Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1984 г., вып. 24.

УДК 519.3:62-50

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧЕ УПРАВЛЕНИЯ ХИМИЧЕСКИМ РЕАКТОРОМ

К.С.Мусабеков

§ 1. Постановка задачи

Рассмотрим задачу управления неадиабатическим трубчатым реактором, используемым в химической технологии. Математическая модель реактора задается системой дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1(t,x)}{\partial t} = a\cdot\frac{\partial^2 v_1(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1(t,x)}{\partial x} - c\,v_1 f(v_2);\\
&\frac{\partial v_2(t,x)}{\partial t} = b\cdot\frac{\partial^2 v_2(t,x)}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2(t,x)}{\partial x} + K v_1 f(v_2) + g\cdot(v_3(t) - v_2(t,x));\\
&d\,v_3(t) = d\cdot\left(\int_0^1 v_2(t,x)\,dx - v_3(t)\right) + u(t)\cdot(E - v_3(t))
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

с граничными

$$\left.\begin{aligned}
&a\cdot\frac{\partial v_1(t,0)}{\partial x} - v_1(t,0) = -1; \qquad \frac{\partial v_1(t,1)}{\partial x} = 0;\\
&b\cdot\frac{\partial v_2(t,0)}{\partial x} - v_2(t,0) = -1; \qquad \frac{\partial v_2(t,1)}{\partial x} = 0
\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

и начальными условиями:

$$v_1(0,x) = v_{10}(x);\ v_2(0,x) = v_{20}(x);\ v_3(0) = v_{30}; \quad (3)$$

где $f(v_2) = exp(\Gamma - \Gamma / v_2(t,x))$; $a, b, c, \Gamma, K, g, d, E, v_{30}$ константы, положительные параметры системы; $u(t)$ - управляющая функция (управление); $v_1(t,x)$, $v_2(t,x)$, $v_3(t)$ - функции концентрации реагирующей смеси, температуры реактора, температуры охладителя соответственно.

В настоящей работе рассматривается задача минимизации функционала

$$J(u) = \int_0^T v_1(t,1)\,dt + A\cdot\iint_Q \Phi(v_2)\,dx\,dt, \quad (4)$$

где $\int_0^T v_1(t,1)\,dt$ - суммарное за время T количество непрореагировавшего вещества на выходе реактора, A - постоянная величина (штрафной коэффициент),

$$\Phi(v_2)=\left[v_2^*-v_2\right]_+^2=\begin{cases}0, & \text{если } v_2\le v_2^*,\\ (v_2^*-v_2)^2, & \text{если } v_2>v_2^*,\end{cases}$$

$$Q=\{(t,x):\ 0\le t\le T,\ \ 0\le x\le 1\}.$$

Управление $u(t)$ удовлетворяет ограничениям

$$0\le u(t)\le u_0=const. \tag{5}$$

Для функциональных пространств введем следующие обозначения:

$C[0,T]$ - банахово пространство непрерывных функций, заданных на $[0,T]$, с нормой $\|v\|_C=\max\limits_{0\le t\le T}|v(t)|$.

$C^{0,\alpha}(Q)$ - банахово пространство функций, заданных в области Q, непрерывных по Гельдеру с показателем α по переменной x и с показателем $\alpha/2$ по переменной t, с нормой $|v|_{0,\alpha}=|v|_{0,0}+H_\alpha(v)$, где

$$0<\alpha\le 1,\ \ v^T=(v_1,v_2),\ |v|^2=v_1^2+v_2^2,\ |v|_{0,0}=\sup_Q|v(t,x)|,$$

$$H_\alpha(v)=\sup_{P,R\in Q}\frac{|v(P)-v(P)|}{[d(P,R)]^\alpha},\ \ d(P,R)=|t-\tau|^{1/2}+|x-y|,\ P(t,x),R(\tau,y)\in Q;$$

$C^{2,\alpha}(Q)$ - банахово пространство функций, заданных в области Q, обладающих непрерывными по Гельдеру с показателем α производными до второго порядка по x и первого порядка по t. Норму в этом пространстве определяем равенством

$$|v|_{2,\alpha}=\sum_{i=0}^{2}|\mathcal{D}_x^i v|_{0,\alpha}+|\mathcal{D}_t v|_{0,\alpha};$$

$W[0,T]$ - банахово пространство абсолютно непрерывных функций, заданных на $[0,T]$, с нормой

$$\|v\|_W=\max_{0\le t\le T}|v(t)|+\int_0^T\left|\frac{dv}{dt}\right|dt;$$

$W_2^1[0,T]$ - банахово пространство функций $v(t)\in L_2[0,T]$, заданных на $[0,T]$, имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные первого порядка. Норму в этом пространстве определяем равенством

$$\|v\|^2_{W_2^1}=\int_0^T\left[|v|^2+|\mathcal{D}_t v|^2\right]dt;$$

$W_2^{1,2}(Q)$ - банахово пространство функций $v(t,x)\in L_2(Q)$, имеющих обобщенные производные $\mathcal{D}_t v,\ \mathcal{D}_x v,\ \mathcal{D}_x^2 v\in L_2(Q)$. Норму в нем определяем равенством

$$\|v\|^2_{1,2;2} = \iint\limits_Q \left(|\mathcal{D}^2_x v|^2 + |\mathcal{D}_t v|^2 + |v|^2\right) dx\,dt;$$

$U_0 = \{u(t):\ 0 \le u(t) \le u_0 = const,\ u(t)$ - измеримая функция, $0 \le t \le T\}$.

В [1] для задачи (1)-(3) была доказана теорема существования и единственности решения $v_1(t,x), v_2(t,x) \in C^{2,\alpha}(Q)$, $v_3(t) \in W[0,T]$ при произвольной функции $u(t) \in U_0$.

В настоящей работе будет получено необходимое условие оптимальности (принцип максимума Л.С.Понтрягина) для задачи (1)-(5).

Предварительно задачу (1)-(4) несколько видоизменим.

Введем новую функцию $v_4(t)$ по формуле

$$v_4(t) = \int_0^t \Big[v_1(\tau,1) + A\cdot\int_0^1 [v_2^* - v_2]_+^2\, dx\Big] d\tau,\quad v_4(0) = 0,\quad v_4(T) = \mathcal{J}(u). \tag{6}$$

Теперь задача (1)-(4) принимает вид:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial v_1}{\partial t} = a\cdot\frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial v_1}{\partial x} - c\,v_1 f(v_2);\\
&\frac{\partial v_2}{\partial t} = b\cdot\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x} + K v f(v_2) + q(v_3(t) - v_2(t,x));\\
&\frac{d v_3}{dt} = d\cdot\Big(\int_0^1 v_2(t,x)\,dx - v_3(t)\Big) + u(t)\cdot(E - v_3(t));\\
&\frac{d v_4}{dt} = v_1(t,1) + A\int_0^1 [v_2^* - v_2]_+^2\, dx;
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
&a\,\frac{\partial v_1(t,0)}{\partial x} - v_1(t,0) = -1; \qquad \frac{\partial v_1(t,1)}{\partial x} = 0;\\
&b\,\frac{\partial v_2(t,0)}{\partial x} - v_2(t,0) = -1; \qquad \frac{\partial v_2(t,1)}{\partial x} = 0;
\end{aligned} \tag{8}$$

$$v_1(0,x) = v_{10}(x);\ v_2(0,x) = v_{20}(x);\ v_3(0) = v_{30};\ v_4(0) = 0; \tag{9}$$

$$\mathcal{J} = v_4(T) \longrightarrow \min_{u \in U_0}. \tag{10}$$

§ 2. Игольчатая вариация

Пусть $\{u^0(t), v_1^0(t,x), v_2^0(t,x), v_3^0(t), v_4^0(t)\}$ - оптимальный процесс. Рассмотрим произвольные числа β и $t_0 \in (0,T)$, $\bar{u} \in [0,u_0]$. Обозначим через $\{\mu\}$ множество всех троек $\mu = \{t_0, \beta, \bar{u}\}$. Пусть Δ_ε - интервал между точками t_0 и $t_0 + \beta\cdot\varepsilon$. Выберем ε_μ настолько малое, что

$\Delta_\varepsilon \subset (0,T)$ при $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_\mu$. Для $0 \le \varepsilon \le \varepsilon_\mu$ поставим в соответствие тройке μ функцию

$$u^\varepsilon(t) = \begin{cases} u^0(t) & \text{при} \quad t \in [0,T] \setminus \Delta_\varepsilon, \\ \bar{u} & \text{при} \quad t \in \Delta_\varepsilon. \end{cases} \tag{11}$$

Рассмотрим управление $u^\varepsilon(t)$ и два произвольных управления $u_1(t)$, $u_2(t) \in U_0$. Обозначим через $(v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon, v_3^\varepsilon, v_4^\varepsilon)$, $(v_1^1, v_2^1, v_3^1, v_4^1)$, $(v_1^2, v_2^2, v_3^2, v_4^2)$ соответствующие этим управлениям решения задачи (7)-(9) и положим $\Delta u = u^\varepsilon - u^0$, $\Delta_1 u = u_1 - u_2$, $\Delta v_i = v_i^\varepsilon - v_i^0$, $\Delta_1 v_i = v_i^1 - v_i^2$.

Л е м м а 1. Для приращений $\Delta_1 u$, $\Delta_1 v_i$ $(i = 1, 4)$ справедливы оценки

$$\|\Delta_1 v_i\|_{1,2;\,2} \le C_1 \cdot \|\Delta_1 u\|_{L_1} (i = 1; 2), \|\Delta_1 v_4\|_{C^1} \le C_2 \cdot \|\Delta_1 u\|_{L_1}, \tag{12}$$

$$|\Delta_1 v_i|_{0,\alpha} \le C_3 \cdot \|\Delta_1 u\|_{L_1} \; (i = 1; 2), \|\Delta_1 v_3\|_W \le C_4 \|\Delta_1 u\|_{L_1}. \tag{13}$$

Доказательство леммы 1 и встречающихся далее других лемм приводится в конце статьи.

§ 3. Линейная система

Рассмотрим линейную систему дифференциальных уравнений для функций $w_1(t,x)$, $w_2(t,x)$, $w_3(t)$, $w_4(t)$:

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} = a \cdot \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} - \frac{\partial w_1}{\partial x} - c f(v_2^\varepsilon) \cdot w_1 - c v_1^0 f'_{v_2}(v_2^\varepsilon) \cdot w_2 + \varphi_1(t,x);$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} = b \cdot \frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} - \frac{\partial w_2}{\partial x} + K f(v_2^\varepsilon) \cdot w_1 + (K v_1^0 f'_{v_2}(v_2^\varepsilon) - g) \cdot w_2 + g \cdot w_3 + \varphi_2(t,x)$$

$$\frac{dw_3}{dt} = d \cdot \left(\int_0^1 w_2(t,x)\,dx - w_3\right) - u^\varepsilon \cdot w_3 + \varphi_3(t); \tag{14}$$

$$\frac{dw_4}{dt} = w_1(t,1) + A \cdot \int_0^1 \Phi'_{v_2}(v_2^\varepsilon) \cdot w_2(t,x)\,dx + \varphi_4(t);$$

$$\left.\begin{aligned} & a \cdot \frac{\partial w_1(t,0)}{\partial x} - w_1(t,0) = 0; \qquad \frac{\partial w_1(t,1)}{\partial x} = 0; \\ & b \cdot \frac{\partial w_2(t,0)}{\partial x} - w_2(t,0) = 0; \qquad \frac{\partial w_2(t,1)}{\partial x} = 0; \end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$w_1(0,x) = 0; \; w_2(0,x) = 0; \; w_3(0) = 0; \; w_4(0) = 0;$$

где

$$f'_{v_2}(v_2^\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\partial f(v_2^0 + \tau\cdot(v_2^\varepsilon - v_2^0))}{\partial v_2}\, d\tau,$$

$$\Phi'_{v_2}(v_2^\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\partial \Phi(v_2^0 + \tau\cdot(v_2^\varepsilon - v_2^0))}{\partial v_2}\, d\tau. \tag{16}$$

Будем считать, что $v_1^0, v_2^0, v_1^\varepsilon, v_2^\varepsilon \in C^{2,\alpha}(Q)$, $\varphi_i \in L_2(Q), (i=\overline{1,4})$. Обозначим $V_1 = W_2^{1,2}(Q)\times W_2^{1,2}(Q)\times W_2^1[0,T]\times W_2^1[0,T]$

Л е м м а 2. Для любых функций $\varphi_1, \varphi_2 \in L_2(Q)$, $\varphi_3, \varphi_4 \in L_2[0,T]$ соответствующее решение задачи (14)-(16) существует, единственно, принадлежит V_1 и справедлива оценка

$$\|w_1\|_{1,2;2} + \|w_2\|_{1,2;2} + \|w_3\|_{W_2^1} + \|w_4\|_{W_1^2} \le \nu\cdot \sum_{i=1}^4 \|\varphi_i\|_{L_2}. \tag{17}$$

§ 4. Приращение функционала

Приращение функционала J при варьировании управления $u^0(t)$ найдем, следуя идеям [2]. Считаем β фиксированным. Найдем разность

$$\Delta J \equiv J(u^\varepsilon) - J(u^0) = \Delta v_4(T). \tag{18}$$

(В силу специфики функционала $J(u)$, функционал ΔJ от ε не зависит.) Определим для каждого ε , $0 \le \varepsilon < \varepsilon_\mu$, на пространстве V_1 оператор $S_\varepsilon(w)$ (где $w^T = (w_1, w_2, w_3, w_4)$):

$$S_\varepsilon(w) = \begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial t} - a\cdot\dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial w_1}{\partial x} + c f(v_2^\varepsilon)\cdot w_1 + c v_1^0 f'_{v_2}(v_2^\varepsilon)\cdot w_2, \\ \dfrac{\partial w_2}{\partial t} - b\cdot\dfrac{\partial^2 w_2}{\partial x} + \dfrac{\partial w_2}{\partial x} - (k f(v_2^\varepsilon)\cdot w_1 - k v_1^0 f'_{v_2}(v_2^\varepsilon) - g)\cdot w_2 - g w_3, \\ \dfrac{dw_3}{dt} - d(\int_0^1 w_2(t,x)\,dx - w_3) + u^\varepsilon\cdot w_3, \\ \dfrac{dw_4}{dt} - w_1(t,1) - A\cdot\int_0^1 \Phi'_{v_2}(v_2^\varepsilon)\cdot w_2(t,x)\,dx. \end{cases}$$

Оператор $S_\varepsilon(w)$ действует из V_1 на V_2 (где $V_2 = L_2(Q)\times L_2(Q)\times L_2[0,T]\times L_2[0,T]$) . Обозначим $\omega^T = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4)$, где

$\varphi_1, \varphi_2 \in L_2(Q)$, $\varphi_3, \varphi_4 \in L_2[0,T]$. Тогда, по лемме 2, уравнение

$$S_\varepsilon(w) = \omega \tag{19}$$

с краевыми и начальными условиями (15)-(16) имеет единственное решение в пространстве V_1 и справедлива оценка

$$\|w\|_{V_1} \le \nu \cdot \|\omega\|_{V_2} . \tag{20}$$

(Постоянная ν зависит лишь от коэффициентов a, b, c, K и т.д. и данных задачи и не зависит от ε. Оценки функции v_i^ε, $v_i^0 (i = 1; 2)$ имеются в [1], они также не зависят от ε.) Таким образом, оператор S_ε имеет линейный ограниченный обратный оператор S_ε^{-1}, действующий из V_2 на V_1. Норма $\|S_\varepsilon^{-1}\| \le \nu$. Обозначим $R_\varepsilon = S_\varepsilon^{-1}$. Фиксируем ε, β, $\bar{u}$ и, определив формулой $T_0(h) = h_4(T)$ линейный функционал $T_0 \in V_1^*$, где $h^T(t,x) = (h_1(t,x), h_2(t,x), h_3(t), h_4(t))$, запишем

$$\begin{gathered} T_0(\Delta v) = \Delta v_4(T) = \Delta J \\ ((\Delta v)^T = (\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3, \Delta v_4)). \end{gathered} \tag{21}$$

Далее, $\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3, \Delta v_4$ удовлетворяют системе (19) с соответствующими краевыми и начальными условиями (15)-(16), если принять $\omega^T = (0, 0, \Delta u \cdot (E - v_3^0), 0)$. При этом $\Delta u \cdot (E - v_3^0) \in L_2[0,T]$, поэтому, по лемме 2, решение $\Delta v \in V_1$, точнее, $\Delta v_1, \Delta v_2 \in W_2^{1,2}(Q) \cap C^{2,\alpha}(Q)$, $\Delta v_3 \in W_2^1[0,T]$, $\Delta v_4 \in C^1[0,T]$.

Функционал T_0 оператором R_ε^*, сопряженным к оператору R_ε, переводится в линейный ограниченный функционал Q_ε, действующий на пространстве $L_2(Q) \times L_2(Q) \times L_2[0,T] \times L_2[0,T]$. Так как $\omega^T = (0, 0, \Delta u \cdot (E - v_3^0), 0) \in L_2(Q) \times L_2(Q) \times L_2[0,T] \times L_2[0,T]$, а $\Delta v = R_\varepsilon(\omega)$, то $\Delta J = Q_\varepsilon(\omega)$. По теореме Рисса о представлении линейных функционалов, действующих на V_2, существуют такие функции $(-\psi_1^\varepsilon(t,x), -\psi_2^\varepsilon(t,x), -\psi_3^\varepsilon(t), -\psi_4^\varepsilon(t)) \in L_2(Q) \times L_2(Q) \times L_2[0,T] \times L_2[0,T]$, что

$$\Delta J = Q_\varepsilon(\omega) = -\iint_Q 0 \cdot \psi_1^\varepsilon dx\,dt - \iint_Q 0 \cdot \psi_2^\varepsilon dx\,dt - \int_0^T \psi_3^\varepsilon \cdot (E - v_3^0) \Delta u\, dt - \int_0^T 0 \cdot \psi_4^\varepsilon dt$$

или

$$\Delta J = -\int_0^T \psi_3^\varepsilon(t) \cdot (E - v_3^0(t)) \Delta u(t)\, dt . \tag{22}$$

Мы имеем еще следующие формулы:

$\Delta J = T_0(\Delta v) = T_0(R_\varepsilon(\omega)) = Q_\varepsilon(\omega)$, т.е. $Q_\varepsilon(\omega) = T_0(R_\varepsilon(\omega))$,

$$Q_\varepsilon = T_0 R_\varepsilon , \tag{23}$$

$$Q_\varepsilon = R_\varepsilon^* T_0 \tag{24}$$

§ 5. Вспомогательная задача

Прежде всего, проводя рассуждения, аналогичные [2], можно доказать, что $\|\psi_i^\varepsilon - \psi_i^0\|_{L_2} \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ $(i=\overline{1,4})$. Далее, для вычисления первой вариации функционала рассмотрим вспомогательную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{\partial\bar\psi_1^\varepsilon}{\partial t} - a\cdot\frac{\partial^2\bar\psi_1^\varepsilon}{\partial x^2} - \frac{\partial\bar\psi_1^\varepsilon}{\partial x} - (c\bar\psi_1^\varepsilon - \kappa\cdot\bar\psi_2^\varepsilon)f(v_2^\varepsilon) = 0;\\
&-\frac{\partial\bar\psi_2^\varepsilon}{\partial t} - b\cdot\frac{\partial^2\bar\psi_2^\varepsilon}{\partial x^2} - \frac{\partial\bar\psi_2^\varepsilon}{\partial x} + (c\bar\psi_1^\varepsilon - \kappa\bar\psi_2^\varepsilon)\,v_1^0 f'_{v_2}(v_2^\varepsilon) +\\
&+g\cdot\bar\psi_2^\varepsilon - d\cdot\bar\psi_3^\varepsilon - A\cdot\Phi'_{v_2}(v_2^\varepsilon)\,\bar\psi_4^\varepsilon = 0;\\
&-\frac{d\bar\psi_3^\varepsilon}{dt} - g\cdot\int_0^1\bar\psi_2^\varepsilon(t,x)\,dx + (d+u^\varepsilon)\cdot\bar\psi_3^\varepsilon = 0;\\
&-\frac{d\bar\psi_4^\varepsilon}{dt} = 0;
\end{aligned}\right\}\tag{25}$$

с краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\bar\psi_1^\varepsilon(t,0)}{\partial x} = 0; \qquad a\cdot\frac{\partial\bar\psi_1^\varepsilon(t,1)}{\partial x} + \bar\psi_1^\varepsilon(t,1) = \bar\psi_4^\varepsilon(t);\\
&\frac{\partial\bar\psi_2^\varepsilon(t,0)}{\partial x} = 0; \qquad b\cdot\frac{\partial\bar\psi_2^\varepsilon(t,1)}{\partial x} + \bar\psi_2^\varepsilon(t,1) = 0
\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

и начальными условиями:

$$\bar\psi_1^\varepsilon(T,x) = 0;\quad \bar\psi_2^\varepsilon(T,x) = 0;\quad \bar\psi_3^\varepsilon(T) = 0;\quad \bar\psi_4^\varepsilon(T) = -1. \tag{27}$$

Очевидно, последнее уравнение системы (25) имеет решение $\bar\psi_4^\varepsilon(t) = -1$.

Л е м м а 3. Задача (25)-(27) имеет единственное решение $\bar\psi_1^\varepsilon, \bar\psi_2^\varepsilon \in W_2^{1,2}(Q)$, $\bar\psi_3^\varepsilon \in W_2^1[0,T]$ и справедливы оценки:

$$\|\bar\psi_i^\varepsilon\|_{1,2;2} \le const\cdot(\|A\cdot\Phi'_{v_2}(v_2^\varepsilon)\|_{L_2} + 1) \quad (i=1;2) \tag{28}$$

$$\|\bar\psi_3^\varepsilon\|_C \le const\,(\|A\cdot\Phi'_{v_2}(v_2^\varepsilon)\|_{L_2} + 1).$$

Теперь установим взаимосвязь построенных функций $\bar\psi_1^\varepsilon, \bar\psi_2^\varepsilon, \bar\psi_3^\varepsilon, \bar\psi_4^\varepsilon$ с функциями $\psi_1^\varepsilon, \psi_2^\varepsilon, \psi_3^\varepsilon, \psi^\varepsilon$, существование которых установлено выше по теореме Рисса. Для этого умножим уравнения системы (25) на Δv_1, $\Delta v_2, \Delta v_3, \Delta v_4$ и проинтегрируем по Q. Получаем

$$\iint_Q -\frac{\partial\bar\psi_1^\varepsilon}{\partial t} - a\frac{\partial^2\bar\psi_1^\varepsilon}{\partial x^2} - \frac{\partial\bar\psi_1^\varepsilon}{\partial x} + (c\bar\psi_1^\varepsilon - \kappa\bar\psi^\varepsilon)f(v_2^\varepsilon)\Delta v_1\,dx\,dt + \iint_Q\Big[-\frac{\partial\bar\psi_2^\varepsilon}{\partial x^2} -$$
$$-b\cdot\frac{\partial^2\bar\psi_2^\varepsilon}{\partial x^2} - \frac{\partial\bar\psi_2^\varepsilon}{\partial x} + (c\bar\psi_1^\varepsilon - \kappa\bar\psi_2^\varepsilon)v_1^0 f'_{v_2}(v_2^\varepsilon) + g\cdot\bar\psi_2^\varepsilon - d\bar\psi_3^\varepsilon - A\cdot\Phi'_{v_2}(v_2^\varepsilon)\times$$
$$\times\bar\psi_4^\varepsilon\Big]\Delta v_2\,dx\,dt + \int_0^T\Big[-\frac{d\bar\psi_3^\varepsilon}{dt} - g\cdot\int_0^1\bar\psi_2^\varepsilon(t,x)\,dx + \bar\psi_3^\varepsilon\cdot(d+u^\varepsilon)\Big]\cdot\Delta v_3\,dt +$$
$$+\int_0^T\Big[-\frac{d\bar\psi_4^\varepsilon}{dt}\Big]\cdot\Delta v_4\,dt = 0. \tag{29}$$

Далее, интегрируя по частям, имеем

$$\iint_Q \bar\Psi_1^\varepsilon\cdot\Big[\frac{\partial\Delta v_1}{\partial t}-a\cdot\frac{\partial^2\Delta v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial\Delta v_1}{\partial x}+Cf(v_2^\varepsilon)\Delta v_1+C v_1^0 f'_{v_2}(v_2^\varepsilon)\cdot\Delta v_2\Big]dx\,dt+$$

$$+\iint_Q \bar\Psi_2^\varepsilon\cdot\Big[\frac{\partial\Delta v_2}{\partial t}-b\cdot\frac{\partial^2\Delta v_2}{\partial x}-Kf(v_2^\varepsilon)\Delta v_1+(g-Kv_1^0 f'_{v_2}(v_2^\varepsilon))\Delta v_2-$$

$$-g\cdot\Delta v_3\Big]dx\,dt+\int_0^T\bar\Psi_3^\varepsilon\cdot\Big[\frac{d\Delta v_3}{dt}-d\cdot\int_0^1\Delta v_2(t,x)dx+(d+u^\varepsilon)\Delta v_3\Big]dt+$$

$$+\bar\Psi_3^\varepsilon(0)\,\Delta v_3(0)+\int_0^T\bar\Psi_4^\varepsilon\cdot\Big[\frac{d\Delta v_4}{dt}-\Delta v_1(t,1)-A\cdot\int_0^1\Phi'_{v_2}(v_2^\varepsilon)\Delta v_2\,dx\Big]dt+$$

$$+\bar\Psi_4^\varepsilon(0)+\Delta v_4(T)+a\cdot\int_0^T\bar\Psi_1^\varepsilon(t,1)\cdot\frac{\partial\Delta v_1(t,1)}{\partial x}dt+b\cdot\int_0^T\bar\Psi_2^\varepsilon(t,1)\times$$

$$\times\frac{\partial\Delta v_2(t,1)}{\partial x}dt+\int_0^1\bar\Psi_1^\varepsilon(0,x)\Delta v_1(0,x)dx+\int_0^1\bar\Psi_2^\varepsilon(0,x)\Delta v_2(0,x)dx+$$

$$+\int_0^T\bar\Psi_1^\varepsilon(t,0)\cdot\Big[\Delta v_1(t,0)-a\cdot\frac{\partial\Delta v_1(t,0)}{\partial x}\Big]dt+\int_0^T\bar\Psi_2^\varepsilon(t,0)\times$$

$$\times\Big[\Delta v_2(t,0)-b\cdot\frac{\partial\Delta v_2(t,0)}{\partial x}\Big]dt=0. \qquad (30)$$

Поскольку $\Delta v_1,\Delta v_2,\Delta v_3,\Delta v_4$ удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Delta v_1}{\partial t}-a\cdot\frac{\partial^2\Delta v_1}{\partial x^2}+\frac{\partial\Delta v_1}{\partial x}+Cf(v_2^\varepsilon)\Delta v_1+Cv_1^0 f'_{v_2}(v_2^\varepsilon)\Delta v_2=0;\\
&\frac{\partial\Delta v_2}{\partial t}-b\cdot\frac{\partial^2\Delta v_2}{\partial x^2}-\frac{\partial\Delta v_2}{\partial x}-Kf(v_2^\varepsilon)\Delta v_1+(g-Kv_1^0 f'_{v_2}(v_2^\varepsilon))\Delta v_2-g\cdot\Delta v_3=0;\\
&\frac{d\Delta v_3}{dt}-d\Big(\int_0^1\Delta v_2(t,x)dx-\Delta v_3\Big)+u^\varepsilon\Delta v_3=(E-v_3^0)\cdot\Delta u;\\
&\frac{d\Delta v_4}{dt}-\Delta v_1(t,1)-A\cdot\int_0^1\Phi'_{v_2}(v_2^\varepsilon)\cdot\Delta v_2(t,x)\,dx=0
\end{aligned}\right\}\qquad(31)$$

с граничными

$$\left.\begin{aligned}
&a\cdot\frac{\partial\Delta v_1(t,0)}{\partial x}-\Delta v_1(t,0)=0;\quad \frac{\partial\Delta v_1(t,1)}{\partial x}=0;\\
&b\cdot\frac{\partial\Delta v_2(t,0)}{\partial x}-\Delta v_2(t,0)=0;\quad \frac{\partial\Delta v_2(t,1)}{\partial x}=0
\end{aligned}\right\}\qquad(32)$$

и начальными условиями:

$\Delta v_1(0,x)=0,\ \Delta v_2(0,x)=0,\ \Delta v_3(0)=0,\ \Delta v_4(0)=0,$

то из (30) получим

$$\int_0^T \Delta u \cdot (E - v_3^0) \cdot \bar{\psi}_3^{\varepsilon} dt + \Delta v_4(T) = 0 .$$

Отсюда $\Delta J = \Delta v_4(T) = -\int_0^T \Delta u \cdot (E - v_3^0) \cdot \bar{\psi}_3^{\varepsilon} dt$

или

$$\Delta J = -\int_0^T \Delta u \cdot (E - v_3^0) \cdot \bar{\psi}_3^{\varepsilon} dt . \tag{33}$$

Из (22) и (33) имеем

$$\int_0^T \Delta u(t) \cdot (E - v_3^0(t)) \cdot (\psi_3^{\varepsilon}(t) - \bar{\psi}_3^{\varepsilon}(t))\, dt = 0, \tag{34}$$

устанавливающую взаимосвязь функций $\psi_3^{\varepsilon}(t)$ и $\bar{\psi}_3^{\varepsilon}(t)$. Теперь покажем, что при $\varepsilon \to 0$

$$\|\bar{\psi}_i^{\varepsilon} - \bar{\psi}_i^0\|_{1,2;2} \to 0, \quad \|\bar{\psi}_3^{\varepsilon} - \bar{\psi}_3^0\|_C \to 0 \quad (i = 1, 2). \tag{35}$$

Действительно, при $\varepsilon \to 0$ имеем $\|\Delta v_i\|_C \to 0$ $(i = 1, 2, 3)$ в силу леммы 1. Отсюда $v_2^{\varepsilon} \to v_2^0$, $f(v_2^{\varepsilon}) \to f(v_2^0)$,

$$f'_{v_2}(v_2^{\varepsilon}) = \int_0^1 f_{v_2}(v_2^0 + \tau \cdot (v_2^{\varepsilon} - v_2^0))\, d\tau \to \frac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2}, \quad \frac{\partial \Phi(v_2^0 + \tau \cdot (v_2^{\varepsilon} - v_2^0))}{\partial v_2} =$$

$$= -2 \cdot [v_2^* - v_2^0 - \tau \cdot (v_2^{\varepsilon} - v_2^0)]_+ \to -2 [v_2^* - v_2^0]_+ = \frac{\partial \Phi(v_2^0)}{\partial v_2} .$$

Чтобы показать справедливость (35), рассмотрим разность двух систем уравнений для $\bar{\psi}_i^{\varepsilon}$ и $\bar{\psi}_i^0$. Тогда для приращений $\Delta \psi_i = \bar{\psi}_i^{\varepsilon} - \bar{\psi}_i^0$ $(i = 1, 2, 3)$ имеем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{\partial \Delta\psi_1}{\partial t} - u \cdot \frac{\partial^2 \Delta\psi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial \Delta\psi_1}{\partial x} + c f(v_2^0) \Delta\psi_1 - K f(v_2^0) \Delta\psi_2 = \Phi_1(\varepsilon); \\
&-\frac{\partial \Delta\psi_2}{\partial t} - b \cdot \frac{\partial^2 \Delta\psi_2}{\partial x^2} - \frac{\partial \Delta\psi_2}{\partial x} + g \cdot \Delta\psi_2 - d \cdot \Delta\psi_3 + v_1^0 \cdot \frac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2} \times \\
&\times (c \Delta\psi_1 - K \Delta\psi_2) = \Phi_2(\varepsilon); \\
&-\frac{d \Delta\psi_3}{dt} - g \cdot \int_0^1 \Delta\psi_2(t, x)\, dx + (d + u^0) \cdot \Delta\psi_3 = -\bar{\psi}_3^{\varepsilon} \cdot \Delta u;
\end{aligned}\right\} \tag{36}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\Delta\psi_1(t,0)}{\partial x}=0; \quad a\cdot\frac{\partial\Delta\psi_1(t,1)}{\partial x}+\Delta\psi_1(t,1)=0;\\ &\frac{\partial\Delta\psi_2(t,0)}{\partial x}=0; \quad b\cdot\frac{\partial\Delta\psi_2(t,1)}{\partial x}+\Delta\psi_2(t,1)=0; \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

$$\Delta\psi_1(T,x)=0, \quad \Delta\psi_2(T,x)=0, \quad \Delta\psi_3(T)=0, \tag{38}$$

где $\Phi_1(\varepsilon)=(\kappa\bar{\psi}_2^\varepsilon-c\psi_1^\varepsilon)\cdot(f(v_2^\varepsilon)-f(v_2^0))$,

$$\Phi_2(\varepsilon)=2A\cdot\int_0^1[v_2^*-v_2^0-\tau\cdot(v_2^\varepsilon-v_2^0)]_+\,d\tau-2A\cdot[v_2^*-v_2^0]_+ +$$

$$+\left(f'_{v_2}(v_2^\varepsilon)-\frac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2}\right)\cdot v_1^0\cdot(\kappa\bar{\psi}_2^\varepsilon-c\bar{\psi}_1^\varepsilon)\,.$$

В системе уравнений (36) обращаем время, т.е. заменяем t на $T-t$ и затем из первых двух уравнений, применяя результаты работы [3], получаем оценку

$$\|\Delta\psi_i\|_{1,2;2}\le const\cdot\left(\|\Phi_1(\varepsilon)\|_{L_2}+\|\Phi_2(\varepsilon)\|_{L_2}+\|\Delta\psi_3\|_{L_2}\right)$$
$$(i=1;2),$$

следовательно,

$$\|\Delta\psi_2\|_C\le const\cdot\left(\|\Phi_1(\varepsilon)\|_{L_2}+\|\Phi_2(\varepsilon)\|_{L_2}+\|\Delta\psi_3\|_C\right).$$

Из третьего уравнения системы (36) имеем

$$\Delta\psi_3(t)=\int_0^t\Big[g\cdot\int_0^1\Delta\psi_2(\tau,x)\,dx-\Delta\psi_3\cdot(d+u^0)-\bar{\psi}_3^\varepsilon\cdot\Delta u\Big]d\tau.$$

По неравенству Гронуолла-Беллмана, получим

$$\|\Delta\psi_3(t)\|_C\le const\cdot\left(\|\Phi_1(\varepsilon)\|_{L_2}+\|\Phi_2(\varepsilon)\|_{L_2}+\|\Delta u\|_{L_1}\right).$$

Отсюда $\|\Delta\psi_3(t)\|_C\to 0$ при $\varepsilon\to 0$, следовательно, и $\|\Delta\psi_i\|_{1,2;2}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$ $(i=1;2)$. Справедливость (35) доказана.

§ 6. Множители Лагранжа

Теперь покажем, что функции $\psi_1^0,\ \psi_2^0,\ \psi_3^0,\ \psi_4^0$, существование которых утверждалось по теореме Рисса, являются множителями Лагранжа для некоторого лагранжиана задачи (5), (7)-(10). Формулу (24) запишем в виде

$$Q_0 = (S_0^{-1})^* T_0$$

или $Q_0 = T_0 S_0^{-1}$, откуда

$$T_0 - Q_0 S_0 = 0 . \qquad (39)$$

Используя (39), найдем систему уравнений для $\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0, \psi_4^0$. Предварительно введем некоторые обозначения:

$$F(v,u) = \begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial t} - a \cdot \dfrac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + c v_1 f(v_2), \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} - b \cdot \dfrac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial v_2}{\partial x} - k v_1 f(v_2) - \\ - g \cdot (v_3 - v_2), \\ \dfrac{d v_3}{dt} - d \cdot \left(\int\limits_0^1 v_2(t,x)\, dx - v_3\right) - \\ - u(t) \cdot (E - v_3), \\ \dfrac{d v_4}{dt} - v_1(t,1) - A \cdot \int\limits_0^1 [v_2^* - v_2]_+^2\, dx, \end{cases} \qquad v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} .$$

При этом функции v_1, v_2, v_3, v_4 удовлетворяют следующим условиям:

$$a \cdot \frac{\partial v_1(t,0)}{\partial x} - v_1(t,0) = -1 ; \qquad \frac{\partial v_1(t,1)}{\partial x} = 0 ;$$

$$b \cdot \frac{\partial v_2(t,0)}{\partial x} - v_2(t,0) = -1 ; \qquad \frac{\partial v_2(t,1)}{\partial x} = 0 ;$$

$$v_1(0,x) = v_{10}(x) ; \quad v_2(0,x) = v_{20}(x) ;$$

$$v_3(0) = v_{30} ; \quad v_4(0) = 0 .$$

Оператор $F(v,u)$ рассмотрим в пространстве

$$\mathcal{D}(F) = W_2^{1,2}(Q) \times W_2^{1,2}(Q) \times W_2^1[0,T] \times W_2^1[0,T] \times L_2[0,T] .$$

Л е м м а 4. 1. Для оператора $F(v,u)$ производная Фреше $F_v'(v^0; u^0)$ имеет вид

$$F_v'(v^0; u^0) w = \begin{cases} \dfrac{\partial w_1}{\partial t} - a \cdot \dfrac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \dfrac{\partial w_1}{\partial x} + c f(v_2^0) \cdot w_1 + \\ + c v_1^0 \cdot \dfrac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2} \cdot w_2 , \end{cases}$$

$$
F'_v(v^\circ; u^\circ)w = \begin{cases} \dfrac{\partial w_2}{\partial t} - b\cdot \dfrac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial w_2}{\partial x} - K f(v_2^\circ)\cdot w_1 + \\ + \left(g - K v_1^\circ \cdot \dfrac{\partial f(v_2^\circ)}{\partial v_2}\right)\cdot w_2 - g\cdot w_3, \\ \dfrac{dw_3}{dt} - d\left(\int\limits_0^1 w_2(t,x)\,dx - w_3\right) + u^\circ\cdot w_3, \\ \dfrac{\partial w_4}{dt} - w_1(t,1) - A\cdot\int\limits_0^1 \dfrac{\partial \Phi(v_2^\circ)}{\partial v_2}\cdot w_2(t,x)\,dx. \end{cases}
$$

Функции $w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$ удовлетворяют условиям

$$
a\cdot\frac{\partial w_1(t,0)}{\partial x} - w_1(t,0) = 0; \qquad \frac{\partial w_1(t,1)}{\partial x} = 0;
$$

$$
b\cdot\frac{\partial w_2(t,0)}{\partial x} - w_2(t,0) = 0; \qquad \frac{\partial w_2(t,1)}{\partial x} = 0;
$$

$$
w_1(0,x) = 0; \quad w_2(0,x) = 0; \quad w_3(0) = 0; \quad w_4(0) = 0,
$$

$$
\mathcal{D}(F'_v(v^\circ; u^\circ)) = V_1 \cap \{\text{граничные и начальные условия}\}.
$$

2. Производная Фреше линейного функционала $T_0(v) = v_4(T)$ есть этот же функционал $T_0(w) = w_4(T)$.

Нетрудно заметить, что $F'_v(v^\circ; u^\circ)\,w$ является сужением оператора $S_0(w)$ (т.е. $F'_v(v^\circ; u^\circ) \subset S_0$). Соотношение (39) в области $\mathcal{D}(F'_v(v^\circ, u^\circ))$ принимает вид

$$
T_0 - Q_0 F'_v(v^\circ, u^\circ) = 0. \tag{40}
$$

Введем в рассмотрение функционал (лагранжиан)

$$
L(v,u) = T_0(v) - Q_0 F(v,u),
$$

где $\quad J(u) = v_4(T) = T_0(v(u))$.

Используя функции $-\psi_1^\circ, -\psi_2^\circ, -\psi_3^\circ, -\psi_4^\circ$, полученные по теореме Рисса для функционала Q_0, лагранжиан L можно записать в следующем виде:

$$
L(v,u) = v_4(T) + \iint\limits_Q \psi_1^\circ(t,x)\cdot\left[\frac{\partial v_1}{\partial t} - a\cdot\frac{\partial^2 v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial x} + \right.
$$

$$
\left. + c\,v_1 f(v_2)\right] dx\,dt + \iint\limits_Q \psi_2^\circ(t,x)\left[\frac{\partial v_2}{\partial t} - b\cdot\frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \right.
$$

$$
\left. + \frac{\partial v_2}{\partial x} - K v_1 f(v_2) - g\cdot(v_3 - v_2)\right] dx\,dt +
$$

$$\int_0^T \psi_3^0(t)\cdot\left[\frac{dv_3}{dt} - d\cdot\left(\int_0^1 v_2(t,x)\,dx - v_3\right) - u(t)\cdot(E - v_3)\right]dt +$$

$$+\int_0^T \psi_4^0(t)\cdot\left[\frac{dv_4}{dt} - v_1(t,1) - A\cdot\int_0^1 [v_2^* - v_2]_+^2\,dx\right]dt\,. \tag{41}$$

В силу формулы (40) имеем

$$L'_v(v^0, u^0)\,w = T_0(w) - Q_0 F'_v(v^0, u^0)\,w = 0\,.$$

Или в подробной записи

$$L'_v(v^0,u^0)\,w = w_4(T) + \iint_Q \psi_1^0\left[\frac{\partial w_1}{\partial t} - a\cdot\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + \frac{\partial w_1}{\partial x} + cf(v_2^0)\,w_1 +\right.$$

$$\left.+\,cv_1^0\frac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2}\cdot w_2\right]dx\,dt + \iint_Q \psi_2^0\cdot\left[\frac{\partial w_2}{\partial t} - b\cdot\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + \frac{\partial w_2}{\partial x} - Kf(v_2^0)\,w_1 +\right.$$

$$\left.+\left(g - Kv_1^0\frac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2}\right)w_2 - g\cdot w_3\right]dx\,dt + \int_0^T \psi_3^0\cdot\left[\frac{dw_3}{dt} - d\left(\int_0^1 w_2(t,x)\,dx -\right.\right.$$

$$\left.\left. - w_3\right) + u^0\cdot w_3\right]dt + \int_0^T \psi_4^0\cdot\left[\frac{dw_4}{dt} - w_1(t,1) -\right.$$

$$\left. - A\cdot\int_0^1 \frac{\partial\Phi(v_2^0)}{\partial v_2}\cdot w_2(t,x)\,dx\right]dt = 0\,. \tag{42}$$

Нас интересуют решения уравнения $F'_v(v^0, u^0)\,w = \omega$ (при $\omega^T = (0,0,(E - v_3^0)\cdot\Delta u, 0)$), которые принадлежат $C^{2,\alpha}(Q)\times$ $\times\, C^{2,\alpha}(Q)\times W_2^1[0,T]\cdot C^1[0,T]$. Поэтому теперь оператор $F'_v(v^0, u^0)w$ рассматриваем на $C^{2,\alpha}(Q)\times C^{2,\alpha}(Q)\times W_2^1[0,T]\times C^1[0,T]$, причем чтобы $w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$ удовлетворяли граничным и начальным условиям.

Далее, интегрируя по частям соотношение (42) и используя соответствующие граничные и начальные условия для $w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4$, получаем

$$L'_v(v^0, u^0)\,w = \iint_Q w_1\cdot\left[-\frac{\partial\psi_1^0}{\partial t} - a\cdot\frac{\partial^2\psi_1^0}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi_1^0}{\partial x} + c\psi_1^0 f(v_2^0) -\right.$$

$$\left. - K\psi_2^0 f(v_2^0)\right]dx\,dt + \iint_Q w_2\cdot\left[-\frac{\partial\psi_2^0}{\partial t} - b\cdot\frac{\partial^2\psi_2^0}{\partial x^2} - \frac{\partial\psi_2^0}{\partial x} + \psi_2^0\cdot\left(g -\right.\right.$$

$$\left.\left. - Kv_1^0\cdot\frac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2}\right) + cv_1^0\cdot\frac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2}\cdot\psi_1^0 - d\cdot\psi_3^0 - \psi_4^0\cdot A\cdot\frac{\partial\Phi(v_2^0)}{\partial v_2}\right]dx\,dt +$$

$$+\int_0^T w_3\cdot\left[-\frac{d\psi_3^0}{dt}-g\cdot\int_0^1\psi_2^0(t,x)\,dx+(d+u^0)\,\psi_3^0\right]dt+$$

$$+\int_0^T(-w_4)\cdot\frac{d\psi_4}{dt}\,dt+\int_0^1\psi_1^0(T,x)\cdot w_1(T,x)\,dx+$$

$$+\int_0^1\psi_2^0(T,x)\,w_2(T,x)\,dx+\psi_3^0(T)\cdot w_3(T)+\left(1+\psi_4^0(T)\right)\cdot w_4(T)-$$

$$-a\cdot\int_0^T\frac{\partial\psi_1^0(t,0)}{\partial x}\cdot w_1(t,0)\,dt-b\cdot\int_0^T\frac{\partial\psi_2^0(t,0)}{\partial x}\cdot w_2(t,0)\,dt+$$

$$+\int_0^T w_1(t,1)\cdot\left[-\psi_4^0(t)+a\cdot\frac{\partial\psi_1^0(t,1)}{\partial x}+\psi_1^0(t,1)\right]dt+$$

$$+\int_0^T w_2(t,1)\cdot\left[b\cdot\frac{\partial\psi_2^0(t,1)}{\partial x}+\psi_2^0(t,1)\right]dt=0\,. \tag{43}$$

Отсюда следует, что в силу произвольности $w\in\mathcal{D}(F_v'(v^0;u^0))$ функции $\psi_1^0,\ \psi_2^0,\ \psi_3^0,\ \psi_4^0,$ удовлетворяют соотношениям:

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{\partial\psi_1^0}{\partial t}-a\cdot\frac{\partial^2\psi_1^0}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi_1^0}{\partial x}+\left(c\,\psi_1^0-k\,\psi_2^0\right)f(v_2^0)=0;\\
&-\frac{\partial\psi_2^0}{\partial t}-b\cdot\frac{\partial^2\psi_2^0}{\partial x^2}-\frac{\partial\psi_2^0}{\partial x}+\left(c\,\psi_1^0-k\,\psi_2^0\right)v_1^0\cdot\frac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2}+\\
&+g\cdot\psi_2^0-d\cdot\psi_3^0-A\cdot\frac{\partial\Phi(v_2^0)}{\partial v_2}\cdot\psi_4^0=0;\\
&-\frac{d\psi_3^0}{dt}-g\cdot\int_0^1\psi_2^0(t,x)\,dx+(d+u^0)\,\psi_3^0=0;\\
&-\frac{d\psi_4^0}{dt}=0;
\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

с граничными

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\psi_1^0(t,0)}{\partial x}=0; \qquad a\cdot\frac{\partial\psi_1^0(t,1)}{\partial x}+\psi_1^0(t,1)=\psi_4^0(t);\\
&\frac{\partial\psi_2^0(t,0)}{\partial x}=0; \qquad b\cdot\frac{\partial\psi_2^0(t,1)}{\partial x}+\psi_2^0(t,1)=0
\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

и начальными условиями:

$$\psi_1^0(T,x)=0;\ \psi_2^0(T,x)=0;\ \psi_3(T)=0;\ \psi_4^0(T)=-1. \tag{46}$$

Таким образом, мы показали, что функции $\psi_1^0,\ \psi_2^0,\ \psi_3^0,\ \psi_4^0$ являются множителями Лагранжа и находятся как решения задачи (44)-(46).

Замечание: Сопоставляя задачу (25)-(27) при $\varepsilon=0$ и задачу (44)-(46), видим, что $\bar\psi_i^0=\psi_i^0\ (i=\overline{1,4})$, следовательно, имеем $\|\bar\psi_i^\varepsilon-\psi_i^0\|_{1,2;2}\to 0$, $\|\bar\psi_3^\varepsilon-\psi_3^0\|_C\to 0$ при $\varepsilon\to 0\ (i=1;2)$.

§ 7. Первая вариация функционала

Вернемся к формуле (22) приращения функционала

$$\Delta J=-\int_0^T \psi_3^\varepsilon(t)\cdot(E-v_3^0(t))\,\Delta u(t)\,dt. \tag{22}$$

По определению управления $u^\varepsilon(t)$, приращение Δu отлично от нуля лишь на интервале Δ_ε, поэтому

$$\Delta J=-\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon\beta}\psi_3^\varepsilon(t)\cdot(E-v_3^0(t))\,\Delta u(t)\,dt \qquad (\text{при } \beta\geqslant 0),$$

$$\Delta J=-\int_{t_0+\varepsilon\beta}^{t_0}\psi_3^\varepsilon(t)\cdot(E-v_3^0(t))\,\Delta u(t)\,dt \qquad (\text{при } \beta<0).$$

Запишем ΔJ в виде

$$\Delta J=-\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon\beta}\psi_3^0(t)\cdot(E-v_3^0(t))\cdot\Delta u(t)\,dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon\beta}\Delta u(t)\cdot(E-v_3^0)\cdot(\psi_3^0(t)-\psi_3^\varepsilon(t))\,dt. \qquad (\beta\geqslant 0).$$

Для случая $\beta<0$ представление ΔJ проводится аналогично случаю $\beta\geqslant 0$. Покажем, что последний интеграл стремится к нулю при $\varepsilon\to 0$. Для этого, используя (34), запишем его в виде:

$$\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon\beta}\Delta u(t)\cdot(E-v_3^0)\cdot(\psi_3^0(t)-\psi_3^\varepsilon(t))\,dt=\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon\beta}\Delta u\cdot(E-v_3^0)\cdot(\psi_3^0-\bar\psi_3^\varepsilon)\,dt+$$
$$+\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon\beta}\Delta u\cdot(E-v_3^0)\cdot(\bar\psi_3^\varepsilon-\psi_3^\varepsilon)\,dt=\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon\beta}\Delta u\cdot(E-v_3^0)\cdot(\psi_3^0-\bar\psi_3^\varepsilon)\,dt.$$

Теперь

$$\left|\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon\beta} \Delta u(t)\cdot(E-v_3^0)\cdot(\psi_3^0-\bar{\psi}_3^\varepsilon)\,dt\right| \le 2\cdot u_0\cdot \int_{t_0}^{t_0+\varepsilon\beta} |(E-v_3^0)\cdot(\psi_3^0-\bar{\psi}_3^\varepsilon)|\,dt.$$

Функция $(E-v_3^0)\cdot(\psi_3^0-\bar{\psi}_3^\varepsilon)$ непрерывна, поэтому, используя теорему о среднем, получаем

$$2\cdot u_0\cdot\int_{t_0}^{t_0+\varepsilon\beta} |(E-v_3^0)\cdot(\psi_3^0-\bar{\psi}_3^\varepsilon)|\,dt = 2u_0\,\beta\cdot\varepsilon\cdot\left|(E-v_3^0(\tau))\cdot(\psi_3^0(\tau)-\bar{\psi}_3^\varepsilon(\tau))\right|.$$

(где $t_0 \le \tau \le t_0+\varepsilon\cdot\beta$).

В силу сходимости $\bar{\psi}_3^\varepsilon(t)\to\bar{\psi}_3^0(t)$ по норме $C[0,T]$, имеем $|(E-v_3^0)\cdot(\psi_3^0-\bar{\psi}_3^\varepsilon)|_{t=\tau}\to 0$ при $\varepsilon\to 0$. Далее воспользуемся формулой [4, с. 87]:

$$\int_{t_0+p\cdot\varepsilon}^{t_0+q\cdot\varepsilon} Q(t,u(t))\,dt = \varepsilon\cdot(q-p)\cdot Q(t_0,u(t_0)) + o(\varepsilon),$$

где $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}=0$, $Q(t,u)$ – непрерывная функция; $u(t)$ – измеримая ограниченная функция. Получим

$$-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\psi_3^0(t_0)\cdot(E-v_3^0(t_0))\cdot\Delta u(t_0)\cdot|\beta|\cdot\varepsilon}{\varepsilon}+$$

$$+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\cdot\int_{t_0}^{t_0+\beta\cdot\varepsilon}\Delta u\cdot(E-v_3^0)\cdot(\psi_3^0-\bar{\psi}_3^\varepsilon)\,dt=$$

$$=-\psi_3^0(t_0)\cdot(E-v_3^0(t_0))\cdot\Delta u(t_0)\cdot|\beta|.$$

Обозначим

$$\delta J=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Delta J}{\varepsilon},\quad H(v,u,\psi)=(E-v_3(t))\cdot u(t)\cdot\psi_3(t).$$

Выражение $\delta J=-\psi_3^0\cdot(E-v_3^0)\cdot\Delta u\cdot|\beta|$ назовем первой вариацией функционала J. Для того чтобы управление $u^0(t)$ было оптимальным, необходимо

$$\delta J=-(E-v_3^0)\cdot\psi_3^0\cdot\Delta u\cdot|\beta| = H(v^0,u^0,\psi^0)-H(v^0,\bar{u},\psi^0)\cdot|\beta|\ge 0. \quad (47)$$

Итак, доказана

Теорема 1. (Принцип максимума Л.С.Понтрягина.) Пусть процесс $v_1^0(t,x),\ v_2^0(t,x)\in C^{2,\alpha}(Q)$, $v_3^0(t)\in W_2^1(0,T)$, $u^0(t)\in U_0$ (при $(t,x)\in Q$) является оптимальным. Тогда существуют такие ненулевые функции

$$\psi_1^0(t,x),\ \psi_2^0(t,x) \in W_2^{1,2}(Q),\ \psi_3^0(t) \in W_2^1[0,T],$$

что:

1) функции ψ_1^0, ψ_2^0, ψ_3^0 являются множителями Лагранжа в лагранжиане (41);

2) функции ψ_1^0, ψ_2^0, ψ_3^0 являются решением задачи (44)-(46);

3) почти при всех t из $[0,T]$ функция $H(v^0, u, \psi^0)$ достигает максимума по u при $u = u^0(t)$:

$$H(v^0; u^0, \psi^0) = \max_{\bar{u} \in U_0} H(v^0; \bar{u}, \psi^0). \tag{48}$$

§ 8. Доказательство лемм

При выводе необходимого условия оптимальности нами были сформулированы леммы 1–3. Чтобы не доказывать эти леммы по отдельности, рассмотрим более общую линейную систему и для нее докажем теорему существования, единственности и оценку решения.

Рассмотрим линейную систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial w_1}{\partial t} = a\cdot\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} + a_{11}\cdot\frac{\partial w_1}{\partial x} + a_{12}(t,x)\cdot w_1 + a_{13}(t,x) w_2 + \varphi_1(t,x);\\
&\frac{\partial w_2}{\partial t} = b\cdot\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} + a_{21}\cdot\frac{\partial w_2}{\partial x} + a_{22}(t,x)\cdot w_1 + a_{23}(t,x) w_2 +\\
&\qquad + a_{24}\cdot w_3(t) + \varphi_2(t,x);\\
&\frac{dw_3}{dt} = a_{31}\cdot\int_0^1 w_2(t,x)\,dx + a_{32}(t)\cdot w_3 + \varphi_3(t)
\end{aligned}\right\} \tag{49}$$

с граничными

$$\left.\begin{aligned}
&a\cdot\frac{\partial w_1(t,0)}{\partial x} - b_{11} w_1(t,0) = b_{12};\quad a\cdot\frac{\partial w_1(t,1)}{\partial x} + b_{13}\cdot w_1(t,1) = b_{14};\\
&b\cdot\frac{\partial w_2(t,0)}{\partial x} - b_{21}\cdot w_2(t,0) = b_{22};\quad b\cdot\frac{\partial w_2(t,1)}{\partial x} + b_{23}\cdot w_2(t,1) = b_{24};
\end{aligned}\right\} \tag{50}$$

и начальными условиями:

$$w_1(0,x) = b_{31}(x);\ w_2(0,x) = b_{32}(x);\ w_3(0) = b_{33}, \tag{51}$$

где

$a,\ b,\ a_{24},\ a_{31}$ – положительные постоянные,

$a_{12}(t,x),\ a_{13}(t,x),\ a_{22}(t,x),\ a_{23}(t,x) \in C^{0,\alpha}(Q)$,

a_{32} – ограниченная, измеримая функция, $b_{11},\ b_{21}$, $b_{13},\ b_{23}$ – неотрицательные числа, $a_{11},\ a_{21},\ b_{12},\ b_{22}$, $b_{14},\ b_{24},\ b_{33}$ – постоянные числа.

Введем обозначения:

$$w=\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix},\ a_0=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix},\ a_1=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{21} \end{pmatrix},\ a_2=\begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

$$\varphi=\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},\ a_3=\begin{pmatrix} 0 \\ a_{24} \end{pmatrix},\ b_1=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 \\ 0 & b_{21} \end{pmatrix},\ b_2=\begin{pmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{pmatrix},\ b_3=\begin{pmatrix} b_{13} & 0 \\ 0 & b_{23} \end{pmatrix},$$

$$b_4=\begin{pmatrix} b_{14} \\ b_{24} \end{pmatrix},\ b_5=\begin{pmatrix} b_{31} \\ b_{32} \end{pmatrix},\ a_0^{-1}=\begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}.$$

Задачу (49)-(51) можно записать в виде:

$$\left.\begin{aligned} &-\mathcal{D}_t w+\sum_{k=0}^{2} a_k \mathcal{D}_x^{2-k} w + a_3 w_3+\varphi=0; \\ &-\mathcal{D}_t w_3 + a_{31}\cdot\int_0^1 w_2(t,x)\,dx + a_{32}\cdot w_3+\varphi_3=0; \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

$$\left.\begin{aligned} &a_0\mathcal{D}_x w(t,0)-b_1 w(t,0)=b_2; \\ &a_0\mathcal{D}_x w(t,1)+b_3 w(t,1)=b_4; \end{aligned}\right\} \tag{53}$$

$$w(0,x)=b_5(x);\quad w_3(0)=b_{33}. \tag{54}$$

Предположим, что выполнены условия согласования

$$(a_0\mathcal{D}_x b_5(x)-b_1\cdot b_5(x))_{x=0}=b_2;\ (a_0\mathcal{D}_x b_5(x)+b_3 b_5(x))_{x=1}=b_4. \tag{55}$$

Т е о р е м а 2. Пусть $a_2(t,x)\in C^{0,\alpha}(Q)$, $b_5(x)\in W_2^1[0,1]$ и выполняются условия (55). Тогда для любых $\varphi_1,\ \varphi_2\in L_2(Q)$, $\varphi_3\in L_2[0,T]$ решение задачи (49)-(51) существует, единственно, принадлежит V_1 и справедлива оценка

$$\|w\|_{1,2;2}+\|w_3\|_{W_2^1}\le C_5\cdot\Big(\sum_{i=1}^{3}\|\varphi_i\|_{L_2}+\sum_{i=1}^{2}\|b_{3i}\|_{W_2^1}+1\Big), \tag{56}$$

где C_5 зависит лишь от данных задачи.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем, используя теорему Лере-Шаудера.

Рассмотрим семейство уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\mathcal{L}_\tau w \equiv -\mathcal{D}_t w + a_0 \mathcal{D}_x^2 w + a_1 \mathcal{D}_x w + a_2 w = -\tau \cdot a_3 - w_3 - \varphi; \\ &-\mathcal{D}_t w_3 + a_{31} \cdot \int_0^1 w_2(t,x)\,dx + a_{32} w_3 + \varphi_3 = 0 \end{aligned}\right\} \tag{57}$$

(где $0 \le \tau \le 1$) с граничными и начальными условиями (53)-(54). Для задачи (57), (53), (54) получим оценку (56), где константа C_5 не зависит от $\tau,\ w_1,\ w_2,\ w_3,$ а зависит лишь от данных задачи.

Применяя [3] к векторному уравнению системы (57) с соответствующими краевыми и начальными условиями, получим оценку

$$\|w\|_{1,2;2} \le const \cdot \Big(\sum_{i=1}^{2} \|\varphi_i\|_{L_2} + \|\tau \cdot w_3\|_{L_2} + \sum_{i=1}^{2} \|b_{3i}\|_{W_2^1} + 1\Big). \tag{58}$$

Известны неравенства

$$\|w_2\|_C \le |w_2|_{0,\alpha} \le const \cdot \|w_2\|_{1,2;2};$$

$$\|\tau \cdot w_3\|_{L_2} \le \|w_3\|_{L_2} \le const \cdot \|w_3\|_C .$$

Теперь из неравенства (58) и последних двух неравенств имеем

$$\|w_2\|_C \le const \cdot \Big(\sum_{i=1}^{2} \|\varphi_i\|_{L_2} + \|w_3\|_C + \sum_{i=1}^{2} \|b_{3i}\|_{W_2^1} + 1\Big). \tag{59}$$

Третье уравнение системы (57) запишем в виде

$$w_3(t) = b_{33} + \int_0^t \Big[a_{31} \cdot \int_0^1 w_2(s,x)\,dx + a_{32}(s) \cdot w_3(s) + \varphi_3(s)\Big]\,ds .$$

Отсюда имеем

$$|w_3(t)| \le |b_{33}| + \int_0^t \Big[a_{31} \cdot \int_0^1 \|w_2\|_{C[0,s;\,0,1]}\,dx +$$

$$+ |a_{32}(s)| \cdot \|w_3(s)\|_{C[0,s]} + |\varphi_3(s)|\Big]\,ds. \tag{60}$$

Используя неравенство (59), из последнего неравенства получим

$$\|w_3(t)\|_{C[0,t]} \le const \cdot \Big(\sum_{i=1}^{3} \|\varphi_i\|_{L_2} + \sum_{i=1}^{2} \|b_{3i}\|_{W_2^1} + 1\Big) +$$

$$+ const \cdot \int_0^t \|w_3\|_{C[0,s]}\, ds,$$

и, по неравенству Гронуолла

$$\|w_3(t)\|_{C[0,t]} \le const\cdot\Big(\sum_{i=1}^{3}\|\varphi_i\|_{L_2}+\sum_{i=1}^{2}\|b_{3i}\|_{W_2^1}+1\Big).$$

Тогда, очевидно,

$$\|w\|_{1,2;2} \le const\cdot\Big(\sum_{i=1}^{3}\|\varphi_i\|_{L_2}+\sum_{i=1}^{2}\|b_{3i}\|_{W_2^1}+1\Big). \qquad (61)$$

Далее, имеем $\|w_3\|^2_{W_2^1} = \|w_3\|^2_{L_2}+\Big\|\dfrac{dw_3}{dt}\Big\|^2_{L_2}$.

Справедливы неравенства

$$\|w_3\|_{L_2} \le const\cdot\|w_3\|_C \le const\cdot\Big(\sum_{i=1}^{3}\|\varphi_i\|_{L_2}+\sum_{i=1}^{2}\|b_{3i}\|_{W_2^1}+1\Big),$$

$$\Big\|\frac{dw_3}{dt}\Big\|_{L_2} \le const\cdot\Big(\sum_{i=1}^{3}\|\varphi_i\|_{L_2}+\sum_{i=1}^{2}\|b_{3i}\|_{W_2^1}+1\Big).$$

Отсюда

$$\|w_3\|_{W_2^1} \le const\cdot\Big(\sum_{i=1}^{3}\|\varphi_i\|_{L_2}+\sum_{i=1}^{2}\|b_{3i}\|_{W_2^1}+1\Big). \qquad (62)$$

Из неравенств (61) и (62) получаем искомую оценку (56).

Теперь докажем единственность решения задачи (49)-(51). Допустим, что задача (49)-(51) имеет два решения: w_1, w_2, w_3 и $\bar w_1, \bar w_2, \bar w_3$. Рассмотрим разность решений $z_i = w_i - \bar w_i$ $(i=\overline{1,3})$. Тогда для z_i неравенство (56) примет вид $\|z_1\|_{1,2;2}+\|z_2\|_{1,2;2}+\|z_3\|_{W_2^1}\le 0$. Отсюда имеем единственность решения.

Теперь перейдем к доказательству существования решения. Рассмотрим банахово пространство B функций $w(t,x)$ на Q, $B\subset C(Q)$. Для каждого $w^T=(w_1,w_2)\in B$ и $\tau\in[0,1]$ построим решение $W(t,x)=V(w,\tau)$ линейной системы

$$-\mathcal{D}_t W + a_0\mathcal{D}_x^2 W + a_1\mathcal{D}_x W + a_2 W + \varphi = -\tau\cdot a_3\cdot w_3, \qquad (63)$$

удовлетворяющее условиям (53)-(54), где

$$w_3(t)=\Big\{b_{33}+\int_0^t\Big[\Big(a_{31}\cdot\int_0^1 w_2(\tau,x)\,dx+$$

$$+\varphi_3(\tau))\cdot e^{-\int_0^\tau a_{32}(s)\,ds}\Big]d\tau\Big\}\cdot e^{\int_0^t a_{32}(\tau)\,d\tau}$$

решение второго уравнения системы (57).

Решение $W(t,x)$ линейной системы (63) существует [3], и $W(t,x)\in W_2^{1,2}(Q)$. Проверим выполнимость условий теоремы Лере-Шаудера.

1. При $\tau=0$ уравнения последней системы имеют единственное решение.

2. Рассмотрим шар $I_z=\{w\in B,\ \|w\|_C\le z\}$. Покажем вполне непрерывность оператора $V(w,\tau)$ при $\forall\tau\in[0,1]$. Для каждого $w\in I_z$ имеем решение $W(t,x)\in W_2^{1,2}(Q)$. Покажем, что $\|W\|_{1,2;2}\le c_1(z)$.

Для системы (63) с соответствующими граничными и начальными условиями, по известной теореме [3], имеем

$$\|W\|_{1,2;2}\le c_2\cdot\big[\|w_3\|_{L_2}+\|\varphi\|_{L_2}+\|b_5\|_{W_2^1}+1\big]$$

или

$$\|W\|_{1,2;2}\le c_3\cdot\big[\|w_3\|_C+\|\varphi\|_{L_2}+\|b_5\|_{W_2^1}+1\big].$$

Рассмотрим третье уравнение системы (57):

$$w_3(t)=b_{33}+\int_0^t\Big[a_{31}\cdot\int_0^1 w_2(s,x)\,dx+a_{32}(s)\cdot w_3(s)+\varphi_3(s)\Big]ds.$$

Отсюда

$$|w_3(t)|\le(|b_{33}|+a_{31}\cdot T\cdot z)+const\cdot\int_0^t|w_3(s)|\,ds+const\cdot\|\varphi_3\|_{L_2},$$

или $|w_3(t)|\le c_4(z)$. Итак, $\|W\|_{1,2;2}\le c_3\cdot[c_4(z)+\|\varphi\|_{L_2}+$ $+\|b_5\|_{W_2^1}+1]$. Обозначим $c_1(z)=c_3\,[c_4(z)+\|\varphi\|_{L_2}+\|b_5\|_{W_2^1}+1]$. Таким образом, оператор $V(w,\tau)$ переводит ограниченное множество I_z в ограниченное множество $\mathbf{I}_z=\{W:\ \|W\|_{1,2;2}\le c_1(z)\}$ пространства $W_2^{1,2}(Q)$, а значит, и в ограниченное множество пространства $C(Q)$. Вложение $W_2^{1,2}(Q)\subset C(Q)$ вполне непрерывно. Это означает, что множество $\mathbf{I}_z$ является компактным в $C(Q)$, следовательно, оператор V переводит ограниченное множество пространства B в компактное множество пространства B, т.е. оператор V вполне непрерывен.

3. Покажем равномерную непрерывность оператора $V(w,\tau)$ на $I_z\times[0,1]$. Рассмотрим функции $w^1,\ w^2\in I_z$. Обозначим $W^j=V(w^j,\tau)$ (где $j=1,2$), $z=W^1-W^2$. Функция z

удовлетворяет уравнению

$$-\mathcal{D}_t z + a_0 \mathcal{D}_x^2 z + a_1 \mathcal{D}_x z + a_2 z = -\tau \cdot a_3 \cdot (w_3^1 - w_3^2) .$$

Имеем [3]

$$\| z \|_{1,2;2} \le const \cdot \| w_3^1 - w_3^2 \|_{L_2} ,$$

$$\| z \|_{1,2;2} \le const \, \| w_3^1 - w_3^2 \|_C .$$

Из третьего уравнения системы (57) найдем

$$w_3^1 - w_3^2 = \int_0^t [a_{31} \cdot \int_0^1 (w_2^1(s,x) - w_2^2(s,x))\, dx +$$

$$+ a_{32}(s) \cdot (w_3^1(s) - w_3^2(s))]\, ds .$$

Отсюда

$$| w_3^1 - w_3^2 | \le const \cdot \| w^1 - w^2 \|_C ,$$

$$\| W^1 - W^2 \|_{1,2;2} \le const \, \| w^1 - w^2 \|_C ,$$

$$\| W^1 - W^2 \|_C \le const \cdot \| w^1 - w^2 \|_C .$$

Таким образом, оператор $V(w, \tau)$ равномерно непрерывен по w на $I_\tau \times [0,1]$. Пусть $\tau^1, \tau^2 \in [0,1]$. Обозначим $W^i = V(w, \tau^i)$ $(i = 1; 2)$. Тогда $\| W^1 - W^2 \|_{1,2;2} \le const \, \| w_3 \|_{L_2} \cdot | \tau^1 - \tau^2 |$, т.е. имеем равномерную непрерывность по τ. Разрезая Q по t на достаточно узкие полосы $[0, t_1] \times [0,1], [t_1, t_2] \times [0,1], \dots, [t_{n-1}, t_n] \times$ $\times [0,1]$, где $t_0 = 0$ и $t_n = T$, и, выбирая соответствующим образом τ, можно добиться того, что оператор $W = V(w, \tau)$ будет осуществлять отображение шара I_τ в шар I_τ, т.е. чтобы $C_1(\tau) < \tau$. Тогда для полосы $[t_{i-1}, t_i] \times [0,1]$ будут выполнены все условия теоремы Лере-Шаудера. Следовательно, решение w^i задачи $w = V(w, \tau)$, $\tau \in [0,1]$, в i-й полосе существует. При этом в качестве начальных данных в i-й полосе берем значение решения на верхней границе $(i-1)$-й полосы, а за решение w задачи в области Q можно принять решение, склеенное из соответствующих решений для всех полос, т.е. $w(t,x) = w^i(t,x)$ при $t \in [t_{i-1}, t_i]$ $(i = \overline{1,n})$. Очевидно, что $w \in W_2^{1,2}(Q)$. Единственность решения была доказана выше.

Теорема 2 полностью доказана.

З а м е ч а н и е 1. Доказательство леммы 1 проведем, используя неравенства, рассматривавшиеся в ходе доказательства теоремы 2. Прежде всего для приращений $\Delta v_1, \Delta v_2, \Delta v_3, \Delta v_4, \Delta u$ запишем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\Delta v_1}{\partial t}=a\cdot\frac{\partial^2\Delta v_1}{\partial x^2}-\frac{\partial\Delta v_1}{\partial x}-cf(v_2^1)\cdot\Delta v_1-cv_1^2 f'_{v_2}(v_2^\varepsilon)\cdot\Delta v_2;\\
&\frac{\partial\Delta v_2}{\partial t}=b\cdot\frac{\partial^2\Delta v_2}{\partial x^2}-\frac{\partial\Delta v_2}{\partial x}+Kf(v_2^1)\cdot\Delta v_1+\\
&\qquad+\left(Kv_1^2 f'_{v_2}(v_2^\varepsilon)-g\right)\cdot\Delta v_2+g\cdot\Delta v_3;\\
&\frac{d\Delta v_3}{dt}=d\cdot\left(\int_0^1\Delta v_2(t,x)\,dx-\Delta v_3\right)-u^1\cdot\Delta v_3+\Delta u\cdot(E-v_3^2);\\
&\frac{d\Delta v_4}{dt}=\Delta v_1(t,1)+A\cdot\int_0^1\Phi'_{v_2}(v_2^\varepsilon)\cdot\Delta v_2(t,x)\,dx
\end{aligned}\right\}\qquad(64)$$

с граничными

$$\left.\begin{aligned}
&a\cdot\frac{\partial\Delta v_1(t,0)}{\partial x}-\Delta v_1(t,0)=0; \quad \frac{\partial\Delta v_1(t,1)}{\partial x}=0;\\
&b\cdot\frac{\partial\Delta v_2(t,0)}{\partial x}-\Delta v_2(t,0)=0; \quad \frac{\partial\Delta v_2(t,1)}{\partial x}=0
\end{aligned}\right\}\qquad(65)$$

и начальными условиями:

$$\Delta v_1(0,x)=0,\ \Delta v_2(0,x)=0,\ \Delta v_3(0)=0;\ \Delta v_4(0)=0. \qquad (66)$$

Первые три уравнения задачи (64)-(66) являются частным случаем задачи (49)-(51), поэтому для задачи (64)-(66) из неравенств (59)-(60) имеем

$$\|\Delta v_3(t)\|_{C[0,t]}\le const\cdot\int_0^t\|\Delta v_3(s)\|_{C[0,s]}\,ds+const\cdot\|\Delta u\|_{L_1}.$$

По неравенству Гронуолла имеем

$$\|\Delta v_3(t)\|_{C[0,t]}\le const\cdot\|\Delta u\|_{L_1}.$$

Отсюда

$$\|\Delta v_i\|_{1,2;2}\le const\cdot\|\Delta u\|_{L_1},\ |\Delta v_i|_{0,\alpha}\le const\cdot\|\Delta u\|_{L_1},$$
$$(i=1,2).$$

Можно показать, что $\left\|\frac{d\Delta v_3}{dt}\right\|_{L_1}\le const\cdot\|\Delta u\|_{L_1}$, тогда $\|\Delta v_3\|_W\le const\cdot\|\Delta u\|_{L_1}$. Справедливость неравенства $\|\Delta v_4\|_{C^1}\le$ $\le const\,\|\Delta u\|_{L_1}$ очевидна. Лемма 1 доказана.

З а м е ч а н и е 2. Докажем теперь лемму 2. Первые три уравнения задачи (14)-(16) являются частным случаем задачи (49)-(51), поэтому первые три уравнения задачи (14)-(16) имеют единственное решение W_1,

$w_2 \in W_2^{1,2}$, $w_3 \in W_2^1$ и справедлива оценка

$$\|w_1\|_{1,2;2}+\|w_2\|_{1,2;2}+\|w_3\|_{W_2^1} \le const\cdot \sum_{i=1}^{3}\|\varphi_i\|_{L_2}.$$

Разрешимость четвертого уравнения системы (14) очевидна и $w_4 \in W_2^1$.
Из четвертого уравнения системы (14) имеем

$$w_4(t)=\int_0^t\Big[w_1(s,1)+A\cdot\int_0^1\Phi'_{v_2}(v_2^\varepsilon)\,w_2(s,x)\,dx+\varphi_4(s)\Big]ds.$$

Отсюда

$$\|w_4(t)\|_{L_2}\le const\cdot\sum_{i=1}^{4}\|\varphi_i\|_{L_2}.$$

Также нетрудно получить оценку

$$\Big\|\frac{dw_4}{dt}\Big\|_{L_2}\le const\cdot\sum_{i=1}^{4}\|\varphi_i\|_{L_2}.$$

Отсюда

$$\|w_4\|_{W_2^1}\le const\cdot\sum_{i=1}^{4}\|\varphi_i\|_{L_2}.$$

Лемма 2 доказана.

З а м е ч а н и е 3. Докажем теперь лемму 3. Задача (25)-(27), согласно теореме 2, имеет единственное решение (в чем легко убедиться, заменяя t на $T-t$), справедливы оценки (28), т.е. справедливы утверждения леммы 3. Необходимо отметить, что в задаче (25)-(27) производная $\frac{\partial\bar\psi_1^\varepsilon}{\partial x}$ в точке $x=1$, $t=T$ терпит разрыв. Действительно, в силу (27) имеем $\bar\psi_1^\varepsilon(T,x)=0$ $(0\le x\le 1)$. Тогда

$$\frac{\partial\bar\psi_1^\varepsilon(T,1)}{\partial x}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}}\frac{\bar\psi_1^\varepsilon(T,1-\Delta x)-\bar\psi_1^\varepsilon(T,1)}{\Delta x}=0.$$

Далее, в силу граничного условия (26) имеем $\frac{\partial\bar\psi_1^\varepsilon(T,1)}{\partial x}=-\frac{1}{a}$, т.е. производная $\frac{\partial\bar\psi_1^\varepsilon}{\partial x}$ терпит разрыв при $x=1$, $t=T$.

З а м е ч а н и е 4. Докажем лемму 4. Имеем отображение $F(v,u^0)$: $V_1\longrightarrow V_2$. Рассмотрим разность

$$\frac{1}{\|w\|_{V_1}}\cdot\|F(v_2^0+w,u^0)-F(v^0,u^0)-F'_v(v^0,u^0)\,w\|_{V_2}=$$

$$
= \frac{1}{\|w\|_{V_1}} \cdot \left\| \begin{array}{l} c\cdot\left[w_1\cdot\left(f(v_2^0+w_2)-f(v_2^0)\right)+\right.\\ \left.+\,v_1^0\cdot w_2\cdot\left(f'_{v_2}(v_2^\varepsilon)-\dfrac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2}\right)\right]\\ -\,K\cdot\left[w_1\cdot\left(f(v_2^0+w_2)-f(v_2^0)\right)+\right.\\ \left.+\,v_1^0\cdot w_2\cdot\left(f'_{v_2}(v_2^\varepsilon)-\dfrac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2}\right)\right]\\ -\,A\cdot\displaystyle\int_0^1\left[\Phi'_{v_2}(v_2^\varepsilon)-\dfrac{\partial\Phi(v_2^0)}{\partial v_2}\right]\cdot w_2(t,x)\,dx \end{array} \right\|_{V_2} \le
$$

$$
\le (C+K)\cdot\left\|f(v_2^0+w_2)-f(v_2^0)\right\|_C+(C+K)\cdot\left\|f'_{v_2}(v_2^\varepsilon)-\frac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2}\right\|_C +
$$

$$
+A\cdot\left\|\Phi'_{v_2}(v_2^\varepsilon)-\frac{\partial\Phi(v_2^0)}{\partial v_2}\right\|_C .
$$

Известно неравенство $\|w_2\|_C \le const\cdot\|w_2\|_{1,2;2}$. Поэтому в силу непрерывности функции $f(v_2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial v_2}$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial v_2}$ имеем

$$
\left\|f(v_2^0+w_2)-f(v_2^0)\right\|_C \to 0,\quad \left\|f'_{v_2}(v_2^\varepsilon)-\frac{\partial f(v_2^0)}{\partial v_2}\right\|_C \to 0,
$$

$$
\left\|\Phi'_{v_2}(v_2^\varepsilon)-\frac{\partial\Phi(v_2^0)}{\partial v_2}\right\|_C \to 0
$$

при $\|w\|_{V_1} \to 0$. Лемма 4 доказана.

Поступила в ред.-изд.отдел
14 апреля 1983 г.

Литература

1. Мусабеков К.С. Теоремы существования решения в задаче оптимального управления химическим реактором. - В кн.: Управляемые процессы и оптимизация (Управляемые системы), Новосибирск, 1982, вып. 22, с. 30-50.

2. Плотников В.И., Сумин В.И. Оптимизация объектов с распределенными параметрами, описываемых системами Гурса-Дарбу. - Журн. выч. математики и мат. физики, 1972, т. 12, № 1, с. 61-77.

3. Солонников В.А. О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. - Тр. МИ АН СССР, 1965, т. 83, с. 3-162.

4. Математическая теория оптимальных процессов. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. - М.: Наука, 1969, - с. 384.