Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1984 г., вып. 25

УДК 519.854

ЗАДАЧА РАЗМЕЩЕНИЯ НА СЕТИ С ЦЕНТРАЛЬНО-СВЯЗНЫМИ ОБЛАСТЯМИ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Э.Х.Гимади

Рассмотрим задачу размещения вида [1] - [3]:

$$\min\Big\{\sum_{i\in\mathcal{U}} g_i^0 x_i + \sum_{i\in\mathcal{U}}\sum_{j\in X}\varphi_j g_{ij} x_{ij}\Big|\sum_{i\in\mathcal{U}} x_{ij} = 1\ (j\in X)\Big\},$$
$$x_{ij}\leqslant x_i,\ x_i,\ x_{ij}\in\{0,1\}\ (i\in\mathcal{U},\ j\in X), \tag{1}$$

где $\mathcal{U}$ - множество из m возможных пунктов размещения предприятий; X - множество из n пунктов спроса; $g_i^0 \geqslant 0$ - затраты на размещение предприятия в пункте $i\in\mathcal{U}$; $\varphi_j \geqslant 0$ - объем спроса в пункте $j\in X$; $g_{ij}\geqslant 0$ - стоимость доставки единицы продукта из пункта производства $i\in\mathcal{U}$ в пункт спроса $j\in X$; x_i и x_{ij} - соответственно булевы переменные выбора и назначения, $i\in\mathcal{U}$, $j\in X$.

Следуя [3], запишем задачу (1) в эквивалентном виде:

$$\sum_{i\in I_\sigma} g_i^0 + \sum_{j\in X}\varphi_j g_{i_j j} \longrightarrow \min_{\sigma}, \tag{2}$$

где решением является n-вектор назначений $\sigma=(i_j)\ (j\in X)$; i_j - номер предприятия, обслуживающего j-й пункт спроса $(i_j\in\mathcal{U},\ j\in X)$; $I_\sigma = \bigcup_{j\in X}\{i_j\}$ - набор предприятий, соответствующих вектору назначений σ, $I_\sigma\subset\mathcal{U}$.

Обозначим через $G=(X,E)$ связный n-вершинный неориентированный граф (сеть), где X - множество вершин сети, E - множество ребер, $|X|=n$, $|E|=p$.

Определение 1. Область обслуживания $Y_i(\sigma)=\{j\in X\,|\,i_j=i\}$ назовем связной относительно сети G, если подграф, порожденный множеством вершин этой области, связен.

В [3] для задачи размещения на ациклической сети в случае существования в оптимальном решении совокупности связных областей обслуживания построен точный алгоритм, имеющий трудоемкость $O(mn)$. Мы будем предполагать, что $\mathcal{U}\subset X$ и, кроме того, считать заданными неотрицательные длины ребер сети, с помощью которых могут быть определены кратчайшие цепи между вершинами сети.

Будем использовать обозначения для отношений $i \underset{j}{\leq} K$, $i \underset{j}{<} K$, $i \underset{j}{\asymp} K (i, K \in \mathcal{U}, j \in X)$, если $g_{ij} \leq g_{Kj}$, $g_{ij} < g_{Kj}$, $g_{ij} = g_{Kj}$ соответственно. Записи вида $i \underset{Y}{\leq} K$, $i \underset{Y}{<} K$, $i \underset{Y}{\asymp} K$, где $Y \subset X$, означают, что соответствующие отношения имеют место для любого $j \in Y$.

Определение 2. Область обслуживания $Y_i(\sigma)$, $i \in I_\sigma$, назовем центральной, если обслуживающее предприятие i содержится внутри этой области.

Определение 3. Связную относительно сети G центральную область обслуживания $Y_i(\sigma)$, $i \in I_\sigma$, будем называть центрально-связной.

Определение 4. Будем говорить, что матрица (g_{ij}) $(i \in \mathcal{U}, j \in X)$ удовлетворяет цепочечному условию на сети G, если из $i \underset{\ell}{<} K$ при $i, K \in \mathcal{U}$, $\ell \in X$ следует $i \underset{j}{<} K$ для любой вершины $j \in X$, принадлежащей кратчайшей цепи из i в ℓ.

Такую матрицу будем для краткости называть Ц-матрицей. В качестве примера Ц-матрицы укажем матрицу $(\tilde{g}_{ij})$ $(i \in \mathcal{U}, j \in X)$ с компонентами $\tilde{g}_{ij} = c_i + \rho_{ij}$, где $c_i \geq 0$; $\rho_{ij} \geq 0$ – сумма длин ребер в кратчайшей цепи $C[i, \ldots, j]$. Покажем, что в этом случае $(\tilde{g}_{ij})(i \in \mathcal{U}, j \in X)$ – Ц-матрица. Заметим прежде всего, что в полном n-вершинном графе кратчайших расстояний выполняется неравенство треугольника $\rho_{j\ell} + \rho_{Kj} \geq \rho_{K\ell}$ при всех $K, \ell, j \in X$.

Рассмотрим кратчайшую цепь $C[i, \ldots, \ell]$ и вершину $j \in C[i, \ldots, \ell]$. Надо показать, что $\tilde{g}_{i\ell} < \tilde{g}_{K\ell} \Rightarrow \tilde{g}_{ij} < \tilde{g}_{Kj}$ $(i, K \in \mathcal{U};\ j, \ell \in X)$. Допустив противное, имеем $\tilde{g}_{i\ell} < \tilde{g}_{K\ell}$; $\tilde{g}_{Kj} \leq \tilde{g}_{ij}$. Сложив неравенства, получим $\tilde{g}_{i\ell} + \tilde{g}_{Kj} < \tilde{g}_{K\ell} + \tilde{g}_{ij}$, или

$$(c_i + \rho_{i\ell}) + (c_K + \rho_{Kj}) < (c_K + \rho_{K\ell}) + (c_i + \rho_{ij}).$$

С учетом равенства $\rho_{i\ell} = \rho_{ij} + \rho_{j\ell}$ окончательно имеем $\rho_{j\ell} + \rho_{Kj} < \rho_{K\ell}$, что противоречит неравенству треугольника. Следовательно, $(\tilde{g}_{ij})$ $(i \in \mathcal{U}, j \in X)$ – Ц-матрица.

Лемма 1. Для задачи размещения на сети с Ц-матрицей (g_{ij}) $(i \in \mathcal{U}, j \in X)$ существует оптимальное решение σ с совокупностью центральных областей обслуживания.

Доказательство. Рассмотрим оптимальные решения σ с минимальным числом обслуживающих предприятий в наборе I_σ: $\tilde{m} = \min\{|I_\sigma| : \sigma$ - оптимальный вектор назначений$\}$. Покажем, что, согласно лемме, среди таких σ найдется требуемое. Допустим противное: для любого указанного оптимального решения σ найдется такое предприятие $i \in I_\sigma$, что $i \notin Y_i(\sigma)$. Очевидно, найдется такое предприятие $K \in I_\sigma$, что $i \in Y_K(\sigma)$ и, кроме того,

$$i \underset{Y_i(\sigma)}{\preccurlyeq} K \quad \text{и} \quad K \underset{Y_K(\sigma)}{\preccurlyeq} i . \tag{3}$$

Рассмотрим два возможных случая отношения $i \underset{Y_i(\sigma)}{\preccurlyeq} K$.

<u>Случай</u> $i \underset{Y_i(\sigma)}{\asymp} K$. Положив $i_j^{\cdot\cdot} = K$ для любого $j \in Y_i(\sigma)$, мы в силу неотрицательности g_i^0 можем уменьшить число обслуживающих предприятий в оптимальном решении на 1, что противоречит минимальности величины $\tilde{m}$.

В случае, когда существует $j \in Y_i(\sigma)$ с отношением $i \underset{j}{\prec} K$, из цепочечного условия имеем $i \underset{i}{\prec} K$, где $i \in Y_K(\sigma)$, что противоречит отношениям $K \underset{Y_K(\sigma)}{\preccurlyeq} i$ в (3).

Лемма доказана.

Т е о р е м а 1. Для задачи размещения на сети G с Ц-матрицей (g_{ij}) $(i \in U,\ j \in X)$ существует оптимальное решение σ с совокупностью центрально-связных областей обслуживания.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Ограничимся рассмотрением оптимальных решений с центральными областями обслуживания и минимальным числом $\tilde{m}$ обслуживающих предприятий. Согласно лемме 1, это возможно.

Среди указанных решений возьмем минимальное по числу M компонент связности, порождаемых на сети совокупностью областей обслуживания. Очевидно, $M \geqslant \tilde{m}$. Покажем, что случай $M > \tilde{m}$ невозможен.

Допустим противное: $M > \tilde{m}$. Тогда найдется предприятие $i \in I_\sigma$ с такими непустыми компонентами связности $Y_i', Y_i'' \subset Y_i(\sigma)$, что $i \in Y_i'$, $i \notin Y_i''$. В этом случае оказывается, что все точки спроса компоненты Y_i'', упорядоченные по расстоянию от вершины-предприятия i, можно последовательно передать в некоторые области обслуживания $Y_K(\sigma)$, $K \in I_\sigma$, не увеличивая значения целевой функции.

Действительно, занумеруем точки спроса $j \in Y_i''$ в соответствии с увеличением расстояния от обслуживающего предприятия i: $j_1, j_2, \dots, j_T$, $j_t \in Y_i''$ $(t = \overline{1,T})$. Обозначим $M = M_i + M_i'$, где M_i – число компонент связности в области обслуживания $Y_i(\sigma)$, M_i' – число компонент связности в области $X \setminus Y_i(\sigma)$. На шаге $t = \overline{1,T}$ рассмотрим кратчайшую цепь из вершины-предприятия $i \in Y_i'$ в точку спроса $j_t \in Y_i''$. Пусть ребро $(\ell, j_t) \in E$ принадлежит этой цепи. В силу проведенного упорядочения точек (j_t) $(t = 1, \ldots, T)$ имеем $\ell \notin Y_i''$. В случае $i_\ell = i$ точку j_t исключаем из компоненты Y_i'' и включаем в компоненту, содержащую вершину ℓ.

Исследуем случай $i_\ell = k \neq i$. Очевидно, $g_{ij_t} \leq g_{kj_t}$. Более того, $g_{ij_t} = g_{kj_t}$, так как в противном случае, согласно цепочечному условию, из $i \underset{j_t}{\prec} k$ следует $i \underset{\ell}{\prec} k$, что противоречит условию $i_\ell = k$.

Таким образом, в случае $i_\ell = k \neq i$ имеем $i \underset{j_t}{\asymp} k$, что дает возможность перевести точку спроса j_t из компоненты Y_i'' в область обслуживания $Y_k(\sigma)$, не увеличивая числа компонент M_i'.

После T шагов число компонент M_i уменьшится на 1, а число компонент M_i' не увеличится. Следовательно, произойдет уменьшение величины M, что противоречит ее минимальности.

Итак, предположение $M > \tilde{m}$ приводит к противоречию. Остается случай $M = \tilde{m}$, но при этом утверждение теоремы очевидно. Теорема доказана.

Модифицированный алгоритм сегментной нумерации вершин сети

Для удобства изложения алгоритма решения задачи размещения ниже мы модифицируем описанный в [3] алгоритм сегментной нумерации вершин ациклической сети на случай произвольной сети G.

Назовем о с н о в о й сети G некоторый максимальный связный подграф $D \subset G$, ни одно ребро которого не принадлежит никакому циклу сети G; $X(D)$ – множество вершин этого подграфа.

Выберем произвольную вершину $\delta \in X(D)$ в качестве к о р н е в о й вершины сети G. Обозначим через X_j множество вершин сети G, лежащих на продолжениях цепи из корневой вершины δ в вершину j, $j \in X(D)$.

О п р е д е л е н и е 5. Максимальный циклический подграф сети G, точки сочленения которого не принадлежат основе D этой сети, назовем D - к в а з и б л о к о м.

Заметим, что D -квазиблок определяется независимо от выбора корневой вершины $\delta \in X(D)$. Далее, считая основу D сети G зафиксированной, будем пользоваться более коротким наименованием "квазиблок".

Обозначим через $\{(B_j^\alpha)\,(\alpha \in A_j)\}$ $(j \in X(D))$ совокупность квазиблоков сети G;

B_j^α – некоторый квазиблок, инцидентный вершине $j \in X(D)$;

(B_j^α) $(\alpha \in A_j)$ – совокупность квазиблоков, инцидентных одной и той же вершине $j \in X(D)$;

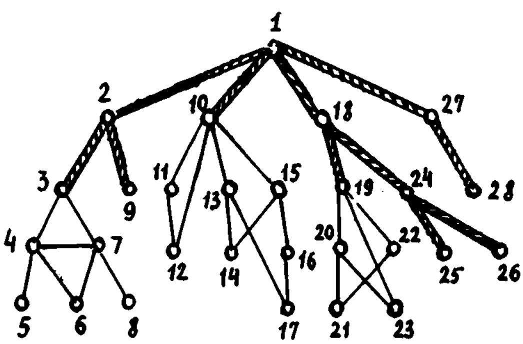
X_j^α – множество вершин квазиблока B_j^α, $\alpha \in A_j$, $j \in X(D)$.

Определение 6. Псевдодревесным назовем такой квазиблок B_j^{α}, у которого подграф, порожденный множеством вершин $X_j^{\alpha} \setminus \{j\}$, является ациклическим.

Определение 7. Квазиблоком с логарифмически ограниченным числом вершин предприятий обслуживания назовем квазиблок B_j^{α}, для которого выполняется неравенство $|\mathcal{U} \cap X_j^{\alpha} \setminus \{j\}| \leqslant$ $\leqslant \log_2 n$.

Определение 8. Назовем сеть G сегментно-занумерованной относительно ее основы D с выбранной корневой вершиной δ, если для любой вершины j основы D каждое из множеств X_j и $X_j^{\alpha} \setminus \{j\}$ $(\alpha \in A_j)$ есть целочисленный сегмент, причем j – минимальная вершина X_j, $j \in X(D)$.

На рисунке изображен пример сегментно-занумерованной сети с корневой вершиной $\delta = 1$, $X(D) = \{1, 2, 3, 9, 10, 18, 19, 24, 25, 26, 27, 28\}$ и четырьмя квазиблоками с множествами вершин: $X_3^1 = [3, 8]$, $X_{10}^1 = [10, 12]$, $X_{10}^2 = \{10\} \cup [13, 17]$, $X_{19}^1 = [19, 23]$.



Минимальную вершину квазиблока B_j^{α}, отличную от j, будем называть ведущей вершиной квазиблока.

На этом же рисунке ведущими вершинами указанных выше квазиблоков соответственно являются вершины 4, 11, 13 и 20.

Обозначим через ν_j максимальный номер вершины множества X_j, $j \in X(D)$. Из рисунка видно, что $X_j = [j, \nu_j]$ для любой вершины j основы D. Модифицированный алгоритм сегментной нумерации представим в виде двух этапов. На первом этапе используется так называемый поиск в глубину из текущей вершины j, $j \in X$. На втором этапе алгоритма осуществляется классификация квазиблоков.

Вершине j поставим в соответствие набор меток $(\mu_j, \kappa_j, \nu_j, \theta_j)$, вычисляемых в ходе работы алгоритма. Здесь μ_j – новый номер вершины j; κ_j – номер вершины, из которой поиск в глубину впервые привел в вершину j; ν_j – максимальное значение метки μ в момент возврата из вершины j в вершину κ_j; $\theta_j \in \{0, 1, 2\}$ – признак, используемый при $\theta = 1$ для определения принадлежности вершины j некоторому циклу, а при $\theta = 2$ – для установления квазиблочности подграфа.

Пусть Z_j – множество вершин, смежных с вершиной j, $j \in X$. В начале первого этапа алгоритма, считая все вершины непомеченными, полагаем

$\tilde{Z}_j = Z_j$, $j \in X$ и организуем поиск в глубину из корневой вершины $\delta \in X(D)$. При этом вершине δ присваиваются минимальная метка $\mu_\delta = \mu = 1$ и признак $\theta_\delta = 0$.

Поиск в глубину из помеченной вершины $j \in X$

В случае $\tilde{Z}_j = \emptyset$ и $j \neq \delta$ полагаем $\nu_j = \mu$, причем при $\theta_{K_j} = 1$ полагаем также $\theta_j = 2$. Далее возвращаемся в ранее помеченную вершину K_j и, присвоив $j = K_j$, продолжаем поиск в глубину.

Рассмотрим случай $\tilde{Z}_j \neq \emptyset$. Устанавливаем нулевое значение признака θ_j, берем вершину $\ell \in \tilde{Z}_j$ и исключаем ее из множества $\tilde{Z}_j$. При $\ell = K_j$ продолжаем поиск в глубину из вершины j.

Если вершина ℓ не помечена, то, положив $K_\ell = j$ и $j = \ell$, увеличиваем значение метки μ на 1, присваиваем вершине j новый номер $\mu_j = \mu$ и продолжаем поиск в глубину.

Наконец, если вершина ℓ помечена и $\ell \neq K_j$, то фиксируем признак принадлежности ее циклу $\theta_\ell = 1$ и продолжаем поиск в глубину из вершины j.

В случае $\tilde{Z}_j = \emptyset$ и $j = \delta$ поиск в глубину прекращается. На этом первый этап алгоритма сегментной нумерации закончен.

Перейдем к описанию второго этапа алгоритма, на котором осуществляется распознавание древесности и логарифмической ограниченности квазиблоков на сети с новой нумерацией вершин. Заметим, что в результате первого этапа всем ведущим вершинам ℓ квазиблоков присвоен признак $\theta = 2$ и каждый квазиблок есть подграф сети G, порожденный множеством вершин $\{K_\ell\} \cup [\ell, \nu_\ell]$.

В начале второго этапа полагаем $\ell = 1$ и далее переходим к последовательному рассмотрению вершин сети, причем, как только $\ell > n$, алгоритм заканчивает работу.

В случае $\theta_\ell < 2$ переходим к исследованию новой вершины $\ell = \ell + 1$.

В случае $\theta_\ell = 2$ оказывается, что ℓ -ведущая вершина квазиблока с множеством вершин $\{K_\ell\} \cup [\ell, \nu_\ell]$. Вычислим $N_\ell = |\{t \mid \theta_t = 2, \ell < t \leq \nu_\ell\}|$. При $N_\ell = 0$ мы имеем квазиблок псевдодревесного типа. При $N_\ell > 0$ и истинности неравенства $|U \cap [\ell, \nu_\ell]| \leq \log_2 n$ мы имеем дело с логарифмически-ограниченным квазиблоком. Далее, приписав значения признаков $\theta_t = 1$ $(\ell < t \leq \nu_\ell)$, переходим к рассмотрению новой вершины $\ell = \nu_\ell + 1$.

Из построения алгоритма следует, что первый этап реализуется с трудоемкостью порядка числа p ребер сети, а второй – с трудоемкостью порядка числа n вершин сети. Заметим также, что принадлежность вершины j ациклическому подграфу D определена теперь нулевым значением признака θ_j.

Рекуррентные соотношения для решения задачи размещения на произвольной сети G с Ц-матрицей (g_{ij}) $(i \in \mathcal{U},\ j \in X)$ можно получить с учетом теоремы 1, используя технику сведения рассматриваемой задачи к оценочной, примененную в [3]. Предполагая, что сеть сегментно-занумерована, обозначим:

$X_\ell = [\ell, \nu_\ell]$, $\mathcal{U}_\ell = \mathcal{U} \cap X_\ell$ $(\ell \in X)$;

$L^D_j = \{\ell \mid \ell \in Z_j \cap X(D),\ \ell > j\}$ – множество вершин-концов ребер, инцидентных вершине $j \in X(D)$ и принадлежащих $X_D \cap X_j$;

L^B_j – множество ведущих вершин квазиблоков, инцидентных вершине $j \in X(D)$;

$L_j = L^D_j \cup L^B_j$ $(j \in X(D))$;

$f(j)$ – минимальное значение целевой функции в задаче размещения предприятий из множества $\mathcal{U}$ в точках спроса множества X_j, $j \in X(D)$;

$S_i(j)$ – минимальное значение целевой функции в задаче размещения на подграфе, порожденном множеством вершин X_j при условии, что j-ю вершину обслуживает i-е предприятие, $j \in X(D)$, $i \in \mathcal{U}$;

$\tilde{S}_i(\ell)$ – минимальное значение целевой функции в задаче размещения на подграфе, порожденном множеством вершин $X_\ell = [\ell, \nu_\ell]$ при условии, что i-е предприятие может участвовать в обслуживании спроса без учета начальных затрат, $i \in \mathcal{U}$, $\ell \in L_j$, $j \in X(D)$.

Очевидно,

$$f(j) = \min_{i \in \mathcal{U}} S_i(j),\quad j \in X(D).$$

По определению, величина $S_i(j)$, $i \in \mathcal{U}$, $j \in X(D)$, складывается из начальных затрат g^0_i на ввод в действие i-го предприятия, затрат $\varphi_j g_{ij}$ на обслуживание j-й точки спроса i-м предприятием и минимальных затрат $\tilde{S}_i(\ell)$, $\ell \in L_j$;

$$S_i(j) = g^0_i + \varphi_j g_{ij} + \sum_{\ell \in L_j} \tilde{S}_i(\ell)\ (i \in \mathcal{U},\ j \in X(D)),$$

где

$$\tilde{S}_i(\ell) = \begin{cases} \min\{f(\ell),\ S_i(\ell) - g^0_i\},\ \ell \in L^D_j; \\ \\ \min\limits_{u \subset \mathcal{U}_\ell} \Big\{\sum\limits_{k \in u} g^0_k + \sum\limits_{t \in X_\ell} \varphi_t \min\limits_{k \in u \cup \{i\}} g_{kt}\Big\},\ \ell \in L^B_j, \end{cases} \tag{4}$$

$i \in \mathcal{U}$, $\ell \in L_j$, $j \in X(D)$.

Минимальное значение целевой функции в исходной задаче равно $S^* = f(1)$. Нетрудно заметить, что если величины $\tilde{S}_i(\ell)$ $(\ell \in L_j$, $j \in X(D))$ уже вычислены, то минимум целевой функции S^* и оптимальный вектор назначений вычисляются за $O(mn)$ действий. Займемся теперь учетом трудоемкости вычисления величин $\tilde{S}_i(l)$ $(l \in L_j^B,\ j \in X(D))$ в случае сетей, содержащих только псевдодревесные и логарифмически-ограниченные квазиблоки.

Т е о р е м а 2. В случае сети G, содержащей только псевдодревесные квазиблоки, задача размещения с Ц-матрицей (g_{ij}) $(i \in \mathcal{U},\ j \in X)$ может быть решена с помощью алгоритма, имеющего трудоемкость $O(m^2 n + p)$ действий.

Д о к а з а т е л ь с т в о следует из того, что величина $\tilde{S}_i(l)$, $l \in L_j^B,\ j \in X(D)$, есть результат решения задачи размещения на ациклической сети, порожденной множеством вершин $X_l = [l, v_l]$. В силу существования в нашем случае совокупности связных областей обслуживания эта задача решается алгоритмом из [3] за $O(m_l \cdot n_l)$ действий, где $n_l = |X_l|$, $m_l = |\mathcal{U}_l|$. Отсюда суммарная трудоемкость вычисления совокупности $\tilde{S}_i(l)\,(i \in \mathcal{U},\ l \in L_j^B,\ j \in X(D))$ оценится как

$$\sum_{i\in\mathcal{U}}\ \sum_{j\in X(D)}\ \sum_{l\in L_j^B} m_l n_l \le m^2 \sum_{j\in X(D)}\ \sum_{l\in L_j^B} n_l \le m^2 n .$$

Учитывая трудоемкость алгоритма сегментной нумерации, окончательно получим требуемую оценку $O(m^2 n + p)$.

Т е о р е м а 3. В случае сети, состоящей только из логарифмически ограниченных квазиблоков, точное решение задачи размещения с Ц-матрицей (g_{ij}) $(i \in \mathcal{U},\ j \in X)$ может быть получено за $O(mn^2)$ действий.

Доказательство непосредственно вытекает из следующего утверждения:

Л е м м а 2. Вычисление величины $\tilde{S}_i(l),\ i \in \mathcal{U},\ l \in L_j^B,\ j \in X(D)$ можно осуществить за число действий порядка $n \cdot n_l$.

Действительно, с учетом этой леммы трудоемкость вычисления совокупности величин $\tilde{S}_i(l)\,(i \in \mathcal{U},\ l \in L_j^B,\ j \in X(D))$ оценится величиной

$$\sum_{i\in\mathcal{U}}\ \sum_{j\in X(D)}\ \sum_{l\in L_j^B} n \cdot n_l \le mn \sum_{j\in X(D)}\ \sum_{l\in L_j^B} n_l \le mn^2 .$$

Остальные этапы решения задачи имеют меньшую трудоемкость.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы 2. Построим ориентированный граф (V, R) без контуров с множеством вершин $V = (v_K)\ (0 \le K < 2^{m_l})$ и дуг $R = (r_K)\ (1 \le K < 2^{m_l})$.

Элементы множества $\mathcal{U}_l$ занумерованы числами $1, 2, \dots, m_l$.

Вершине $v_K \in V$ поставим в соответствие набор $u \subset \mathcal{U}_l$ так, что

$$K = \sum_{i\in u} 2^{i-1} .$$

Пусть $u = (i_1, i_2, \dots, i_Q),\ 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_Q \le m_l$. Очевидно $i_Q = [\log_2 K] + 1$. В самом деле,

$$[\log_2 K] + 1 = [\log_2 \sum_{i\in u} 2^{i-1}] + 1 =$$

$$= \left[\log_2 \sum_{q=1}^{Q} 2^{i_q - 1}\right] + 1 = \log_2 2^{i_Q - 1} + 1 = i_Q - 1 + 1 = i_Q .$$

Дуга $z_K \in R$ соединяет вершины, соответствующие наборам $u' = (i_1, \ldots, i_{Q-1})$ и $u = (i_1, \ldots, i_{Q-1}, i_Q)$. Тогда нетрудно заметить, что если набору u поставлена в соответствие вершина с номером K, то набору u' поставлена в соответствие вершина с номером $K' = K - 2^{i_Q - 1} = K - 2^{[\log_2 K]}$. Вершине v_0 соответствует пустой набор. Обозначим

$$\left.\begin{aligned} \rho^0(K) &= \sum_{i \in u} g_i^0 , \\ \rho_t(K) &= \min_{i \in u} g_{it} \quad (t \in X_\ell), \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

где $K = \sum_{i \in u} 2^{i-1} , \quad 1 \le K < 2^{m_\ell}$.

Совокупность величин $\{\rho^0(K), \rho_t(K)\ (t \in X_\ell)\}\ (u \in U_\ell)$ можно вычислить за один просмотр списка ребер $R = (z_K)\ (1 \le K < 2^{m_\ell})$ согласно рекуррентным соотношениям:

$$\rho^0(0) = 0 ; \; \rho^0(K) = \rho^0(K - 2^{[\log_2 K]}) + g^0_{[\log_2 K]+1} ;$$

$$\rho^0_t(0) = \infty ; \; \rho_t(K) = \min\{\rho_t(K - 2^{[\log_2 K]}), g_{[\log_2 K]+1, t}\} \; (t \in X_\ell);$$

$$1 \le K < 2^{m_\ell} .$$

Для этого потребуется число действий порядка

$$\sum_{K=1}^{2^{m_\ell}} |X_\ell| = n_\ell \cdot 2^{m_\ell} \le n_\ell \cdot n .$$

Остается вычислить саму величину $\tilde{S}_i(\ell)$, которую с учетом (4) и (5) можно записать в виде

$$\tilde{S}_i(\ell) = \min_{0 \le K < 2^{m_\ell}} \left(\rho^0(K) + \sum_{t \in X_\ell} \varphi_t \min\{g_{it}, \rho_t(K)\}\right),$$

откуда следует, что необходимо затратить еще порядка $|X_\ell| \cdot 2^{m_\ell} \le n_\ell \cdot n$ действий.

Лемма доказана.

Из последних двух теорем получается

С л е д с т в и е. Если сеть G содержит квазиблоки только псевдодревесного и (или) логарифмически-ограниченного типа, то задача размещения с

Ц-матрицей может быть решена за $O(mn(m+n))$ действий.

Поступила в ред.-изд.отдел
2 октября 1984 г.

Литература

1. Гимади Э.Х. Выбор оптимальных шкал в одном классе задач типа размещения, унификации и стандартизации. – В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1970, вып. 6, с. 57–70.

2. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. – Новосибирск: Наука, 1978, 333 с.

3. Гимади Э.Х. Эффективный алгоритм решения задачи размещения с областями обслуживания, связными относительно ациклической сети. – В кн.; Экстремальные задачи исследования операций (Управляемые системы), Новосибирск, 1983, вып. 23, с. 12–23.