Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1984 г., вып. 24

УДК 519.8

О ПОИСКЕ МИНИМУМА ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ

С.Е.Гвоздев

Пусть $f(u)$ – выпуклая функция, имеющая в каждой точке u множества $\mathcal{U}=\{(u_1,u_2)\in R^2 \mid 0\le u_i\le \mu_i,\ i=\overline{1,2}\}\ (0<\mu_i<\infty,\ i=\overline{1,2})$ ограниченный субградиент $\nabla(u)$.

В работе предлагается алгоритм приближенного решения задачи

$$\min_{u\in\mathcal{U}} f(u) \tag{1}$$

и оцениваются отклонение получаемого решения от оптимального и трудоемкость нахождения этого решения.

Обозначим $e_1=(1,0)$, $e_2=(0,1)$, $\Delta(u)$ – множество субградиентов функции $f(u)$ в точке $u\in\mathcal{U}$; пусть

$$\max_{u\in\mathcal{U}}\ \max_{\nabla(u)\in\Delta(u)}\{|e_i\cdot\nabla(u)|\}\le G_i,\quad i=\overline{1,2}.$$

Для каждой точки $u\in\mathcal{U}$ определим множество

$$W(u)=\{(v,w)\in R^3 \mid w=-\nabla(u),\ v=f(u)+u\cdot w,\ \nabla(u)\in\Delta(u)\}$$

(знак "·" означает скалярное произведение).

Покажем, что для $u\in\mathcal{U}$ и $(v,w)\in W(u)$ имеют место следующие свойства:

$$v-u\cdot w=\mathrm{const}, \tag{2}$$

$$v-u\cdot w\ge \bar v-u\cdot\bar w \tag{3}$$

для каждого $(\bar v,\bar w)\in W(\bar u)$, $\bar u\in\mathcal{U}$.

Действительно, свойство (2) следует непосредственно из определения множества $W(u)$. Установим справедливость свойства (3). В самом деле, пусть $u,\bar u\in\mathcal{U}$. Тогда из определения субградиента в точке $\bar u$ имеем $f(u)-f(\bar u)\ge\nabla(\bar u)\cdot(u-\bar u)$, а из определения $W(u)$ получаем $v-u\cdot w-(\bar v-\bar u\cdot\bar w)\ge-\bar w\cdot(u-\bar u)$. Поэтому $v-u\cdot w\ge\bar v-u\cdot\bar w$. Справедливость свойства (3) установлена.

Схема алгоритма $\mathcal{Д}$ решения задачи (1) .

Алгоритм $\mathcal{Д}$ состоит из последовательности однотипных шагов, в каждом шаге происходит обращение к процедуре $\Pi(u_1)$ $(0 \le u_1 \le \mu_1)$. Перед началом работы алгоритма задается 2-вектор $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ такой, что $0 < \delta_i < \mu_i$, $i = \overline{1,2}$.

Опишем работу процедуры $\Pi(u_1)$. Пусть задано число u_1 (вход процедуры $\Pi(u_1)$), K-й шаг $(K = 1, 2, \dots)$ процедуры состоит из следующих пунктов.

1. Определяются величины

$$u_2^{K-1,1} = max\{u_2 \in B_2^{K-1} \mid \ell_2 \cdot w \ge 0\},$$

$$u_2^{K-1,2} = min\{u_2 \in B_2^{K-1} \mid \ell_2 \cdot w < 0\},$$

где B_2^{K-1} $(K \ge 1)$ - множество, образованное на $(K-1)$-м шаге процедуры $\Pi(u_1)$ (B_2^0 полагается равным пустому множеству); w - вторая компонента пары $(v, w) \in W(u_1, u_2)$, причем максимум (минимум) по пустому множеству полагается равным нулю (μ_2) .

2. Критерий останова работы процедуры $\Pi(u_1)$. Если $| u_2^{K-1,2} - u_2^{K-1,1} | \le \delta_2$, то процедура $\Pi(u_1)$ заканчивает работу. Выходом процедуры является множество $\Omega(u) = \{(a, b)\}$, где числа a и b определены следующим образом.

Обозначим $u_2^1 = u_2^{K-1,1}$, $u_2'' = u_2^{K-1,2}$; $u' = (u_1, u_2')$, $u'' = (u_1, u_2'')$; $(v', w') \in W(u')$, $(v'', w'') \in W(u'')$.

Если $(\ell_2 \cdot w')(\ell_2 \cdot w'') < 0$, то определяются числа α_1, $\alpha_2 \ge 0$ из соотношений

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1, \ \ell_2 \cdot (\alpha_1 w' + \alpha_2 w'') = 0 \tag{4}$$

и полагается

$$a = \alpha_1 v' + \alpha_2 v'' - (\alpha_1 u_2' (\ell_2 \cdot w') + \alpha_2 u_2'' (\ell_2 \cdot w''));\tag{5}$$

$$b = \ell_1 \cdot (\alpha_1 w' + \alpha_2 w'').\tag{6}$$

Если $(\ell_2 \cdot w')(\ell_2 \cdot w'') > 0$, то получаем

$$a = \tilde{v} - (\ell_2 \cdot \tilde{u})(\ell_2 \cdot \tilde{w}); \quad b = \ell_1 \cdot \tilde{w},\tag{7}$$

где, по определению,

$$\tilde{v} - \tilde{u} \cdot \tilde{w} = min\{v' - u' \cdot w', \ v'' - u'' \cdot w''\}.$$

Если $\ell_2 \cdot w' = 0$, то полагаем

$$a = v', \quad b = \ell_1 \cdot w'. \tag{8}$$

3. Определяем величину $u_2^K = 1/2\,(u_2^{K-1,2} + u_2^{K-1,1})$, полагая множество B_2^K равным $B_2^{K-1} \cup \{u_2^K\}$, и переходим к $(K+1)$ -му шагу процедуры $\Pi\,(u_1)$.

Описание K -го шага процедуры $\Pi\,(u_1)$ завершено.

Опишем работу алгоритма $Д$, K -й шаг $(K = 1, 2, \ldots)$ которого состоит из следующих пунктов.

1) Определяются величины

$$u_1^{K-1,1} = max\{u_1 \in B_1^{K-1} \mid b \geq 0\},$$

$$u_1^{K-1,2} = min\{u_1 \in B_1^{K-1} \mid b < 0\},$$

где B_1^{K-1} $(K \geq 1)$ -множество, образованное на $(K-1)$ -м шаге алгоритма $Д$ (B_1^0 полагается равным пустому множеству); b - вторая компонента пары (a, b) из множества $\Omega\,(u_1)$, получаемого в результате работы процедуры $\Pi\,(u_1)$; причем максимум (минимум) по пустому множеству полагается равным нулю (μ_1) .

2) Критерий останова работы алгоритма $Д$. Если $|u_1^{K-1,2} - u_1^{K-1,1}| \leq \delta_1$, то алгоритм $Д$ заканчивает работу. Приближенными решениями задачи (1) являются величины $\varphi\,(u_1') = a' - u_1' b'$ и $\varphi\,(u_1'') = a'' - u_1'' b''$, где $(a', b') \in \Omega\,(u_1^{K-1,1})$, $(a'', b'') \in \Omega\,(u_1^{K-1,2})$.

3) Определяем величину $u_1^K = \frac{1}{2}(u_1^{K-1,2} + u_1^{K-1,1})$, полагая множество B_1^K равным $B_1^{K-1} \cup \{u_1^K\}$, и переходим к $(K+1)$ -му шагу алгоритма $Д$.

Описание K -го шага алгоритма $Д$ завершено.

Обоснование алгоритма $Д$

Оценим трудоемкость алгоритма $Д$ и точность решения задачи (1) при помощи этого алгоритма.

Докажем вначале две леммы.

Пусть $\mathcal{U}_1 = \{u \in R \mid 0 \leq u \leq \mu_1\}$; для каждой точки $u_1 \in \mathcal{U}_1$, применив процедуру $\Pi\,(u_1)$, получим множества $\Omega\,(u_1)$, $u_1 \in \mathcal{U}_1$, на множестве $\mathcal{U}_1$ определим функцию $\varphi\,(u_1) = a - u_1 b$, где $(a, b) \in \Omega\,(u_1)$, $u_1 \in \mathcal{U}_1$.

Имеет место

Л е м м а 1. Справедливы следующие свойства множеств $\Omega\,(u_1)$, $u_1 \in \mathcal{U}_1$:

а) $a - u_1 b = const$ для $(a, b) \in \Omega\,(u_1)$;

б) $a - u_1 b + \delta_2 G_2 \geq \bar{a} - u_1 \bar{b}$ для $(\bar{a}, \bar{b}) \in \Omega(\bar{u}_1)$ и любого $\bar{u}_1 \in \mathcal{U}_1$.

Доказательство. Справедливость свойства а) следует сразу же из определения множества $\Omega(u_1)$. Докажем б). Полагая $u_1 \in \mathcal{U}_1$, применим процедуру $\Pi(u_1)$. Напомним обозначения (п. 2 процедуры $\Pi(u_1)$):

$$u_2' = u_2^{k-1,1},\ u_2'' = u_2^{k-1,2};\ u' = (u_1, u_2'),$$

$$u'' = (u_1, u_2'');\ (v', w') \in W(u_1'),\ (v'', w'') \in W(u_1'').$$

Непосредственно из (5)-(8) имеем

$$a - u_1 b \geqslant \tilde{v} - \tilde{u} \cdot \tilde{w}, \tag{9}$$

где

$$\tilde{v} - \tilde{u} \cdot \tilde{w} = \min\{v' - u' \cdot w',\ v'' - u'' \cdot w''\}. \tag{10}$$

Пусть $\hat{u}_1 \in \mathcal{U}_1$ $(\hat{u}_1 \neq u_1)$, применим процедуру $\Pi(\hat{u}_1)$. Обозначим

$$\{(\hat{a}, \hat{b})\} = \Omega(\hat{u}_1);\ \hat{u}_2' = u_2^{k-1,1},\ \hat{u}_2'' = u_2^{k-1,2};\ \hat{u}' = (\hat{u}_1, \hat{u}_2'),$$

$$\hat{u}'' = (\hat{u}_1, \hat{u}_2'');\ (\hat{v}', \hat{w}') \in W(\hat{u}_1'), (\hat{v}'', \hat{w}'') \in W(\hat{u}_1'').$$

Из неравенства (3) следуют соотношения:

$$\tilde{v} - \tilde{u} \cdot \tilde{w} \geqslant \hat{v}' - \tilde{u} \cdot \hat{w}', \tag{11}$$

$$\tilde{v} - \tilde{u} \cdot \tilde{w} \geqslant \hat{v}'' - \tilde{u} \cdot \hat{w}''. \tag{12}$$

Если $(\ell_2 \cdot \hat{w}')(\ell_2 \cdot \hat{w}'') < 0$, то, умножив неравенство (11) на α_1, а неравенство (12) на α_2 (α_1 и α_2 определены соотношениями (4) в результате работы процедуры $\Pi(u_1)$) и сложив соответствующие неравенства, получим:

$$\tilde{v} - \tilde{u} \cdot \tilde{w} \geqslant \alpha_1 \hat{v}' + \alpha_2 \hat{v}'' - \tilde{u} \cdot (\alpha_1 \hat{w}' + \alpha_2 \hat{w}''). \tag{13}$$

Правая часть неравенства (13) может быть представлена в виде

$$\alpha_1 \hat{v}' + \alpha_2 \hat{v}'' - \tilde{u} \cdot (\alpha_1 \hat{w}' + \alpha_2 \hat{w}'') = \hat{a} - u_1 \hat{b} + \alpha_1 u_2' (\ell_2 \cdot \hat{w}') +$$

$$+ \alpha_2 \hat{u}_2'' (\ell_2 \cdot \hat{w}'') - (\ell_2 \cdot \tilde{u})(\ell_2 \cdot (\alpha_1 \hat{w}' + \alpha_2 \hat{w}'')), \tag{14}$$

где, в силу (10), $\ell_2 \cdot \tilde{u}$ равно u_2' либо u_2'', а $\hat{a} = \alpha_1 \hat{v}'$ +

$+\alpha_2\hat{v}''-(\alpha_1\hat{u}_2'(l_2\cdot\hat{w}')+\alpha_2\hat{u}_2''(l_2\cdot\hat{w}''))$ и $\hat{b}=l_1\cdot(\alpha_1\hat{w}'+$ $+\alpha_2\hat{w}'')$.

В случае $l_2\cdot\tilde{u}=u_2'$ имеем

$$\alpha_1 u_2'(l_2\cdot\hat{w}')+\alpha_2\hat{u}_2''(l_2\cdot\hat{w}'')-u_2'(l_2\cdot(\alpha_1\hat{w}'+\alpha_2\hat{w}''))=$$

$$=(\hat{u}_2'-u_2')(l_2\cdot(\alpha_1\hat{w}'+\alpha_2\hat{w}''))+\alpha_2(\hat{u}_2''-\hat{u}_2')(l_2\cdot\hat{w}'').$$

Принимая во внимание, что $l_2\cdot(\alpha_1\hat{w}'+\alpha_2\hat{w}'')=0$, $|\hat{u}_2''-\hat{u}_2'|\leq$ $\leq\delta_2$, $l_2\cdot\hat{w}''\leq G_2$, из (9), (13), (14) получаем справедливость свойства б) леммы 1. Случай $l_2\cdot\tilde{u}=u_2''$ рассматривается аналогично.

Если $(l_2\cdot\hat{w}')(l_2\cdot\hat{w}'')>0$, то обозначим

$$\hat{\tilde{v}}-\hat{\tilde{u}}\hat{\tilde{w}}=min\{\hat{v}'-\hat{u}'\cdot\hat{w}',\ \hat{v}''-\hat{u}''\cdot\hat{w}''\}. \tag{15}$$

Тогда

$$\hat{a}=\hat{\tilde{v}}-(l_2\cdot\hat{\tilde{u}})(l_2\cdot\hat{\tilde{w}}),\ \hat{b}=l_1\cdot\hat{\tilde{w}}. \tag{16}$$

Из (3) следует

$$\tilde{v}-\tilde{u}\cdot\tilde{w}\geq\hat{\tilde{v}}-\tilde{u}\cdot\hat{\tilde{w}}. \tag{17}$$

Воспользовавшись (16) и определением вектора $\tilde{u}$, преобразуем правую часть неравенства (17). Имеем

$$\hat{\tilde{v}}-\tilde{u}\cdot\hat{\tilde{w}}=\hat{a}-u_1\hat{b}+(l_2\cdot\hat{\tilde{u}})(l_2\cdot\hat{\tilde{w}})-(l_2\cdot\tilde{u})(l_2\cdot\hat{\tilde{w}})=$$

$$=\hat{a}-u_1\hat{b}+(l_2\cdot(\hat{\tilde{u}}-\tilde{u}))(l_2\cdot\hat{\tilde{w}}). \tag{18}$$

Оценим снизу величину $(l_2\cdot(\hat{\tilde{u}}-\tilde{u}))(l_2\cdot\hat{\tilde{w}})$. Рассмотрим случай $l_2\cdot\hat{w}'>0$. Тогда из условия $(l_2\cdot\hat{w}')(l_2\cdot\hat{w}'')>0$ следует $l_2\cdot\hat{w}''>0$, а из (15) вытекает $l_2\cdot\hat{\tilde{w}}''>0$. Далее, в силу определения $\hat{u}_2''$, из неравенства $l_2\cdot\hat{w}''>0$ имеем $\hat{u}_2''=\mu_2$, а из $|\hat{u}_2''-\hat{u}_2'|\leq\delta_2$ получаем $\mu_2\geq\hat{u}_2'\geq\mu_2-\delta_2$. Из (15) следует, что $l_2\cdot\hat{\tilde{u}}$ равно $\hat{u}_2''$ либо $\hat{u}_2'$. Поэтому, в силу очевидных соотношений $l_2\cdot\tilde{u}\leq\mu_2$ и $l_2\cdot\hat{w}\leq G_2$, справедливо

$$(l_2\cdot(\hat{\tilde{u}}-\tilde{u}))(l_2\cdot\hat{\tilde{w}})\geq\delta_2 G_2. \tag{19}$$

Таким образом, если $l_2\cdot\hat{w}'>0$, то из (9), (17)-(19) вытекает справедливость свойства б) леммы 1.

В случае $l_2\cdot\hat{w}'<0$ рассуждения аналогичны.

Если $\ell_2 \cdot \hat{w}' = 0$, то, очевидно,

$$\hat{v}' - \tilde{u} \cdot \hat{w}' = \hat{a} - u_1 \hat{b},$$

где $\hat{a} = \hat{v}'$ и $\hat{b} = \ell_1 \cdot \hat{w}'$. Следовательно, из неравенств (9) и (11) получаем $a - u_1 b \geq \hat{a} - u_1 \hat{b}$.

Лемма 1 доказана.

Л е м м а 2. Пусть $u_1', u_1'' \in \mathcal{U}_1, (a', b') \in \Omega(u_1'), (a'', b'') \in \in \Omega(u_1'')$, $|u_1'' - u_1'| \leq \delta_1$. Тогда если

$$\min\{u_1', u_1''\} = 0 \quad \text{и} \quad \max\{b', b''\} \leq 0,$$

либо

$$\max\{u_1', u_1''\} = \mu_1 \quad \text{и} \quad \min\{b', b''\} \geq 0,$$

либо

$$\min\{b', b''\} \leq 0 \quad \text{и} \quad \max\{b', b''\} \geq 0,$$

то

$$\max\{\Phi(u_1''), \Phi(u_1')\} - \min_{u_1 \in \mathcal{U}_1} \Phi(u_1) \leq 2(\delta_1 G_1 + \delta_2 G_2). \tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим случай $\min\{u_1', u_1''\} = 0$ и $\max\{b', b''\} \leq 0$. Пусть $\min\{u_1', u_1''\} = u_1'$ (если $\min\{u_1', u_1''\} = u_1''$, то рассуждения аналогичны), тогда $\Phi(u_1') = \Phi(0) = a'$ и для каждого $u_1 \in \mathcal{U}_1$ имеет место $\Phi(u_1') \leq \leq a' - u_1 b'$. Поэтому, в силу леммы 1, для $(a, b) \in \Omega(u_1)$ справедливо неравенство $a' - u_1 b' \leq a - u_1 b + \delta_2 G_2$, следовательно,

$$\Phi(u_1') - \min_{u_1 \in \mathcal{U}_1} \Phi(u_1) \leq \delta_2 G_2.$$

Оценим разность $\Phi(u_1'') - \Phi(u_1')$. Из определения функции $\Phi(u_1)$, в силу свойства б) леммы 1 и неравенства $|u_1'' - u_1'| \leq \delta_1$ имеем:

$$\Phi(u_1'') - \Phi(u_1') \leq a'' - u_1'' b'' - (a'' - u_1' b'' - \delta_2 G_2) \leq \delta_1 G_1 + \delta_2 G_2.$$

Таким образом, $\max\{\Phi(u_1''), \Phi(u_1')\} - \min_{u_1 \in \mathcal{U}_1} \Phi(u_1) \leq \leq \delta_1 G_1 + 2\delta_2 G_2$, что доказывает неравенство (20).

Рассмотрим случай $\max\{u_1', u_1''\} = \mu_1$ и $\min\{b', b''\} \geq 0$. Пусть $\max\{u_1', u_1''\} = u_1''$ (если $\max\{u_1', u_1''\} = u_1'$, то рассуждения аналогичны), тогда $\Phi(u_1'') = \Phi(\mu_1) = a'' - \mu_1 b'' \leq a'' - u_1 b'' \leq$

$\le a - u_1 b + \delta_2 G_2$ для любого $u_1 \in U_1$, следовательно, $\Phi(u_1'') - \min\limits_{u_1 \in U_1} \Phi(u_1) \le \delta_2 G_2$. Нетрудно проверить, что $\Phi(u_1') - \Phi(u_1'') \le \delta_1 G_1 + \delta_2 G_2$, поэтому

$$\max\{\Phi(u_1'), \Phi(u_1'')\} - \min_{u_1 \in U_1} \Phi(u_1) \le \delta_1 G_1 + 2\delta_2 G_2,$$

что доказывает неравенство (20).

Рассмотрим случай $\min\{b', b''\} \le 0$ и $\max\{b', b''\} \ge 0$. Пусть для определенности $\min\{b', b''\} = b'$ и $\max\{b', b''\} = b''$. Тогда, очевидно, существуют числа $\alpha_1, \alpha_2 \ge 0$ такие, что $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и $\alpha_1 b' + \alpha_2 b'' = 0$. Из леммы 1 и определения функции $\Phi(u_1)$ для любого $u_1 \in U_1$ справедливы неравенства $\Phi(u_1) + \delta_2 G_2 \ge a' - u_1 b'$ и $\Phi(u_1) + \delta_2 G_2 \ge a'' - u_1 b''$. Умножив первое из этих неравенств на α_1, а второе на α_2 и сложив полученные неравенства, с учетом соотношений $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ и $\alpha_1 b' + \alpha_2 b'' = 0$, имеем:

$$\min_{u_1 \in U_1} \Phi(u_1) + \delta_2 G_2 \ge \alpha_1 a' + \alpha_2 a''. \qquad (21)$$

Определим величину

$$\beta = \max\{a' - u_1' b' - (a'' - u_1' b''), a'' - u_1'' b'' - (a' - u_1'' b'), \delta_2 G_2\}.$$

Очевидно, что $a' - u_1' b' - (a' - u_1' b') = 0 \le \beta$ и $a' - u_1' b' - (a'' - u_1' b'') \le \beta$. Умножив первое из этих неравенств на α_1, а второе на α_2 и сложив полученные неравенства, имеем:

$$\alpha_1 a' + \alpha_2 a'' \ge \Phi(u_1') - \beta. \qquad (22)$$

Аналогично показывается, что

$$\alpha_1 a' + \alpha_2 a'' \ge \Phi(u_1'') - \beta. \qquad (23)$$

Оценим сверху величину β. Имеем

$$a' - u_1' b' - (a'' - u_1' b'') = a' - u_1' b' - (a'' - u_1'' b'') + (u_1' - u_1'') b'' \le$$

$$a' - u_1' b' - (a' - u_1' b' - \delta_2 G_2) + (u_1' - u_1'') b'' =$$

$$= (u_1'' - u_1')(b' - b'') + \delta_2 G_2 \le 2\delta_1 G_1 + \delta_2 G_2.$$

Аналогично устанавливается, что

$$a'' - u_1'' b'' - (a' - u_1'' b') \le 2\delta_1 G_1 + \delta_2 G_2.$$

Следовательно, $\beta \le 2\delta_1 G_1 + \delta_2 G_2$. Таким образом, из неравенств (21)-(23) получаем (20). Лемма 2 доказана.

Т е о р е м а 1 (о точности решения задачи (1)). Величины $\Phi(u_1')$ и $\Phi(u_1'')$, получаемые в результате работы алгоритма Δ, являются η-оптимальными решениями задачи (1), где $\eta = 2(\delta_1 G_1 + 2\delta_2 G_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение теоремы эквивалентно проверке справедливости неравенства

$$\max\{\Phi(u_1''), \Phi(u_1')\} - \min_{u\in\mathcal{U}} f(u) \le \eta. \tag{24}$$

Неравенство (24) разобьем на два неравенства:

$$\max\{\Phi(u_1''), \Phi(u_1')\} - \min_{u_1\in\mathcal{U}_1} \Phi(u_1) \le 2(\delta_1 G_1 + \delta_2 G_2), \tag{25}$$

$$\min_{u_1\in\mathcal{U}_1} \Phi(u_1) - \min_{u\in\mathcal{U}} f(u) \le 2\delta_2 G_2. \tag{26}$$

Неравенство (25) следует непосредственно из леммы 2.

Докажем неравенство (26). Заметим, что функция $\mathcal{F}(u_1) = \min_{u_2\in\mathcal{U}_2} f(u_1, u_2)$, где $\mathcal{U}_2 = \{u\in R \mid 0 \le u \le \mu_2\}$, выпукла и определена на множестве $\mathcal{U}_1$. Поэтому в результате работы процедуры $\Pi(u_1)$ получается значение функции $\Phi(u_1) = a - u_1 b\ ((a,b)\in \Omega(u_1))$, удовлетворяющее неравенству

$$\Phi(u_1) - \min_{u_2\in\mathcal{U}_2} f(u_1, u_2) \le 2\delta_2 G_2. \tag{27}$$

Действительно, из выпуклости функции $\mathcal{F}(u_1)$ с помощью рассуждений, аналогичных используемым при доказательстве леммы 2, с заменой величин u_1', u_1'', b', b'', μ_1 величинами u_2', u_2'', $\ell_2\cdot w'$, $\ell_2\cdot w''$, μ_2; множества $\mathcal{U}_1$ - множеством $\mathcal{U}_2$; неравенства $|u_1''-u_1'| \le \delta_1$ - неравенством $|u_2''-u_2'| \le \delta_2$; условий $(a', b')\in \Omega(u_1')$ и $(a'', b'')\in\Omega(u_1'')$ - условиями $(v', w')\in W(u')$ и $(v'', w'')\in W(u_1'')$ соответственно, где $u' = (u_1, u_2')$, $u'' = (u_1, u_2'')$; функции $\Phi(u_1)$ - функцией $f(u_1, u_2)$, в силу свойства (3) (аналог свойства б) леммы 2), получим

$$\max\{v' - u'\cdot w', v'' - u''\cdot w''\} - \min_{u_2\in\mathcal{U}_2} f(u_1, u_2) \le 2\delta_2 G_2.$$

Наконец, нетрудно заметить, что из (4)-(8) и определения функции $\Phi(u_1)$ следует $\max\{v' - u'\cdot w', v'' - u''\cdot w''\} \ge \Phi(u_1)$, что доказывает (27).

Неравенство (27) справедливо для любого $u_1 \in \mathcal{U}_1$, поэтому

$$\min_{u_1 \in \mathcal{U}_1} \Phi(u_1) - \min_{u_1 \in \mathcal{U}_1} \min_{u_2 \in \mathcal{U}_2} f(u_1, u_2) \le 2\delta_2 G_2,$$

но $\min\limits_{u_1 \in \mathcal{U}_1} \min\limits_{u_2 \in \mathcal{U}_2} f(u_1, u_2) = \min\limits_{u \in \mathcal{U}} f(u)$, следовательно, справедливость неравенства (26) установлена, что доказывает теорему 1.

Т е о р е м а 2 (о трудоемкости решения задачи (1)). Априорная оценка числа T точек u множества $\mathcal{U}$, в которых требуется найти элемент множества $W(u)$, для получения η-оптимального решения задачи (1) имеет вид

$$T \sim (\log t)^2, \text{ где } t = \max\{\mu_1, \mu_2, \delta_1^{-1}, \delta_2^{-1}\}, \tag{28}$$

а $\eta = 2(\delta_1 G_1 + 2\delta_2 G_2)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Число шагов алгоритма Δ, достаточных для выполнения п. 2), не превышает $\lceil \log \mu_1/\delta_1 \rceil$ ($\lceil x \rceil$ обозначает наименьшее целое, не меньшее x), а K-й шаг алгоритма Δ требует обращения к процедуре $\Pi(u_1^*)$, для выполнения которой требуется $\lceil \log \mu_2/\delta_2 \rceil$ раз найти элемент множества $W(u)$. Для заданного 2-вектора $\delta = (\delta_1, \delta_2)$ теорема 1 гарантирует получение решения, точность которого не превышает η. Таким образом, общее число T точек u, в которых требуется найти элемент множества $W(u)$, для получения η - оптимального решения задачи (1) имеет вид (28). Теорема 2 доказана.

Пусть ε - любое положительное число. Имеет место следующая

Т е о р е м а 2'. Априорная оценка числа T точек u множества $\mathcal{U}$, в которых требуется найти элемент множества $W(u)$, для получения ε - оптимального решения задачи (1) имеет вид

$$T \sim (\log t)^2, \text{ где } t = \max\{\mu_1, \mu_2, G_1, G_2, \varepsilon^{-1}\}.$$

Действительно, если положить, например, $\delta_1 = \varepsilon/6G_1$, $\delta_2 = \varepsilon/6G_2$, то $\eta = \varepsilon$ и утверждение сформулированной теоремы следует сразу же из теоремы 2.

З а м е ч а н и я. 1. В том виде, как описана схема алгоритма Δ, требуется хранить элементы множеств B_1^{K-1}, $K = 1, 2, \ldots$. Модифицируем схему алгоритма Δ так, чтобы избежать хранения всех элементов множества B_1^{K-1}. С этой целью организуем работу п. 1 K-го шага алгоритма Δ следующим образом:

Если $K = 1$, то величины $u_1^{K-1,1}$, $u_1^{K-1,2}$ полагаются равными нулю и μ_1 соответственно.

Если $K \geq 2$, то, используя результат п. 3 $(K-1)$ -го шага алгоритма $Д$, определяем знак числа b, где $(a, b) \in \Omega(u_1^{K-1})$. Если этот знак положителен, то полагаем $u_1^{K-1,1} = u_1^{K-1}$; $u_1^{K-1,2} = u_1^{K-2,2}$. Если отрицателен, то $u_1^{K-1,1} = u_1^{K-2,1}$; $u_1^{K-1,2} = u_1^{K-1}$. Следовательно, для определения величин $u_1^{K-1,1}$, $u_1^{K-1,2}$ достаточно знать лишь три числа $u_1^{K-2,1}$, $u_1^{K-2,2}$, u_1^{K-1}, которые в дальнейшем уже не потребуются.

Аналогичная модификация может быть проведена и в п. 1 процедуры $П(u_1)$.

2. В описанную схему алгоритма $Д$ можно ввести дополнения, позволяющие найти значения аргументов функции $f(u)$, на которых достигаются получаемые приближенные решения задачи (1).

3. Переход к задаче нахождения минимума выпуклой функции, заданной на произвольном ограниченном m -мерном кубе пространства R^m, не представляет принципиальных трудностей. При этом трудоемкость нахождения приближенного минимума этой функции определяется величиной $\prod_{i=1}^{m} \log t_i$, где t_i - величина, равная отношению длины i -й грани m -мерного куба к числу, задаваемому до начала решения задачи, от значения которого зависит точность получаемого приближенного решения.