Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1983 г., вып. 23.

УДК 519.8

ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНЫЕ ОТСЕЧЕНИЯ В БУЛЕВОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

О.А.Заблоцкая, А.А.Колоколов

В [1-4] для анализа дробных процессов отсечения целочисленного программирования (ЦП) развивается подход, состоящий в исследовании специального разбиения допустимой области соответствующей непрерывной задачи (метод $\mathcal{L}$ - разбиения). В терминах такого разбиения описан класс регулярных отсечений, обеспечивающих конечность алгоритмов, построена верхняя оценка числа требуемых отсечений (в общем случае) и нижняя - для одного класса алгоритмов булева программирования, содержащего, в частности, B -алгоритм [5]. В [1-4] исследуются свойства $\mathcal{L}$ -разбиений ряда задач ЦП.

В настоящей работе вводится в рассмотрение и изучается более широкий по сравнению с [4] класс вполне регулярных отсечений. Устанавливаются необходимые и достаточные условия принадлежности линейного неравенства этому классу. Для процессов, основанных на вполне регулярных отсечениях, получена нижняя оценка числа отсечений, аналогичная оценке в [4]. На основе этой оценки строятся примеры специальных задач ЦП, которые требуют для своего решения большого числа отсечений, экспоненциально растущего вместе с размерностью задачи.

§ 1. Класс отсечений $\mathcal{T}(\bar{x})$

Пусть $Z^{n,s}$ - множество всех n -мерных векторов, у которых первые s координат целые (s фиксировано); $Z^{n,n}=Z^n$. $\mathcal{L}$ -разбиение непустого множества $\Omega \subseteq R^n$ определим следующим образом:

а) каждая точка $z \in Z^n$ образует отдельный класс;

б) нецелочисленные точки x и y эквивалентны, $x \overset{\mathcal{L}}{\sim} y$, если

$$\varphi(x)=\varphi(y),\ [x_{\varphi(x)}]=[y_{\varphi(x)}],\ x_i=y_i,\ i=1,\dots,\varphi(x)-1,$$

где $\varphi(x)=min\{i: x_i \neq [x_i], i=1,\dots,n\}$. Соответствующее фактор-множество обозначим $\Omega/\mathcal{L}$, а его элементы назовем $\mathcal{L}$ -отрезками ($\mathcal{L}$ -классами). Пусть $\mathcal{M}$ и $\mathcal{M}'$-непустые множества из R^n. Будем говорить, что $\mathcal{M}$ лексикографически больше $\mathcal{M}'$, $\mathcal{M} \succ \mathcal{M}'$, если $x \succ x'$ для всех $x \in \mathcal{M}$, $x' \in \mathcal{M}'$. Нетрудно проверить, что для элементов $\Omega/\mathcal{L}$ это отношение является линейным порядком. Если Ω ограничено, то $\Omega/\mathcal{L}$ - конечное множество, которое можно записать в виде $\Omega/\mathcal{L}=\{V_1,\dots,V_p\}$, $V_i \succ V_{i+1}$, $i=1,\dots,p-1$. $\mathcal{L}$-отрезки, состоящие из нецелочисленных точек, называются дробными.

Рассмотрим задачу отыскания лексикографически максимального элемента множества $\Omega \cap Z^{n,s}$, т.е.

$$z^* = lex\,max(\Omega \cap Z^{n,s}), \tag{1}$$

где Ω – выпуклое замкнутое множество из куба

$$B^n = \{x : 0 \le x_i \le 1,\ i = 1,\dots,n\}.$$

Предположим, что $\bar{x} = lex\,max\,\Omega$ и $\bar{x} \bar{\in} Z^{n,s}$. При исследовании двойственных алгоритмов отсечения особый интерес представляет множество $\Omega_* = \{x : x \in \Omega,\ x \succ z$ для всех $z \in \Omega \cap Z^{n,s}\}$, точки которого должны быть непременно отсечены в процессе решения задачи.

Линейное неравенство

$$\sum_{j=1}^{n} \gamma_j x_j \le \gamma_0 \tag{2}$$

с вещественными коэффициентами γ_j, $j = 0,\dots,n$, называется правильным отсечением, если: 1) $(\gamma, \bar{x}) > \gamma_0$; 2) $(\gamma, z) \le \gamma_0$ для всех $z \in \Omega \cap Z^{n,s}$, где $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n)$. Будем говорить, что (2) исключает (отрезает) $\mathcal{L}$-отрезок $V \in \Omega/\mathcal{L}$, если $(\gamma, x) > \gamma_0$ для всех $x \in V$. Правильное отсечение называется регулярным, если оно исключает $\mathcal{L}$-отрезок $V_{\bar{x}} \in \Omega/\mathcal{L}$, содержащий точку $\bar{x}$. Заметим, что регулярные отсечения содержатся в группе отсечений первого алгоритма Гомори [6].

Опишем двойственный дробный процесс отсечения для решения задачи (1).

<u>Процесс $\mathcal{D}$</u>.

0) Полагаем $\Omega^{(1)} = \Omega$, $k = 1$.

1) Находим $x^{(k)} = lex\,max\,\Omega^{(k)}$. Если $x^{(k)} \in Z^{n,s}$ или $\Omega^{(k)} = \emptyset$, то процесс заканчивается. В первом случае получено оптимальное решение задачи (1), во втором случае решения нет.

2) Заменяем $\Omega^{(k)}$ на $\bar{\Omega}^{(k)}$ путем исключения из текущей системы ограничений некоторых отсечений. При этом должно выполняться равенство

$$x^{(k)} = lex\,max\,\bar{\Omega}^{(k)}. \tag{3}$$

3) Строим правильное отсечение $(\gamma^{(k)}, x) \le \gamma_0^{(k)}$.

4) Присоединяем полученное отсечение к ограничениям задачи, полагаем $\Omega^{(k+1)} = \Omega^{(k)} \cap \{x : (\gamma^{(k)}, x) \le \gamma_0^{(k)}\}$, $k := k+1$, и переходим к шагу 1.

Отметим, что поскольку в процессе $\mathcal{D}$ используются правильные отсечения, то для всех k имеет место включение $\Omega \cap Z^{n,s} \subset \Omega^{(k)}$. Условие (3) гарантирует сохранение лексикографической монотонности процесса.

Назовем процесс $\mathcal{D}$ регулярным, если в нем используются только регулярные отсечения.

Введем обозначения:

$$J_+(\bar{x}) = \{j : \bar{x}_j = 1,\ j = 1,\dots,\varphi(\bar{x})-1\},\ J_0(\bar{x}) = \{j : \bar{x}_j = 0,\ j = 1,\dots,\varphi(\bar{x})-1\}.$$

Через $\mathcal{T}(\bar{x})$ обозначим множество линейных неравенств вида (2), коэффициенты которых удовлетворяют условиям:

1) $0 < \gamma_{\varphi(\bar{x})} \le \gamma_k,\ k \in J_+(\bar{x})$;

2) $\gamma_j = 0,\ j = \varphi(\bar{x})+1,\dots,n$;

3) $\gamma_j \le 0,\ j \in J_0(\bar{x})$;

4) $\gamma_0 = \sum\limits_{j \in J_+(\bar{x})} \gamma_j$.

Легко проверить, что в $\mathcal{T}(\bar{x})$ содержатся отсечения B -алгоритма [5]:

$$\sum_{j \in J_+(\bar{x})} x_j - \sum_{j \in J_0(\bar{x})} x_j + x_{\varphi(\bar{x})} \le |J_+(\bar{x})|$$

и его усиление

$$\sum_{j \in J_+(\bar{x})} x_j + x_{\varphi(\bar{x})} \le |J_+(\bar{x})| .$$

Нетрудно показать, что любое неравенство из $\mathcal{T}(\bar{x})$ является регулярным отсечением.

Будем говорить, что регулярное отсечение имеет глубину h, если оно исключает из $\Omega_*/\mathcal{L}$ точно h $\mathcal{L}$ -отрезков. В [4] установлено, что глубина отсечений класса $\mathcal{T}(\bar{x})$ не превышает величины s - числа целочисленных переменных задачи (1).

Процессом T назовем регулярный двойственный процесс отсечения $\mathcal{D}$, в котором на всех итерациях используются только отсечения из класса $\mathcal{T}(x^{(k)})$, где k - номер соответствующей итерации. Пусть $\mathcal{I}_T^-(\Omega)$ и $\mathcal{I}_T^+(\Omega)$ - соответственно минимальное и максимальное числа отсечений, используемых процессом T при решении задачи (1) на множестве $\Omega \subset B^n$.

Т е о р е м а 1 [4]. Для задачи (1) и процесса отсечения T имеют место соотношения

$$\frac{1}{s}|\Omega_*/\mathcal{L}| \le \mathcal{I}_T^-(\Omega) \le \mathcal{I}_T^+(\Omega) \le |\Omega_*/\mathcal{L}| .$$

§ 2. Вполне регулярные отсечения

Линейное неравенство (2) называется вполне регулярным отсечением (точки $\bar{x}$), если:

1) оно исключает $\mathcal{L}$-отрезок $V_{\bar{x}} \in B^n/\mathcal{L}$, содержащий точку $\bar{x}$;

2) $(\gamma, z) \le \gamma_0$ для любого $z \in B^n \cap Z^{n,s}$ такого, что $\bar{x} \succ z$.

Множество всех вполне регулярных отсечений (точки $\bar{x}$) обозначим через

$\mathcal{J}^*(\bar{x})$. Легко проверить, что описанный выше класс $\mathcal{J}(\bar{x})$ содержится в $\mathcal{J}^*(\bar{x})$. Введем множества

$$J_0^k(\bar{x})=\{j: j\in J_0(\bar{x}), j>k\},\ J_+^k(\bar{x})=\{j: j\in J_+(\bar{x}), j<k\},\ k\in\{1,\dots,n\}.$$

Т е о р е м а 2. Линейное неравенство $(\gamma, x)\le\gamma_0$ является вполне регулярным отсечением точки $\bar{x}$ тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют условиям:

1) $\gamma_{\varphi(\bar{x})}>0$;

2) $\gamma_j=0,\ j=\varphi(\bar{x})+1,\dots,n$;

3) $\sum\limits_{\substack{j\in J_0^k(\bar{x})\\ \gamma_j>0}}\gamma_j+\gamma_{\varphi(\bar{x})}\le\gamma_k$ для всех $k\in J_+(\bar{x})$;

4) $\gamma_0=\sum\limits_{j\in J_+(\bar{x})}\gamma_j$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность. Пусть коэффициенты линейного неравенства $(\gamma, x)\le\gamma_0$ удовлетворяют соотношениям 1) - 4). Проверим условие отсечения $\mathcal{L}$-отрезка $V_{\bar{x}}\in B^n/\mathcal{L}$. Возьмем $x\in V_{\bar{x}}$. Тогда $\varphi(x)=\varphi(\bar{x})$, $x_{\varphi(\bar{x})}\in(0,1)$ и

$$\sum_{k\in J_+(\bar{x})}\gamma_k x_k+\gamma_{\varphi(\bar{x})}x_{\varphi(\bar{x})}>\sum_{k\in J_+(\bar{x})}\gamma_k,$$

поскольку $\gamma_{\varphi(\bar{x})}>0$. Покажем, что любая точка z из $B^n\cap Z^{n,s}$ такая, что $\bar{x}\succ z$, сохраняется. Обозначим $\eta(\bar{x},z)=\min\{i:\bar{x}_i\ne z_i,\ i=1,\dots,n\}$. Очевидно, что $\eta(\bar{x},z)\le\varphi(\bar{x})$. Если $\eta(\bar{x},z)=\varphi(\bar{x})$, то $(\gamma,z)=\gamma_0$. Пусть $p=\eta(\bar{x},z)<\varphi(\bar{x})$. Тогда ясно, что $J_+(\bar{x})\ne\varnothing$ и $p\in J_+(\bar{x})$. В этом случае

$$(\gamma,z)=\sum_{k\in J_+(\bar{x})}\gamma_k z_k+\sum_{j\in J_0(\bar{x})}\gamma_j z_j+\gamma_{\varphi(\bar{x})}z_{\varphi(\bar{x})}=$$

$$=\sum_{k\in J_+(\bar{x})}\gamma_k z_k+\sum_{j\in J_0^p(\bar{x})}\gamma_j z_j+\gamma_{\varphi(\bar{x})}z_{\varphi(\bar{x})}\le\gamma_0-\gamma_p+\sum_{\substack{j\in J_0^p(\bar{x})\\ \gamma_j>0}}\gamma_j+\gamma_{\varphi(\bar{x})}\le$$

согласно условию 3). Следовательно, отсечение $(\gamma,x)\le\gamma_0$ вполне регулярно.

Необходимость. Возьмем произвольное вполне регулярное отсечение $(\gamma,x)\le\gamma_0$. Покажем необходимость условия 4). Предположим, что $\sum\limits_{k\in J_+(\bar{x})}\gamma_k>\gamma_0$. Но тогда отсекаются все точки $z\in B^n\cap Z^n$ такие, что $\eta(\bar{x},z)=\varphi(\bar{x})$ и $z_j=0$, $j=\varphi(\bar{x}),\dots,n$. Следовательно, $\sum\limits_{k\in J_+(\bar{x})}\gamma_k\le\gamma_0$. Заметим, что отсюда вытекает условие 1), так как в противном случае $(\gamma,\bar{x})=\sum\limits_{k\in J_+(\bar{x})}\gamma_k+$ $+\gamma_{\varphi(\bar{x})}\bar{x}_{\varphi(\bar{x})}\le\gamma_0$. Предположим, что $\sum\limits_{k\in J_+(\bar{x})}\gamma_j<\gamma_0$. Тогда

$$\varepsilon=\Bigl(\gamma_0-\sum_{k\in J_+(\bar{x})}\gamma_k\Bigr)\Big/\gamma_{\varphi(\bar{x})}>0.$$

Возьмем точку $x \in V_{\bar{x}}$ такую, что $x_{\varphi(\bar{x})} \le \varepsilon$. Для нее

$$(\gamma, x) \le \sum_{k \in J_+(\bar{x})} \gamma_k + \gamma_{\varphi(\bar{x})} \cdot \varepsilon = \gamma_0 .$$

Получаем противоречие с тем, что $\mathcal{L}$-отрезок $V_{\bar{x}}$ отсекается полностью. Следовательно, $\sum_{k \in J_+(\bar{x})} \gamma_k = \gamma_0$.

Теперь докажем справедливость условия 2). Предположим, существует j_0 такое, что $\varphi(\bar{x}) < j_0 \le n$ и $\gamma_{j_0} \ne 0$. Если $\gamma_{j_0} > 0$, то отсеченной оказывается точка $z \in Z^n$ такая, что $\eta(\bar{x}, z) = \varphi(\bar{x})$, $z_{\varphi(\bar{x})} = 0$, $z_{j_0} = 1$ и $z_j = 0$ для всех $j > \varphi(\bar{x})$ и $j \ne j_0$. Так как $\bar{x} \succ z$, то получаем противоречие. Если $\gamma_{j_0} < 0$, то не отрезанными окажутся, например, точки $x \in V_{\bar{x}}$, у которых $x_{j_0} = 1$, $0 < x_{\varphi(\bar{x})} \le -\gamma_{j_0} / \gamma_{\varphi(\bar{x})}$, $x_j = 0$, $j = \varphi(\bar{x}) + 1, \ldots, n$, $j \ne j_0$. Это противоречит регулярности отсечения. Следовательно, $\gamma_j = 0$ для $\varphi(\bar{x}) < j \le n$.

Наконец, установим необходимость условия 3). Зафиксируем номер K из $J_+(\bar{x})$. Возьмем точку $z \in B^n \cap Z^n$ такую, что $z_j = 1$ для $j \in (J_+(\bar{x}) \setminus \{K\}) \cup (J_0^K(\bar{x}) \cap \{j : \gamma_j > 0\}) \cup \{\varphi(\bar{x})\}$, и $z_j = 0$ для остальных j. Очевидно, $\bar{x} \succ z$. Следовательно, $(\gamma, z) \le \gamma_0$. С другой стороны,

$$(\gamma, z) = \sum_{j \in J_+(\bar{x})} \gamma_j z_j + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \gamma_j z_j + \gamma_{\varphi(\bar{x})} z_{\varphi(\bar{x})} =$$

$$= \gamma_0 - \gamma_K + \sum_{\substack{j \in J_0^K(\bar{x}) \\ \gamma_j > 0}} \gamma_j + \gamma_{\varphi(\bar{x})} \le \gamma_0 ,$$

откуда вытекает 3).

Теорема доказана.

Т е о р е м а 3. Класс отсечений $\mathcal{T}^*(\bar{x})$ совпадает со множеством всех неотрицательных линейных комбинаций следующих неравенств:

$$x_j \le 1 , \quad j \in J_+(\bar{x}); \tag{4}$$

$$-x_j \le 0 , \quad j \in J_0(\bar{x}); \tag{5}$$

$$\sum_{k \in J_+^j} x_k + x_j \le |J_+^j(\bar{x})| , \quad j \in J_0(\bar{x}); \tag{6}$$

$$\sum_{k \in J_+(\bar{x})} x_k + x_{\varphi(\bar{x})} \le |J_+(\bar{x})| , \tag{7}$$

причем последнее входит в эти комбинации с положительным коэффициентом.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Каждому линейному неравенству из (4) - (7) поставим в соответствие вектор коэффициентов: R_j - для (4) и (5), Y_j - для (6), S - для (7). Утверждение теоремы равносильно следующему: отсечение $(\gamma, x) \le \gamma_0$ принадлежит $\mathcal{T}^*(\bar{x})$ тогда и только тогда, когда для $\bar{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n, \gamma_0)$ имеет место

$$\bar{\gamma} = \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \beta_j Y_j + \sum_{j=1}^{\varphi(\bar{x}) - 1} \alpha_j R_j + \delta \cdot S , \tag{8}$$

причем $\delta > 0$, а все коэффициенты α_j и β_j неотрицательны.

Сначала покажем, что любое неравенство, удовлетворяющее (8), принадлежит классу $\mathcal{T}^*(\bar{x})$. Из (8) следует:

$$\gamma_j = -\alpha_j + \beta_j, \quad j \in J_0(\bar{x}); \tag{9}$$

$$\gamma_K = \alpha_K + \sum_{j \in J_0^K(\bar{x})} \beta_j + \delta, \quad K \in J_+(\bar{x}); \tag{10}$$

$$\gamma_{\varphi(\bar{x})} = \delta; \tag{11}$$

$$\gamma_0 = \sum_{K \in J_+(\bar{x})} \alpha_K + \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \beta_j \left| J_+^j(\bar{x}) \right| + \delta \left| J_+(\bar{x}) \right|. \tag{12}$$

Непосредственной проверкой устанавливается, что коэффициенты γ_j, $j = 0, \dots, n$, удовлетворяют условиям теоремы 2. Например, проверим выполнение условия 3). Зафиксируем K из $J_+(\bar{x})$. Множество $J_0^K(\bar{x}) \cap \{j : \gamma_j > 0, j = 1, \dots, n\}$ обозначим J'. Тогда

$$\sum_{j \in J'} \gamma_j + \gamma_{\varphi(\bar{x})} = \sum_{j \in J'} (-\alpha_j + \beta_j) + \delta =$$

$$= -\sum_{j \in J'} \alpha_j + \sum_{j \in J'} \beta_j + \delta \le \alpha_K + \sum_{j \in J_0^K(\bar{x})} \beta_j + \delta = \gamma_K.$$

Теперь докажем, что любое отсечение из класса $\mathcal{T}^*(\bar{x})$ удовлетворяет (8). Пусть $(\gamma, x) \le \gamma_0$ принадлежит $\mathcal{T}^*(\bar{x})$. Составим систему уравнений вида (9) – (12) и покажем, что она имеет неотрицательное решение. Легко проверить, что (12) представляет собой сумму всех уравнений (10). Поэтому (12) можно опустить. Так как $\gamma_{\varphi(\bar{x})} > 0$, то $\delta > 0$. Из (9) и (10) выразим α_j $(j \in J_+(\bar{x}) \cup J_0(\bar{x}))$. Положим $\beta_j = \gamma_j$, если $\gamma_j > 0$, и $\beta_j = 0$, если $\gamma_j \le 0$ $(j \in J_0(\bar{x}))$. Тогда, очевидно, $\alpha_j \ge 0$ для $j \in J_0(\bar{x})$. При $K \in J_+(\bar{x})$ справедливо

$$\alpha_K = \gamma_K - \sum_{j \in J_0^K(\bar{x})} \beta_j - \delta = \gamma_K - \sum_{j \in J'} \gamma_j - \gamma_{\varphi(\bar{x})} \ge 0,$$

в силу условия 3) теоремы 2. Следовательно, $\alpha_K \ge 0$ и для $K \in J_+(\bar{x})$.

Теорема доказана.

Перейдем к вопросу о глубине отсечений класса $\mathcal{T}^*(\bar{x})$.

Л е м м а. Глубина любого отсечения из класса $\mathcal{T}^*(\bar{x})$ не превышает числа целочисленных переменных задачи (1), т.е. величины S.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Возьмем $(\gamma, x) \le \gamma_0$ из $\mathcal{T}^*(\bar{x})$. Рассмотрим некоторый дробный $\mathcal{L}$-отрезок $V \in \Omega/\mathcal{L}$, отличный от $V_{\bar{x}}$. Пусть $x \in V$, $p = \eta(x, \bar{x})$. Ясно, что $\eta(x, \bar{x}) \le \varphi(\bar{x})$. Если $p = \varphi(\bar{x})$, то $x_{\varphi(\bar{x})} = 0$ и $(\gamma, x) = \gamma_0$ (в силу теоремы 2). Следовательно, дробные $\mathcal{L}$-отрезки, у которых $\eta(x, \bar{x}) = \varphi(\bar{x})$, не исключаются.

Пусть $p < \varphi(\bar{x})$. Тогда, очевидно, $J_+(\bar{x}) \neq \emptyset$ и $p \in J_+(\bar{x})$. Если $x_p = 0$, то

$$(\gamma, x) = \sum_{j \in J_+^p(\bar{x})} \gamma_j + \sum_{j=p+1}^{\varphi(\bar{x})} \gamma_j x_j \leq \gamma_0 - \gamma_p + \sum_{\substack{j \in J_0^p(\bar{x}) \\ \gamma_j > 0}} \gamma_j + \gamma_{\varphi(\bar{x})} \leq \gamma_0 ,$$

и $\mathcal{L}$-отрезок V не исключается.

Следовательно, отсечены могут быть лишь $\mathcal{L}$-отрезки вида $p \in J_+(\bar{x})$, $0 < x_p < 1$. Их число не превышает $|J_+(\bar{x})|$. Учитывая $V_{\bar{x}}$, получаем, что глубина любого отсечения из $\mathcal{T}^*(\bar{x})$ не более $|J_+(\bar{x})| + 1 \leq s$. Лемма доказана.

Обозначим через T^* регулярный процесс $\mathcal{D}$, использующий только вполне регулярные отсечения оптимума текущей непрерывной задачи; $\mathcal{I}^-_{T^*}(\Omega)$ и $\mathcal{I}^+_{T^*}(\Omega)$ – соответственно минимальное и максимальное числа отсечений, используемых процессом T^* при решении задачи (1) на множестве $\Omega \subset B^n$.

Т е о р е м а 4. Для задачи (1) и процесса T^* имеют место соотношения

$$\frac{1}{s} |\Omega_* / \mathcal{L}| \leq \mathcal{I}^-_{T^*}(\Omega) \leq \mathcal{I}^+_{T^*}(\Omega) \leq |\Omega_* / \mathcal{L}| .$$

Верхняя оценка следует из регулярности отсечений процесса T^*, а нижняя – непосредственно из леммы. Отметим, что если множество Ω целиком лежит в полупространстве $\sum_{i=1}^{n} x_i \leq K \ (0 < K \leq n-1)$, то глубина вполне регулярного отсечения не больше K (так как в этом случае $|J_+(\bar{x})| \leq K-1$), и, следовательно, $\mathcal{I}^-_{T^*}(\Omega) \geq \frac{1}{K'} |\Omega_* / \mathcal{L}|$, где $K' = min\{s, K\}$.

Близость нижней и верхней оценок указывает на то, что различные алгоритмы решения задачи (1), получающиеся конкретизацией процесса T^*, примерно одинаковы по числу итераций, а величина $|\Omega_* / \mathcal{L}|$ достаточно точно описывает сложность решения задачи этими алгоритмами. Задачи с большим числом элементов в $\Omega_* / \mathcal{L}$ действительно являются трудными для T^*. Ниже будут описаны семейства таких задач.

§ 3. Контрпримеры

Пусть далее $s = n$.

П р и м е р 1. Рассмотрим многогранник $\mathcal{M}$, заданный таким образом:

$$2 \sum_{j=1}^{n} x_j = K , \qquad K \text{ нечетно, } 0 < K < 2n ,$$

$$0 \leq x_j \leq 1 , \qquad j = 1, \dots, n .$$

Очевидно, $\mathcal{M} \cap Z^n = \emptyset$ и, следовательно, $\mathcal{M}_* = \mathcal{M}$. Оценим величину $|\mathcal{M}_* / \mathcal{L}|$. Пусть $x_n = \frac{1}{2}$. $x_1, \dots, x_{n-1}$ положим равными 0 или 1 так, чтобы $\sum_{j=1}^{n-1} x_j = \left[\frac{K}{2}\right]$. Число таких комбинаций $C_{n-1}^{[K/2]}$. Легко проверить, что все построенные таким образом векторы являются представителями различных дробных $\mathcal{L}$-отрезков из $\mathcal{M}/\mathcal{L}$. Упорядочим их по лексикографическому убыванию: $x^1 \succ x^2 \succ \ldots \succ x^r$, $r = C_{n-1}^{[K/2]}$. Рассмотрим $y^i = \frac{1}{2}(x^i + x^{i+1})$, $i = 1,\ldots,r-1$. Очевидно, что y^i представляет некоторый дробный $\mathcal{L}$-отрезок из $\mathcal{M}/\mathcal{L}$ и $x^i \succ y^i \succ x^{i+1}$. Кроме того, в $\mathcal{M}/\mathcal{L}$ присутствует $\mathcal{L}$-отрезок вида $x_n = 1$, $x_{n-1} = \frac{1}{2}$, $\sum_{j=1}^{n-2} x_j = [K/2] - 1$. Следовательно, $|\mathcal{M}_* / \mathcal{L}| \geq 2 \cdot C_{n-1}^{[K/2]}$, и для решения этой задачи с помощью процесса T^* потребуется не менее $\frac{2}{n} \cdot C_{n-1}^{[K/2]}$ итераций. Отметим, что при $K = n$ множество $\mathcal{M}$ совпадает с многогранником примера Джерослоу, являющегося контрпримером для метода Лэнд и Дойг [7].

П р и м е р 2. Пусть дано множество $\widetilde{\mathcal{M}}$:

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - 1/2)^2 \leq R^2, \quad \frac{\sqrt{n-1}}{2} < R < \frac{\sqrt{n}}{2}, \tag{13}$$

$$0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1,\ldots,n.$$

У т в е р ж д е н и е. Для решения задачи (1) на множестве $\widetilde{\mathcal{M}}$ необходимо $(2^n - 1)$ вполне регулярных отсечений.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Упорядочим множество $B^n/\mathcal{L}$ по лексикографическому убыванию: $z^1 \succ V_1 \succ z^2 \succ \ldots \succ V_{r-1} \succ z^r$, где $z^i \in B^n \cap Z^n$, $i = 1,\ldots,r$, $r = 2^n$; V_i - дробные $\mathcal{L}$-отрезки, $i = 1,\ldots,r-1$. Заметим, что $V_i \cap \widetilde{\mathcal{M}} \neq \emptyset$ для любого $V_i \in B^n/\mathcal{L}$. Действительно, рассмотрим

$$x^i = \frac{1}{2}(z^i + z^{i+1}). \tag{14}$$

Очевидно, $x^i \in V_i$. Легко проверить, что x^i удовлетворяет также условию (13). Следовательно, $x^i \in V_i \cap \widetilde{\mathcal{M}}$. Так как $\widetilde{\mathcal{M}} \subset B^n$ и $\widetilde{\mathcal{M}} \cap Z^n = \emptyset$, то $|\widetilde{\mathcal{M}}_* / \mathcal{L}| = 2^n - 1$.

Теперь покажем, что каждое отсечение $\bar{\gamma}$, используемое в ходе решения задачи (1) процессом T^*, исключает ровно один дробный $\mathcal{L}$-отрезок множества $\widetilde{\mathcal{M}}$. Обозначим $\bar{\gamma}^{(1)}$ первое отсечение процесса T^*. Так как $\bar{\gamma}^{(1)}$ принадлежит $\mathcal{F}^*(\bar{x})$, где $\bar{x} = lexmax\, \widetilde{\mathcal{M}} \in V_1$, то $(\gamma^{(1)}, x) > \gamma_0^{(1)}$ для любого x, и $(\gamma^{(1)}, z^i) \leq \gamma_0^{(1)}$ для $2 \leq i \leq r$. Отсюда с учетом (14) получаем $(\gamma^{(1)}, x^i) \leq \gamma_0^{(1)}$ для $2 \leq i \leq r-1$. Следовательно, отсечением $\bar{\gamma}^{(1)}$ сохраняются все $\mathcal{L}$-отрезки множества $\widetilde{\mathcal{M}}$, кроме V_1. Пусть верно, что отсечение $\bar{\gamma}^{(K-1)}$ $(K \leq r-2)$ исключает лишь $\mathcal{L}$-отрезок V_{K-1}. Покажем, что тогда $\bar{\gamma}^{(K)}$ отрезает только V_K. Отсечение $\bar{\gamma}^{(K)}$ вполне регулярно, поэтому $(\gamma^{(K)}, x) > \gamma_0^{(K)}$ для всех $x \in V_K$ и $(\gamma^{(K)}, z^i) \leq \gamma_0^{(K)}$ для $K+1 \leq i \leq r$. Но тогда, в силу (14), $(\gamma^{(K)}, x^i) \leq \gamma_0^{(K)}$ для $K+1 \leq i \leq r-1$, т.е. исключенным оказывается лишь $\mathcal{L}$-отрезок V_K. Следовательно, для решения задачи (1) на множестве $\widetilde{\mathcal{M}}$ потребуется $|\widetilde{\mathcal{M}}/\mathcal{L}| = 2^n - 1$ вполне регулярных отсечений.

Поступила в ред.-изд.отдел
30 марта 1983 г.

Литература

1. Заблоцкая О.А. О строении одного класса выпуклых многогранников. Методы и программы решения оптимизационных задач на графах и сетях. - Тез. докл. II Всесоюз. совещ., Улан-Удэ. Ч. II. Новосибирск, 1982, с. 46-48.

2. Колоколов А.А. О лексикографической структуре некоторых выпуклых многогранных множеств. - У Всесоюз. конф. по пробл. теоретич. кибернетики. Тез. докл., Новосибирск, 1980, с. 77-79.

3. Колоколов А.А. Регулярные отсечения при решении задач целочисленной оптимизации. - В кн.: Целочисленные экстремальные задачи (Управляемые системы). Вып. 21. Новосибирск, 1981, с. 18-25.

4. Колоколов А.А. Нижняя оценка числа итераций для одного класса алгоритмов отсечения. - Настоящий сборник, с. 64-69.

5. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. - М.: Наука. 1969. - 368 с.

6. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. - М.: Мир, 1974. - 519 с.

7. Jeroslow R.C. Trivial integer programs unsolvable by branch - and - bound (short communication). - Math. Programming, 1974, 6, N 1, p. 105-109.