(L^*)$ справедливо следующее неравенство:

$$M(L^*) \geq \frac{1}{S} M\Big(\sum_{K=1}^{S} K\xi_K\Big) = \frac{1}{S}\sum_{K=1}^{S} K M\xi_K =$$

$$= \frac{n}{S}\sum_{K=1}^{S} Kp(K) = \frac{n}{S}\sum_{K=1}^{S/2-1}\big[Kp(K) + (S-K)p(S-K)\big] + Sp(S) + \frac{S}{2}p\Big(\frac{S}{2}\Big)$$

Вспомним, что, по определению $T_{S/2}$-симметричной функции, $p(K) = p(S-K)$, $1 \le K < S/2$, и $p(S) = 0$, поэтому можно продолжить неравенство:

$$M(L^*) \geq \frac{n}{2}\sum_{K=1}^{S} p(K) = \frac{n}{2}.$$

Перейдем к оцениванию $M(L_{\mathcal{A}})$. Обозначим через $N(n)$ число предметов в списке $\mathcal{L}$. Заметим, что в рассматриваемой модели $N(n) = \sum_{K=1}^{n} \xi_K$ - случайная величина. Если бы для каждого элемента в списке $\mathcal{L}$ нашлась пара в смысле требований алгоритма $\mathcal{A}$, то для его упаковки потребовалось бы не больше $N(n)/2$ контейнеров, так как в этом случае в каждый контейнер попало бы по меньшей мере два предмета. Введем в рассмотрение случайные величины $z_K = |\xi_K - \xi_{S-K}|$, сумма которых будет определять число предметов, остающихся без соответствующей пары. Для простоты доказательства будем считать, что каждый из таких предметов помещается в отдельный контейнер. Тогда можно записать неравенство

$$L_A = \frac{N(n)}{2} + \sum_{k=1}^{s/2-1} z_k . \tag{1}$$

Оценим математические ожидания каждого слагаемого в правой части неравенства

$$M(N(n)) = M\left(\sum_{k=1}^{s} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{s} np(k) = n .$$

Для оценки второго слагаемого нам понадобится следующая

Л е м м а 2. Пусть x, y - независимые случайные величины, Mx, My, $\mathcal{D}x$, $\mathcal{D}y$ - их математические ожидания и дисперсии. Пусть $z = |x-y|$. Тогда $M(z^2) = \mathcal{D}x + \mathcal{D}y + (Mx - My)^2$.

Действительно,

$$M(z^2) = M(x^2) - 2M(xy) + M(y^2) = M(x^2) - (Mx)^2 +$$

$$+ M(y^2) - (My)^2 + (Mx)^2 - 2 \cdot Mx\, My + (My)^2 = \mathcal{D}x + \mathcal{D}y + (Mx - My)^2.$$

Что и требовалось доказать.

По определению дисперсии, $\mathcal{D}(z_k) = M(z_k^2) - M^2(z_k)$. В силу леммы 2, $M(z_k^2) = \mathcal{D}\xi_k + \mathcal{D}\xi_{s-k} + (M\xi_k - M\xi_{s-k})^2 = 2np(k)(1-p(k))$. Так как $\mathcal{D}(z_k) \geq 0$, то $M^2(z_k) \leq M(z_k^2)$, откуда $M(z_k) \leq \sqrt{2np(k)(1-p(k))} \leq \sqrt{2np(k)}$.

С учетом (1) и полученных оценок для $M(N(n))$ и $M(z_k)$ получим

$$M(L_A) \leq \frac{n}{2} + \sum_{k=1}^{s/2} \sqrt{2np(k)} \leq \frac{n}{2} + \sqrt{\frac{ns}{2}} .$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\sum_{i=1}^{k} \sqrt{a_i} \leq \sqrt{qk}$, если $\sum_{i=1}^{k} a_i \leq q$,

которое легко доказывается методом математической индукции.

Остается записать оценку для $\bar{\varepsilon}_{отн}$:

$$\bar{\varepsilon}_{отн} = \frac{M(L_A) - M(L^*)}{M(L^*)} \leq \frac{n/2 + \sqrt{ns/2} - n/2}{n/2} = \sqrt{\frac{2s}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. При выполнении одного из следующих условий: а) $p(k)$ - невозрастающая функция; б) $p(k) = p'(k) + p''(k)$, где $p'(k)$ является $T_{s/2}$ -симметричной, а $p''(k) = 0$ при $1 \leq k \leq s/2$ и $p''(k) \geq 0$ при $s/2 < k \leq s$, алгоритм A является асимптотически точным, т.е. существуют такие последовательности (ε_n), (δ_n), что $\delta_n \to 0$, $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to 0$ и выполнено соотношение

$$\mathcal{P}\{L_{\mathcal{A}} \geq (1+\varepsilon_n) L^*\} \leq \delta_n .$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда $\rho(K)$ - невозрастающая функция. Пусть, как и ранее, ξ_K - число предметов веса K в списке $\mathcal{L}$. Заметим, что если выполнены неравенства $\xi_i > \xi_j$, $1 \leq i < j \leq S$, то можно гарантировать оптимальность упаковки $\mathcal{L}$, полученной с помощью алгоритма $\mathcal{A}$. Это вытекает из следствия теоремы 1. Идея доказательства заключается в том, что если $\rho(K)$ - невозрастающая функция, то и функция ξ_K с большой вероятностью будет близка к невозрастающей.

Зададим для каждой из случайных величин ξ_K, $1 \leq K \leq S$, интервал $I_K = (M\xi_K \dot{-} \psi(n)\sigma(n), M\xi_K + \psi(n)\sigma(n))$, где $\psi(n)$, $\sigma(n)$ - некоторые неотрицательные функции, которые будут определены позднее; $(x \dot{-} y) = \max(0, x-y)$.

Используя неравенство Чебышева, оценим вероятность того, что ξ_K выйдет за пределы I_K:

$$Q_K = \mathcal{P}\{\xi_K \notin I_K\} \leq \mathcal{P}\{|\xi_K - M\xi_K| \geq \psi(n)\sigma(n)\} \leq \frac{\mathcal{D}\xi_K}{(\psi(n)\sigma(n))^2} .$$

Будем считать, что функция $\sigma(n)$ выбрана таким образом, что $\mathcal{D}\xi_K \leq (\sigma(n))^2$. Тогда можно записать следующее неравенство:

$$Q_K \leq \frac{1}{(\psi(n))^2} .$$

Оценим теперь вероятность P_0 выхода за пределы соответствующего интервала I_K хотя бы одной из случайных величин ξ_K:

$$P_0 = 1 - \prod_{K=1}^{S}(1 - Q_K) \leq \sum_{K=1}^{S} Q_K \leq \frac{S}{(\psi(n))^2} = \delta_n .$$

Итак, если в качестве $\psi(n)$ взять некоторую неограниченную функцию, то мы можем гарантировать, что при достаточно больших n случайные величины ξ_K с вероятностью сколь угодно близкой к единице будут попадать в интервалы I_K, $1 \leq K \leq S$.

Остается показать, что упаковка с помощью алгоритма $\mathcal{A}$ списков, в которых ξ_K попадает в интервал I_K, с ростом n может быть с любой точностью приближена к оптимальной.

Заметим, что функция $M\xi_K \dot{-} \psi(n)\sigma(n)$ - невозрастающая по K. Определим список $\mathcal{L}_1$ следующим образом: для любого K, $1 \leq K \leq S$, имеет место $\chi_{\mathcal{L}_1}(K) = \lceil n\rho(K) \dot{-} \psi(n)\sigma(n) \rceil$. Мы считаем, что $\xi_K \in I_K$, $1 \leq K \leq S$, в списке $\mathcal{L}_1$, поэтому $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$. Пусть $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}_1$. Функция $\chi_{\mathcal{L}_1}(K)$ - невозрастающая, поэтому, в силу следствия теоремы 1, $L_{1\mathcal{A}} = L_1^*$.

Очевидно, $L^* \geqslant L_1^*$, $L_A \leqslant L_1^* + |\mathcal{L}_2|$, поэтому оценка для относительной погрешности имеет вид

$$\varepsilon = \frac{L_A - L^*}{L^*} \leqslant \frac{|\mathcal{L}_2|}{L_1^*},$$

$$L_1^* \geqslant \frac{1}{s}\sum_{k=1}^{s}(np(k) - \psi(n)\sigma(n))k \geqslant \frac{n}{s}\sum_{k=1}^{s} kp(k) - \psi(n)\sum_{k=1}^{s}\sigma(n),$$

$$|\mathcal{L}_2| \leqslant 2\psi(n)\sum_{k=1}^{s}\sigma(n),$$

откуда получаем

$$\varepsilon \leqslant \frac{|\mathcal{L}_2|}{L_1^*} \leqslant \frac{2\psi(n)\sum\limits_{k=1}^{s}\sigma(n)}{\frac{n}{s}\sum\limits_{k=1}^{s} kp(k) - \psi(n)\sum\limits_{k=1}^{s}\sigma(n)} = \frac{2}{\dfrac{n\sum\limits_{k=1}^{s} kp(k)}{s\psi(n)\sum\limits_{k=1}^{s}\sigma(n)} - 1} = \varepsilon_n .$$

Для того чтобы $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, необходимо, чтобы

$$\frac{n\sum\limits_{k=1}^{s} kp(k)}{s\psi(n)\sum\limits_{k=1}^{s}\sigma(n)} \to \infty .$$

Покажем, что при подходящем выборе функций $\sigma(n)$ и $\psi(n)$ этого добиться можно. Напомним, что должно выполняться неравенство $\mathcal{D}\xi_k \leqslant (\sigma(n))^2$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\psi(n) = \infty$. Положим $\sigma(n) = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant s}\sqrt{\mathcal{D}\xi_k}$. Учитывая, что $\max\limits_{0\leqslant p\leqslant 1}\sqrt{p(1-p)} = \frac{1}{2}$ и $\mathcal{D}\xi_k = np(k)(1-p(k))$, можно записать следующее неравенство:

$$\frac{n\sum\limits_{k=1}^{s} kp(k)}{s\psi(n)\sum\limits_{k=1}^{s}\sigma(n)} \geqslant \frac{2n}{s^2\psi(n)\sqrt{n}} = \frac{2\sqrt{n}}{s^2\psi(n)} .$$

Очевидно, если в качестве $\psi(n)$ взять функцию, растущую медленнее чем $\sqrt{n}$, то $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Доказательство теоремы для второго случая проводится аналогично. При этом используется утверждение теоремы 1 п. "б".

Следствие. Если $\rho(K)$ – неубывающая функция, то алгоритм $\mathcal{A}$ является асимптотически точным.

Поступила в ред.-изд.отдел
14 ноября 1984 г.

Литература

I. Гимади Э.Х., Глебов Н.И., Перепелица В.А. Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации. – В кн.: Проблемы кибернетики, М.: Наука, I975, вып. 3I, с. 35–42.

2. Karp R.M. The probabilistic analysis of some combinatorial search algorithms and complexity. (Proc. Sympos. Carnegie – Mellon Univ., Pittsburg, Pa, 1976), pp. 1-9 "Academy Press", New York, 1976.

3. Перепелица В.А., Гимади Э.Х. Статистически эффективный алгоритм выделения гамильтонова контура (цикла). – В кн.: Дискретный анализ, Новосибирск, ИМ СО АН СССР, вып.I5, с. 57–65.

4. Гимади Э.Х., Перепелица В.А. Асимптотический подход к решению задачи коммивояжера. – В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, I974, вып. I2, с. 35–45.

5. Johnson D.S., Demers A., Ullman J.D., Garey M.R., Graham R.L. Worst – case performance bounds for simple one-dimensional packing algorithms. – SIAM J. Comput., 1974, 3, pp. 299–325.

6. Coffman E.G., Hofri M., SO K., Yao A.C. A stochastic model of bin packing. – Information and Control, 1980, 44, N2, pp.105-115.

7. Frederickson G.N. Probabilistic analysis for simple one- and two-dimensional bin packing algorithms. – Information Processing Letters, 1980, v. 11, pp. 156-161.

8. Knödel W. A bin packing algorithm with complexity O (n log n) and perfomance 1 in the stochastic limit. – Lect. Notes Comput. Sci., 1981, 118, pp. 369-377.

9. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. – М.: Мир, I982, -4I6 с.