Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1983 г., вып. 23

УДК 519.854

О МИНИМИЗАЦИИ ВЫПУКЛОЙ СЕПАРАБЕЛЬНОЙ ФУНКЦИИ НА ПЕРЕСЕЧЕНИИ ПОЛИМАТРОИДОВ

Н.И.Глебов

Рассматривается задача минимизации выпуклой сепарабельной функции на пересечении двух целочисленных полиматроидов. Некоторые частные случаи этой задачи были рассмотрены в [2, 3] - для пересечения двух матроидов - и в более ранней работе [1] - для множества допустимых целочисленных решений транспортной задачи.

На основе результатов проведенного исследования предлагается итерационный метод решения задачи, число итераций которого не превосходит минимального из рангов полиматроидов, а трудоемкость каждой итерации полиномиальным образом зависит от размерности пространства и линейным образом - от суммарной трудоемкости процедур вычисления значений функции и проверки принадлежности точки полиматроидам.

Коротко о содержании статьи. В п. 1 формулируется оптимизационная задача и вводятся некоторые обозначения. В п. 2 вводится важное для дальнейшего понятие неразложимого орцикла и устанавливается критерий неразложимости. В п. 3 доказывается ряд утверждений, в которых речь идет о свойствах полиматроида, используемых в п. 4 при исследовании структуры пересечения двух полиматроидов. Наконец, в п. 5 рассматривается собственно оптимизационная задача и схематично описывается метод ее решения.

1. Рассматриваемая задача имеет вид:

$$\min \{ f(x) \mid x \in P_1 \cap P_2 \}, \tag{1}$$

где P_1 и P_2 - целочисленные полиматроиды,

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x^i), \tag{2}$$

$f_i(\cdot)$ - выпуклые функции целочисленного аргумента, $i = \overline{1,n}$.

В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

Z - множество всех целых чисел;

Z_+ - множество всех целых неотрицательных чисел;

если $x, y \in Z^n$, то $x \leq y$ эквивалентно $y - x \in Z_+^n$;

$x \wedge y$ $(x \vee y)$ - точная нижняя (верхняя) грань векторов x и y относительно частичного порядка $\leq$;

$$[x,y]=\{z\in Z^n \mid x\wedge y \leq z \leq x\vee y\};$$

x^i - i -я компонента вектора x ;

$$|x|=\sum_{i=1}^{n}|x^i|;$$

$x[A]=\sum\{x^i \mid i\in A\}$, где $A\subset\{1,2,\dots,n\}$;

$\delta_j=(0,\dots,0,1_j,0,\dots,0)\in Z^n$.

Определение 1. Непустое конечное множество $P\subset Z^n_+$ называется (целочисленным) полиматроидом, если:

а) из $x\in P$ следует $[0,x]\subset P$;

б) для любого $z\in Z^n_+$ существует число r такое, что для каждого максимального (относительно $\leq$) вектора y из $P\cap[0,z]$ имеет место равенство $|y|=r$.

Число r , однозначно определяемое вектором z согласно условию "б", принято называть рангом z и обозначать $rang(z)$. Рангом полиматроида P называется максимальный из рангов векторов z , или, что то же самое, $max\{|x| \mid x\in P\}$. Если $t\in Z_+$, то множество $P(t)=[0,t]\times P$ также является полиматроидом. Взяв в качестве t число, не меньшее минимального из рангов полиматроидов P_1 и P_2, исходную задачу можно свести к задаче минимизации на множестве $\{u\in P_1(t)\cap P_2(t) \mid |u|=t\}$. В связи с этим далее вместо задачи (1) мы будем рассматривать задачу минимизации функции $f(x)$ на множестве $Q=\{x\in P_1\cap P_2 \mid |x|=t^1\}$, предполагая, что $t^1\cdot\delta_1\in Q$.

2. Пусть $H=(V,E)$ - произвольный ориентированный граф (без петель и кратных дуг) с множеством вершин V и множеством дуг E . Если C - простой орцикл графа H , то через $\bar{C}$ будем обозначать характеристический вектор множества вершин орцикла C , т.е. $\bar{C}=\{\bar{C}(v) \mid v\in V\}$, где $\bar{C}(v)=1$, если вершина v принадлежит C , и $\bar{C}(v)=0$ - в противном случае. В дальнейшем термин "орцикл" будет использоваться как эквивалент термина "простой орцикл".

Определение 2. Орцикл C будем называть разложимым, если для некоторых $C_1,\dots,C_m$ - простых орциклов графа H и $\lambda_k>0$, $k=1,\dots,m$, имеет место

1) $\bar{C}=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\bar{C}_k$;

2) $|\bar{C}_k|<|\bar{C}|$, $k=1,\dots,m$.

В противном случае будем говорить, что C неразложим.

Замечание. Более правильно было бы говорить о разложимости (характеристического вектора) множества вершин орцикла, однако в подобном усложнении терминологии нет особой необходимости.

Для формулировки критерия неразложимости орцикла C введем в рассмотрение орграф CH, множество вершин которого находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством дуг орцикла C : если (u,v) – дуга орцикла C, то соответствующую ей вершину в CH будем обозначать через uv. Множество дуг графа CH состоит из всех упорядоченных пар $(uv, u'v')$ таких, что $(u,v')\in E$ и $uv \neq u'v'$.

Т е о р е м а 1. Орцикл C неразложим тогда и только тогда, когда орграф CH ациклический.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что граф CH содержит простой орцикл, проходящий последовательно через вершины $u_1 v_1$, $u_2 v_2$, ..., $u_m v_m$, $u_1 v_1$. Тогда, по определению графа CH, имеем $(u_K, v_{K+1})\in E$, $K=1,\dots,m$, где $v_{m+1}\equiv v_1$. Для произвольных вершин u и v орцикла C через $C(u,v)$ обозначим (единственный) путь из u в v, образованный дугами орцикла C. Определим далее простые орциклы C_K, $K=1,\dots,m$, положив $C_K = ((u_K, v_{K+1}), C(v_{K+1}, u_K))$. Поскольку $(u_K, v_{K+1})\notin C$, то $|\bar{C}_K|<|\bar{C}|$, $K=1,\dots,m$. Последовательность (u_1, v_1), $C(v_1, u_m)$, (u_m, v_m), $C(v_m, u_{m-1})$, $(u_{m-1}, v_{m-1}),\dots, C(v_2, u_1)$ представляет собой замкнутый ормаршрут в H, образованный дугами орцикла C. Следовательно, каждая вершина из C встречается в этом маршруте одно и то же число, скажем, q раз. Отсюда непосредственно следует, что $\bar{C} = 1/q\sum_{K=1}^{m}\bar{C}_K$, т.е. орцикл C является разложимым. Таким образом, из неразложимости C следует ацикличность графа CH.

Предположим теперь, что орцикл C является разложимым, а C_K и λ_K, $K=1,\dots,m$, удовлетворяют условиям 1), 2) в определении 2. Поскольку соотношение 1), рассматриваемое как система линейных относительно λ_K уравнений, имеет неотрицательное решение, а ее коэффициенты и свободные члены целочисленны, то существует неотрицательное рациональное решение системы. Следовательно, найдутся неотрицательные целые числа $q_1,\dots,q_m$ и q такие, что $q>0$ и

$$q\bar{C} = \sum_{K=1}^{m} q_K \bar{C}_K . \tag{3}$$

Рассмотрим далее мультиграф Γ, множество вершин которого образовано двумя копиями множества вершин орцикла C. Если v есть вершина орцикла C, то соответствующие ей две вершины мультиграфа Γ будем обозначать посредством v^0 и v^1. Множество дуг мультиграфа Γ порождается согласно следующим правилам:

а) каждая дуга (u,v) орцикла C порождает q дуг (v^1, u^0) мультиграфа Γ ;

б) каждая дуга (u,v) орцикла C_K порождает (независимо от ее вхождения в другие орциклы) q_K дуг (u^0, v^1) мультиграфа Γ, $K=1,\dots,m$.

Учитывая (3), нетрудно видеть, что построенный таким образом мультиграф Γ является эйлеровым (для каждой вершины число входящих дуг равно числу выходящих дуг и равно q). Отсюда следует, что множество его дуг может быть разбито на конечное число простых орциклов, в каждом из которых дуги типа (u^0, v^1) и (u^1, v^0) чередуются. Всякий орцикл мультиграфа Γ, который содержит дугу типа (u^0, v^1), порожденную дугой (u,v) орцикла C_K, не входящей в C, имеет длину больше двух. Более того, в каждом простом орцикле мультиграфа Γ, имеющем длину больше двух, все дуги типа (u^0, v^1) порождены дугами (u,v) орциклов C_K, не входящими в C. Любому такому орциклу мультиграфа Γ, заданному в виде последовательности дуг $(v_1^1, u_1^0),(u_1^0, v_2^1),(v_2^1, u_2^0),\dots,(u_{s-1}^0, v_s^1),(v_s^1, u_s^0),(u_s^0, v_1^1)$, $s \geq 2$, соответствует орцикл в графе CH, заданный в виде последовательности вершин $u_1v_1, u_2v_2,\dots,u_sv_s, u_1v_1$. Поскольку каждый орцикл C_K содержит хотя бы одну дугу, не входящую в C, то тем самым доказано, что граф CH не является ациклическим.

С л е д с т в и е. Орцикл C неразложим тогда и только тогда, когда его дуги могут быть упорядочены $(u_1 v_1),(u_2 v_2),\dots,(u_p, v_p)$ так, что $(u_i, v_j) \notin E$ при $i<j$.

Пусть на множестве вершин графа H определена вещественнозначная функция w. Тогда $w(v)$ будем называть весом вершины v, а под весом $w(C)$ орцикла C будем понимать сумму весов всех его вершин.

Если $\mathcal{K}$ есть некоторое множество простых орциклов графа H, то $\mathcal{K}_0$ будет обозначать множество всех орциклов из $\mathcal{K}$, имеющих минимальный вес, т.е. $\mathcal{K}_0 = \operatorname{Arg\,min}\{w(C) \mid C \in \mathcal{K}\}$. Орцикл C будем называть <u>минимальным по включению</u> (элементом $\mathcal{K}$), если из $C_1 \in \mathcal{K}$, $\bar{C}_1 \leq \bar{C}$ следует $|\bar{C}_1| = |\bar{C}|$. В частности, любой орцикл из $\mathcal{K}$ с наименьшим числом вершин является минимальным по включению.

Посредством $\mathcal{K}(V_0; V_1)$ обозначим множество всех простых орциклов графа H, содержащих все вершины из множества V_0 и не содержащих ни одной вершины из множества V_1, $V_0 \cap V_1 = \emptyset$ и $V_0, V_1 \subset V$. Пусть $V_1 \subset V$ и $v_0 \in V \setminus V_1$.

Л е м м а 1. Если вес любого орцикла из $\mathcal{K}(\emptyset; v_0 \cup V_1)$ неотрицателен, то каждый минимальный по включению орцикл из $\mathcal{K}_0(v_0; V_1)$ является неразложимым.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $C \in \mathcal{K}_0(v_0; V_1)$ и $\bar{C} = \sum_{K=1}^{m} \lambda_K \bar{C}_K$, где $C_K \in \mathcal{K}(\emptyset; V_1)$, $|\bar{C}_K| < |\bar{C}|$, $\lambda_K > 0, K=1,\dots,m$. Поскольку $\sum\{\lambda_K \mid C_K \in \mathcal{K}(v_0; V_1)\} = 1$, то $w(C) = \sum_{K=1}^{m} \lambda_K w(C_K) = \sum\{\lambda_K w(C_K) \mid C_K \in$

$\in \mathcal{K}(V_0; V_1)\} + \sum\{\lambda_K w(C_K) | C_K \in \mathcal{K}(\phi; V_0 \cup V_1)\} \geq \sum\{\lambda_K w(C_K) | C_K \in \mathcal{K}(V_0; V_1)\} \geq$
$\geq w(C)$.

Следовательно, $w(C_K) = w(C)$ при $C_K \in \mathcal{K}(V_0; V_1)$, т.е. $C_K \in \mathcal{K}_0(V_0; V_1)$ и так как $\bar{C}_K \leq \bar{C}$, $|\bar{C}_K| < |\bar{C}|$, то C не является минимальным по включению элементом $\mathcal{K}_0(V_0; V_1)$.

3. Докажем ряд лемм о свойствах полиматроида P, которые используются нами при исследовании структуры пересечения двух полиматроидов.

Л е м м а 2. Если $x \in P$ и $x \leq z$, то для любого натурального числа t, $|x| \leq t \leq rang(z)$, существует $y \in P \cap [x, z]$ такой, что $|y| = t$.

Утверждение непосредственно следует из определения полиматроида.

Л е м м а 3. Пусть z, $g_i \in Z_+^n$, $z - g_i \notin P$, $i = 1, \dots, K$; $rang(z) = |z| - 1$. Тогда $z - \sum_{i=1}^{K} g_i \notin P$.

Д о к а з а т е л ь с т в о проведем от противного. Пусть $x = z - \sum_{i=1}^{K} g_i \in P$. По лемме 2, существует $y \in P \cap [x, z]$ такой, что $|y| = |z| - 1$. Это означает, что при некотором j имеет место $y = z - \delta_j \in P$ и $z - \delta_j \geq z - \sum_{i=1}^{K} g_i$. Отсюда следует существование номера s, $1 \leq s \leq K$, для которого $z - \delta_j \geq z - g_s$ и $z - g_s \in P$. Полученное противоречие доказывает лемму.

Л е м м а 4. Если $x, y \in P$ и $x \wedge y + \delta_j \notin P$, то из $x + \delta_j - \delta_i \in P$ следует $y + \delta_j - \delta_i \in P$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x + \delta_j - \delta_i \in P$. Тогда $x \wedge y + \delta_j - \delta_i \in P$, иначе мы имели бы $x \wedge y + \delta_j \leq x + \delta_j - \delta_i$, что противоречит условиям леммы. Далее из $y \in P$ и $x \wedge y + \delta_j \notin P$ следует $rang(y + \delta_j) = |y|$. По лемме 2 существует $z \in P \cap [x \wedge y + \delta_j - \delta_i, y + \delta_j]$ такой, что $|z| = |y|$, т.е. при некотором K имеет место $y + \delta_j - \delta_K \in P$ и $y + \delta_j - \delta_K \geq x \wedge y + \delta_j - \delta_i$. Случай $K \neq i$ невозможен, поскольку тогда будет иметь место $y + \delta_j - \delta_K \geq$ $\geq x \wedge y + \delta_j$, что приводит к противоречию. Следовательно, $K = i$ и $y + \delta_j - \delta_i \in P$.

Л е м м а 5. Если x, $x + \delta_K - \delta_i$, $x + \delta_j - \delta_K \in P$, то $x + \delta_j - \delta_i \in P$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Утверждение тривиально, если $i = K$ или $j = K$. В случае $i \neq K$ и $j \neq K$, полагая $y = x + \delta_K - \delta_i$, будем иметь $x \wedge y + \delta_j = x + \delta_j - \delta_i = y + \delta_j - \delta_K$. Тогда допущение $x + \delta_j - \delta_i \notin P$ приводит к противоречию, поскольку в силу леммы 4 из $x + \delta_j - \delta_K \in P$ следует $y + \delta_j - \delta_K \in P$.

Л е м м а 6. Если x, $y \in P$, $|x| = |y|$ и

$$(x - y)[A] + (y - x)[B] > \frac{1}{2} |x - y|,$$

то найдутся номера $i \in A$ и $j \in B$ такие, что $x + \delta_j - \delta_i \in P$.

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы достаточно провести для случая

$A \subset A_0 = \{i \mid x^i > y^i\}, \quad B \subset B_0 = \{i \mid x^i < y^i\}$.

Определим вектор x_0, положив $x_0^i = y^i$ при $i \in A$ и $x_0^i = x^i$ – в остальных случаях. Очевидно, $0 \leq x_0 \leq x$, и, следовательно, $x_0 \in P$. Поскольку $rang\,(x_0 \vee y) \geq |y| = |x| \geq |x_0|$, то, по лемме 2 найдется вектор y' такой, что $y' \in P \cap [x_0, x_0 \vee y]$ и $|y'| = |x|$. Учитывая неравенство из условий леммы и легко проверяемые соотношения $|y'| - |x| = (y' - x_0)[B_0] + (y - x)[A]$, $\frac{1}{2}|x - y| = (y - x)[B_0]$ и $(y' - x_0)[B_0 \setminus B] \leq (y - x)[B_0 \setminus B]$, получаем $(y' - x_0)[B] > 0$. Отсюда вытекает, что при некотором $j \in B$ имеет место $x_0 + \delta_j \leq y'$ и, следовательно, $x_0 + \delta_j \in P$. Далее, снова по лемме 2, найдется вектор x' такой, что $x' \in P \cap [x_0 + \delta_j, x + \delta_j]$ и $|x'| = |x|$. Нетрудно видеть, что $x' = x + \delta_j - \delta_i$ при некотором $i \in A$.

Введем в рассмотрение двудольный орграф $G(x, P) = (V^- \cup V^+, E)$, где

$$V^- = \{i^- \mid i = 1, \ldots, n\}, \quad V^+ = \{i^+ \mid i = 1, \ldots, n\},$$
$$E = E(x, P) = \{(i^-, j^+) \mid x + \delta_j - \delta_i \in P\}.$$

Если $\alpha, \beta \in Z_+^n$, то под (α, β)-потоком в $G(x, P)$ будем понимать неотрицательную функцию, определенную на дугах этого графа, такую, что для каждого $i = \overline{1, n}$ сумма значений функции на дугах, исходящих из i^- (заходящих в i^+), равна α^i (β^i).

Т е о р е м а 2. Если $x, y \in P$, $|x| = |y|$, $\alpha = 0 \vee (x - y)$ и $\beta = 0 \vee (y - x)$, то существует (α, β)-поток в $G(x, P)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По графу $G(x, P)$ построим сеть $\overline{G}$, добавив полюса s и t и дуги (s, i^-) и (i^+, t) с пропускными способностями α^i и β^i соответственно, $i = 1, \ldots, n$. Пропускные способности дуг исходного графа будем считать неограниченными.

Рассмотрим произвольный разрез в $\overline{G}$, определяемый разбиением множества вершин сети на подмножества V_1 и V_2 $(s \in V_1,\ t \in V_2)$. Пусть $A = \{i \in A_0 \mid i^- \in V_1\}$ и $B = \{j \in B_0 \mid j^+ \in V_2\}$, где A_0 и B_0 имеют тот же смысл, что и в доказательстве предыдущей леммы.

Если существует дуга $(i^-, j^+) \in E(x, P)$, входящая в разрез (V_1, V_2), то пропускная способность разреза бесконечна. Предположим, что таких дуг нет. Тогда пропускная способность разреза равна $\alpha[A_0 \setminus A] + \beta[B_0 \setminus B]$ и для любых $i \in A$ и $j \in B$ имеет место $(i^-, j^+) \notin E(x, P)$, т.е. $x + \delta_j - \delta_i \notin P$. В силу леммы 6 отсюда следует неравенство

$$(x - y)[A] + (y - x)[B] \leq \frac{1}{2}|x - y|,$$

которое вместе с соотношениями $\alpha[A_0 \setminus A] + \beta[B_0 \setminus B] =$

$$= (x - y)[A_0] - (x - y)[A] + (y - x)[B_0] - (y - x)[B] = |x - y| - (x - y)[A] -$$
$$- (y - x)[B]$$ приводит к нижней оценке

$$\alpha[A_0 \setminus A] + \beta[B_0 \setminus B] \geq \frac{1}{2}|x-y| = |\alpha| = |\beta|,$$

достижимой на разрезах $(s, V^- \cup V^+ \cup t)$ и $(s \cup V^- \cup V^+, t)$. Следовательно, по теореме о максимальном потоке и минимальном разрезе, любой максимальный поток в сети $\bar{G}$ будет насыщать дуги этих разрезов, т.е. будет порождать (α,β) -поток в $G(x,P)$.

4. Пусть $x \in Z_+^n$ и P_1, P_2 - полиматроиды. Введем в рассмотрение ориентированный граф $H(x) = (V^- \cup V^+, E)$, где $E = E_1 \cup E_2$, $E_1 = E(x,P)$ и $E_2 = \{(j^+, i^-) | (i^-, j^+) \in E(x, P_2)\}$.

Если C - орцикл графа $H(x)$, то через $z(C)$ будем обозначать вектор из Z^n, компоненты которого определяются следующим образом: $z^i(C) = \bar{C}(i^+) - \bar{C}(i^-)$, $i = 1, \dots, n$. Орцикл C будем называть <u>ординарным</u>, если из $z^i(C) = 0$ следует $\bar{C}(i^+) = \bar{C}(i^-) = 0$.

Т е о р е м а 3. Если $x \in P_1 \cap P_2$ и C - неразложимый орцикл графа $H(x)$, то $x + z(C) \in P_1 \cap P_2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $(i_1^-, j_1^+), \dots, (i_m^-, j_m^+)$ - дуги неразложимого орцикла C, принадлежащие множеству E_1 и упорядоченные согласно следствию из теоремы 1. Через g_s и h_s обозначим векторы δ_{i_s} и δ_{j_s} соответственно. Тогда $x + h_s - g_s \in P_1$, $1 \leq s \leq m$ и $x + h_k - g_s \notin P_1$, $1 \leq s < k \leq m$.

Если при некотором s неравенство $x \geq g_s$ не имеет места, то компонента вектора x с номером i_s равна нулю и единственным простым орциклом графа $H(x)$, содержащим вершину i_s^-, является орцикл длины два, проходящий через i_s^- и i_s^+. Поскольку для такого орцикла утверждение теоремы тривиальным образом выполняется, то далее будем считать, что $x \geq g_s$, $1 \leq s \leq m$. Более того, так как все g_s попарно различны, то $x \geq \sum_{s=1}^{m} g_s$.

Пусть $y = x + \sum_{s=1}^{k-1}(h_s - g_s) \in P_1$ (предположение индукции, $k \geq 2$). Тогда

$x \wedge y \geq x - \sum_{s=1}^{k-1} g_s \geq 0$ и, в силу леммы 3, $x + h_k - \sum_{s=1}^{k-1} g_s \notin P_1$, откуда

$x \wedge y + h_k \notin P_1$. По лемме 4 в этом случае из $x + h_k - g_k \in P_1$ следует

$y + h_k - g_k \in P_1$, т.е. $x + \sum_{s=1}^{k}(h_s - g_s) \in P_1$. Таким образом, учитывая соотношение $z(C) = \sum_{s=1}^{m}(h_s - g_s)$, при $k = m$ будем иметь $x + z(C) \in P_1$.

Принадлежность $x + z(C)$ полиматроиду P_2 доказывается аналогичным образом (при этом используется упорядочение дуг орцикла, принадлежащих множеству E_2, противоположное порядку, получаемому на основании следствия из теоремы 1).

Т е о р е м а 4. Если $x,y\in P_1\cap P_2$ и $|x|=|y|$, то в графе $H(x)$ существуют ординарные неразложимые орциклы C_K, $K=1,\dots,m$, такие, что $x+z(C_K)\in[x,y]$ и $y-x=\sum_{K=1}^{m}\lambda_K z(C_K)$, где $\lambda_K>0$, $K=1,\dots,m$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\alpha=0\vee(x-y)$ и $\beta=0\vee(y-x)$. По (α,β)-потокам в графах $G(x,P_1)$ и $G(x,P_2)$, существование которых гарантируется теоремой 2, очевидным образом строится циркуляция φ в графе $H(x)$, обладающая следующим свойством: для любой вершины i^- (i^+) величина потока, проходящего через эту вершину, равна α^i (β^i).

Циркуляция φ может быть представлена в виде суммы элементарных циркуляций φ_K, $K=1,\dots,m$, где φ_K имеет положительное значение, равное λ_K, на дугах некоторого простого орцикла C_K, и нулевое значение - в остальных случаях. Тогда, как нетрудно видеть, при любом $i=1,\dots,n$ будут иметь место равенства:

$$\alpha^i=\sum_{K=1}^{m}\lambda_K\bar C_K(i^-),\quad \beta^i=\sum_{K=1}^{m}\lambda_K\bar C_K(i^+),$$

или

$$y-x=\beta-\alpha=\sum_{K=1}^{m}\lambda_K z(C_K).$$

Отметим, что орциклы C_K не проходят через вершину i^- (i^+), если $x^i\le y^i$ $(x^i\ge y^i)$. Отсюда следует, что орцикл C_K ординарный и $x+z(C_K)\in[x,y]$, $K=1,\dots,m$.

Если некоторые из орциклов C_K являются разложимыми, то, представляя их через неразложимые орциклы, мы придем к утверждению теоремы.

5. Пусть $f(x)$ - выпуклая сепарабельная функция, определенная на Z^n, и $x,y\in Z^n$. Через $\nabla_y f(x)$ будем обозначать n-вектор, i-я компонента $\nabla_y^i f(x)$ которого определяется следующим образом:

$$\nabla_y^i f(x)=\begin{cases}-f(x-\delta_i)+f(x), & \text{если } y^i<x^i,\\ f(x+\delta_i)-f(x), & \text{если } y^i>x^i\\ 0, & \text{если } y^i=x^i.\end{cases}$$

Легко проверяется неравенство

$$f(y)\ge f(x)+\langle\nabla_y f(x),\,y-x\rangle, \tag{4}$$

где $\langle g,h\rangle$ означает скалярное произведение векторов g и h. Если $y-x\in\{-1,0,1\}^n$, то выполняется равенство

$$f(y)=f(x)+\langle\nabla_y f(x),\,y-x\rangle. \tag{5}$$

На множестве вершин графа $H(x)$ определим весовую функцию w, положив $w(i^-)=f(x-\delta_i)-f(x)$ и $w(i^+)=f(x+\delta_i)-f(x)$. Отметим, что

$w(i^-)+w(i^+)\geq 0$. Если C - простой орцикл графа $H(x)$, то $w(C)=\langle w,\bar{C}\rangle$- вес этого орцикла. Непосредственной проверкой убеждаемся, что в случае $x+z(C)\in[x,y]$ имеет место неравенство

$$w(C)\geq\langle\nabla_y f(x),\ z(C)\rangle, \tag{6}$$

которое выполняется как равенство, если орцикл C ординарный.

Пусть $t^1\in Z_+$ и $t^1\cdot\delta_1\in P_1\cap P_2$. Введем следующие обозначения:

$$Q=\{x\in P_1\cap P_2 \mid |x|=t^1\},$$
$$Q_t=\{x\in Q \mid x^1=t^1-t\},$$
$$M_t=Arg\,min\{f(x)\mid x\in Q_t\},$$

где $t=0,1,\dots,t^1$. Обозначения $\mathcal{K}(V_0;V_1)$ и $\mathcal{K}_0(V_0;V_1)$ имеют тот же смысл, что и в п. 2 при $H=H(x)$. Кроме того, для множеств $\mathcal{K}(\emptyset;\{1^-;1^+\})$, $\mathcal{K}(1^-;1^+)$ и $\mathcal{K}(1^+;1^-)$ будем использовать менее громоздкие обозначения $\mathcal{K}^0$, $\mathcal{K}^-$ и $\mathcal{K}^+$ соответственно.

Теорема 5. Если $x\in Q_t$, то следующие утверждения эквивалентны:

а) $x\in M_t$;

в) каждый орцикл из $\mathcal{K}^0$ имеет неотрицательный вес.

Доказательство. а) $\Rightarrow$ в). Пусть C - неразложимый орцикл из $\mathcal{K}^0$ и $w(C)<0$ (такой орцикл существует, если в $\mathcal{K}^0$ есть орциклы отрицательного веса). Тогда по теореме 3 $y=x+z(C)\in Q_t$. Поскольку $y-x=$ $=z(C)\in\{-1,0,1\}^n$ и $x+z(C)\in[x,y]$, то

$$0>w(C)\geq\langle\nabla_y f(x),\ z(C)\rangle=f(y)-f(x),$$

т.е. $f(x)>f(y)$ и $x\notin M_t$.

в) $\Rightarrow$ а). Пусть $x,y\in Q_t$ и $f(y)<f(x)$, т.е. $x\notin M_t$. По теореме 4 существуют ординарные орциклы C_k и числа $\lambda_k>0$, $k=1,\dots,m$, такие, что

$$y-x=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k z(C_k) \quad\text{и}\quad x+z(C_k)\in[x,y].\ \text{Тогда}\ C_k\in\mathcal{K}^0\ \text{и}\ f(x)>$$
$$>f(y)\geq f(x)+\langle\nabla_y f(x),y-x\rangle=f(x)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k\langle\nabla_y f(x),z(C_k)\rangle=f(x)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k w(C_k),$$

откуда следует существование в $\mathcal{K}^0$ орцикла отрицательного веса.

Теорема 6. Если $x\in M_t$ и C - неразложимый орцикл из $\mathcal{K}_0^-$, то $x+z(C)\in M_{t+1}$ и $f(x+z(C))=f(x)+w(C)$.

Доказательство. Пусть $\bar{x}=x+z(C)$ и $y\in Q_{t+1}$. В силу теоремы 3, $\bar{x}\in Q_{t+1}$. По теореме 4 существуют ординарные орциклы C_k и числа $\lambda_k>0$, $k=1,\dots,m$, для которых имеет место $x+z(C_k)\in[x,y]$ и $y-x=\sum_{k=1}^{m}\lambda_k z(C_k)$. Заметим, что $C_k\in\mathcal{K}^-\cup\mathcal{K}^0$, $\sum\{\lambda_k \mid C_k\in\mathcal{K}^-\}=1$,

$w(C_K) \geqslant w(C)$ при $C_K \in \mathcal{K}^-$ и, по теореме 5, $w(C_K) \geqslant 0$ при $C_K \in \mathcal{K}^0$. Учитывая вышесказанное, на основании соотношений (4)-(6) будем иметь

$$f(y) \geqslant f(x) + \sum_{K=1}^{m} \lambda_K \cdot \langle \nabla_y f(x),\ z(C_K) \rangle =$$
$$= f(x) + \sum_{K=1}^{m} \lambda_K \cdot w(C_K) =$$
$$= f(x) + \sum \{ \lambda_K w(C_K) \mid C_K \in \mathcal{K}^- \} + \sum \{ \lambda_K w(C_K) \mid C_K \in \mathcal{K}^0 \} \geqslant$$
$$\geqslant f(x) + \sum \{ \lambda_K w(C_K) \mid C_K \in \mathcal{K}^- \} \geqslant$$
$$\geqslant f(x) + w(C) \geqslant$$
$$\geqslant f(x) + \langle \nabla_{\bar{x}} f(x),\ z(C) \rangle = f(\bar{x}).$$

Отсюда следует, что $\bar{x} \in M_{t+1}$. Кроме того, в приведенной выше цепочке соотношений последнее неравенство должно выполняться как равенство, поскольку в противном случае мы пришли бы к противоречию, положив $y = \bar{x}$.

З а м е ч а н и е. Если в условиях теоремы (и в ее доказательстве) $\mathcal{K}^-$ заменить на $\mathcal{K}^+$, то мы получили бы, что $x + z(C) \in M_{t-1}$ и $f(x + z(C)) = f(x) + w(C)$.

Пусть

$$T = \{ t \mid Q_t \neq \emptyset \} \quad \text{и} \quad F(t) = min\{ f(x) \mid x \in Q_t \},\ t \in T.$$

Опираясь на теоремы 3 и 4, нетрудно показать, что множество T представляет собой отрезок $[0, t_0]$ натурального ряда, где $t_0 \leq t^1$.

Т е о р е м а 7. Функция $F(t)$ является выпуклой, т.е. $F(t-1) + F(t+1) \geqslant 2F(t)$ при $0 < t < t_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $x \in M_t$, $C^- \in \mathcal{K}_0^-$, $C^+ \in \mathcal{K}_0^+$ и C^-, C^+ неразложимы. Согласно теореме 6 и замечанию к ней, имеем $F(t+1) = f(x) + w(C^-)$, $F(t-1) = f(x) + w(C^+)$, где $f(x) = F(t)$. Отсюда следует, что для доказательства теоремы достаточно убедиться в справедливости неравенства $w(C^-) + w(C^+) \geqslant 0$.

Пусть $(j^+, 1^-), (1^-, K^+)$ - дуги орцикла C^-, а $(i^-, 1^+), (1^+, s^-)$ - дуги орцикла C^+. По определению графа $H(x)$, имеем $x + \delta_K - \delta_1$, $x + \delta_1 - \delta_i \in P_1$ и $x + \delta_j - \delta_1$, $x + \delta_1 - \delta_s \in P_2$, откуда на основании леммы 5 следует $x + \delta_K - \delta_i \in P_1$ и $x + \delta_j - \delta_s \in P_2$, т.е. (i^-, K^+), (j^+, s^-) - дуги графа $H(x)$. Удаляя из C^- и C^+ вершины 1^- и 1^+ вместе с инцидентными им дугами и добавляя дуги (i^-, K^+) и (j^+, s^-), мы получим замкнутый ориентированный маршрут, который может быть представлен в виде объединения простых орциклов C_K, $K = 1, \dots, m$, принадлежащих множеству $\mathcal{K}^0$. Это приводит нас к соотношению $w(C^-) + w(C^+) = [w(1^-) + w(1^+)] + \sum_{K=1}^{m} w(C_K)$, в правой части кото-

Доказанные выше теоремы позволяют предложить метод решения задачи $min\{f(x) \mid x \in Q\}$, схематичное описание которого приводится ниже.

Процесс вычислений начинается с точки $x = t^1 \cdot \delta_1$, при этом $Q_0 = M_0 = \{x\}$. Пусть уже проделано t шагов, в результате которых получена точка $x \in M_t$. Тогда очередной $(t+1)$-й шаг будет состоять из последовательного выполнения следующих процедур:

1) построения графа $H(x)$;

2) вычисления новых значений весовой функции w;

3) нахождения в $\mathcal{K}^-$ неразложимого орцикла C минимального веса и перехода от x к $x + z(C)$ в случае $w(C) < 0$; если $w(C) \geqslant 0$ или $\mathcal{K}^- = \emptyset$, то x есть решение рассматриваемой задачи. Как следует из леммы 1 и теоремы 5, в качестве C может быть взят орцикл из $\mathcal{K}_0^-$ с минимальным числом вершин.

Поступила в ред.-изд. отдел
21 января 1983 г.

Литература

1. Beale E.M.L. An algorithm for solving the transportation problem when the shipping cost over each route is convex. - Nav.Res.Log. Quart., 1959, v. 6, p. 43-56.

2. Edmonds J. Submodular functions, matroids and certain polyhedra. - In.: Combinatorial structures and their applications (Proc. Calgary Int. Conf., June 1969), Gordon and Breach, New Jork, 1970, p. 69-87.

3. Lawler E.L. Matroid intersection algorithms. - Math. Program., 1975, v. 9, p. 31-56.