Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1983 г., вып. 23.

УДК 519.854.33

О СЛОЖНОСТИ ЗАДАЧ МИНИМИЗАЦИИ ПОЛИНОМОВ ОТ БУЛЕВЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

А.А.Агеев

В ряде моделей исследования операций, в частности в моделях оптимальной унификации и размещения производства, возникают задачи минимизации действительных функций от булевых переменных. Известно, что всякую такую функцию $F(x_1,\ldots,x_m)$ можно представить в виде полинома

$$f(x_1,\ldots,x_m)=\sum_{\alpha\subset\{1,\ldots,m\}} C_\alpha \prod_{i\in\alpha} x_i .$$

В настоящей работе представлены результаты, указывающие на существование тесной связи между задачами минимизации полиномов от булевых переменных и задачами о минимальном покрытии множествами. Показано, что эти задачи в определенном смысле эквивалентны. Из полученных результатов в частности следует известный факт о принадлежности задачи минимизации полиномов общего вида к классу NP-трудных задач. Поскольку это так, то особое значение приобретает исследование вопроса о существовании эффективных алгоритмов минимизации специальных классов полиномов. Причем наибольший интерес для приложений представляет выделение достаточно широких классов эффективно минимизируемых полиномов. Определенные успехи в этом направлении уже были достигнуты ранее (см. [1 - 4]). В настоящей работе выделены новые классы эффективно минимизируемых полиномов и полиномов, задача минимизации которых NP-трудна.

Несколько слов о терминологии. В основном она заимствована из [5]. Уточним только некоторые используемые понятия.

Всякую дискретную оптимизационную задачу можно рассматривать как класс индивидуальных задач с конкретно заданными исходными данными. Подзадачей данной задачи называют задачу, соответствующую некоторому подклассу этого класса.

Под сводимостью оптимизационных задач в работе понимается сводимость по Тьюрингу, определенная в [5]. Две задачи называются эквивалентными, если они взаимно сводимы.

Алгоритм называется эффективным, если время его работы ограничено полиномом от длины записи исходных данных. Задачу, для которой существует такой алгоритм решения, будем называть эффективно решаемой.

§ 1. Сведение общей задачи к задаче о минимальном покрытии

Запишем задачу в виде

$$\sum_{j=1}^{n_1} c_j\Big(1-\prod_{i\in\alpha_j} x_i\Big)+\sum_{i=1}^{m} d_i x_i+\sum_{j=n_1+1}^{n} c_j \prod_{i\in\alpha_j} x_i \to \min_{(x_i)}, \qquad (1)$$

$$d_i\in R,\ c_j>0,\ \alpha_j\subset\{1,\dots,m\},\ |\alpha_j|\geqslant 2,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \qquad (2)$$

Рассмотрим следующую подзадачу

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(1-x_i)+\sum_{j=1}^{n} b_j \prod_{i\in\alpha_j} x_i \to \min_{(x_i)}, \qquad (3)$$

$$a_i\in R,\ b_j>0,\ \alpha_j\subset\{1,\dots,m\},\ |\alpha_j|\geqslant 2,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}. \qquad (4)$$

Л е м м а 1. Задача (1)-(2) сводится к подзадаче (3)-(4).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поставим в соответствие задаче (1)-(2) следующую задачу вида (3)-(4):

$$\sum_{j=1}^{n_1} c_j\tilde y_j+\sum_{i=1}^{m} d_i\tilde x_i+\sum_{j=n_1+1}^{n} c_j\prod_{i\in\alpha_j}\tilde x_i+G\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(1-\tilde x_i)(1-\tilde y_j)\to\min_{(\tilde x_i)(\tilde y_j)}, \qquad (5)$$

где $b_{ij}=\begin{cases}0, \text{ если } & i\notin\alpha_j\\ 1, \text{ если } & i\in\alpha_j\end{cases}$ и $G>\sum_{j=1}^{n} c_j+\sum_{i=1}^{m} d_i$.

Пусть $(\tilde x_i^*), (\tilde y_j^*)$ - оптимальное решение задачи (5). Покажем, что имеет место соотношение

$$\tilde y_j^*=1-\prod_{i\in\alpha_j}\tilde x_i^*. \qquad (6)$$

В самом деле, пусть существует $i\in\alpha_j$ такой, что $\tilde x_i^*=0$, тогда, в силу оптимальности данного решения, $\tilde y_j^*=1$, в случае же $\tilde x_i^*=1$ для всех $i\in\alpha_j$ по той же причине $\tilde y_j^*=0$. Следовательно, при поиске оптимального решения можно ограничиться булевыми векторами, удовлетворяющими соотношению (6). Равенством $x_i=\tilde x_i$ установим взаимно-однозначное соответствие между такими векторами и допустимыми решениями задачи (1)-(2). На соответствующих допустимых решениях значения полиномов задач (1)-(2) и (5) совпадают. Таким образом, если $(\tilde x_i^*), (\tilde y_j^*)$ - оптимальное решение задачи (5), то вектор $x_i=\tilde x_i^*,\ i=\overline{1,m}$,- оптимальное решение задачи (1)-(2). Лемма доказана.

Задачей о минимальном покрытии называют следующую задачу:

$$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i \to \min_{(u_i)}, \qquad (7)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \geqslant 1, \; j=\overline{1,n}, \tag{8}$$

$$u_i \in \{0,1\}, \; i=\overline{1,m}, \tag{9}$$

где $c_j \geqslant 0, \; a_{ij} \in \{0,1\}, \; i=\overline{1,m}, \; j=\overline{1,n}$.

Лемма 2. Задача (3)-(4) и задача о минимальном покрытии эквивалентны.

Доказательство. Пусть дана задача (3)-(4). Поставим ей в соответствие задачу о минимальном покрытии вида

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{k=1}^{n} b_k v_k \to \min_{(u_i)\,(v_k)}, \tag{10}$$

$$\sum_{i \in \alpha_k} u_i + v_k \geqslant 1, \quad k=\overline{1,n}, \tag{11}$$

$$u_i, v_k \in \{0,1\}, \; i=\overline{1,m}, \; k=\overline{1,n}. \tag{12}$$

Пусть (u_i^*), (v_k^*) - оптимальное решение этой задачи. Нетрудно проверить, что имеет место соотношение

$$v_k^* = \prod_{i \in \alpha_k} (1-u_i^*), \quad k=\overline{1,n}.$$

Всякому допустимому решению, удовлетворяющему этому соотношению, поставим в соответствие допустимое решение (x_i) задачи (3)-(4) по формуле $x_i = 1-u_i$. На соответствующих решениях значение полинома и целевой функции задачи (10)-(12) совпадают. Отсюда, если (u_i^*), (v_k^*) - оптимальное решение задачи (10)-(12), то вектор $x_i = 1-u_i^*$, $i=\overline{1,m}$ - оптимальное решение задачи (3)-(4).

Наоборот, пусть дана задача о минимальном покрытии (7)-(9). Рассмотрим задачу минимизации полинома вида

$$\sum_{i=1}^{m} c_i(1-x_i) + G\sum_{j=1}^{n} \prod_{i|a_{ij}=1} x_i \to \min_{(x_i)},$$

где $$G > \sum_{i=1}^{m} c_i .$$

При поиске оптимального решения этой задачи можно ограничиться допустимыми решениями, обращающими в нуль вторую сумму. Равенство $u_i = 1-x_i$, $i=\overline{1,m}$ устанавливает взаимно-однозначное соответствие между такими булевыми векторами и допустимыми решениями (u_i) задачи о минимальном покрытии (7)-(9). Так как на соответствующих допустимых решениях значения целевых функций задач совпадают, то оптимальному решению одной задачи соответствует оптимальное решение другой.

Из лемм 1 и 2 следует

Т е о р е м а 1. Задача минимизации полинома общего вида сводится к задаче о минимальном покрытии.

§ 2. Полиномы, задаваемые некоторыми графами

Рассмотрим следующую подзадачу общей задачи. Пусть задано растущее из корня ориентированное дерево $T=(V,E)$, $\mathcal{L}$ – множество всех его ориентированных цепей. Каждому такому дереву поставим в соответствие полином от булевых переменных $(x_e)(e\in E)$:

$$P_T((x_e))=\sum_{L\in\mathcal{L}} c_L \prod_{e\in L} x_e ,$$

где $c_L\in R$, $L\in\mathcal{L}$.

Полиномы, соответствующие ориентированным цепям, образуют класс правильных полиномов, эффективный алгоритм минимизации которых описан в [2]. Покажем, что этот алгоритм без принципиальных изменений может быть применен к полиномам, соответствующим произвольным растущим из корня деревьям.

Пусть e_1 – дуга, инцидентная висячей вершине дерева T, не являющейся корнем, $\mathcal{L}(e_1)$ – множество ориентированных цепей, содержащих дугу e_1. Тогда

$$P_T((x_e))=x_{e_1}\cdot\sum_{L\in\mathcal{L}(e_1)} c_L\prod_{e\in L} x_e+\sum_{L\in\mathcal{L}/\mathcal{L}(e_1)} c_L\prod_{e\in L} x_e .$$

Заметим, что множитель при x_{e_1} имеет тот же вид, что в случае правильных полиномов и, следовательно, можно, как в [2], исключить переменную x_{e_1}, заменив ее правильным полиномом от остальных переменных, и свести задачу к задаче минимизации полинома того же класса, но от меньшего числа переменных. На каждом шаге при этом рассматривается переменная, соответствующая дуге, инцидентной висячей вершине. В остальном алгоритм не отличается от алгоритма минимизации правильных полиномов, и потому мы не будем приводить его подробного описания.

Рассмотрим более широкий класс полиномов, задача минимизации которых сводится к задаче минимизации полинома P_T.

Пусть дан ориентированный граф $G=(V,E)$, состоящий из одного ориентированного цикла C, каждая вершина которого является корнем растущего дерева, причем все деревья имеют одинаковую ориентацию (см. рис. 1).

Пусть $\mathcal{L}$ обозначает множество всех ориентированных цепей графа G. Рассмотрим полином

$$P_G((x_e))=\sum_{L\in\mathcal{L}} c_L\prod_{e\in L} x_e ,$$

где $c_L\in R$, $L\in\mathcal{L}$.

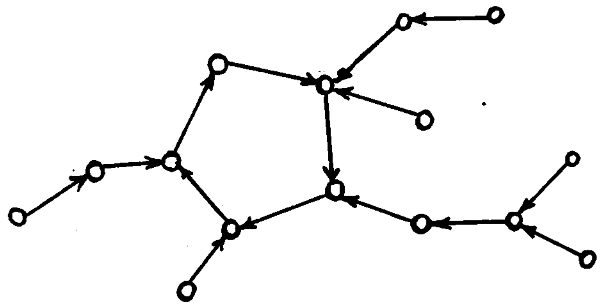

Рис. 1

Л е м м а 3. Задача минимизации полинома P_G сводится к задаче минимизации полинома, соответствующего растущему из корня дереву.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть цикл C состоит из дуг $e_1, \ldots, e_p$. Рассмотрим множества булевых векторов M_i, $i=\overline{1,p}$, задаваемые следующим образом:

$$M_i = \{(x_e)\,(e \in E) \mid x_{e_i} = 0\}.$$

Объединение этих множеств дает множество всех булевых векторов. Оптимальное решение задачи минимизации полинома P_G можно найти, решив серию из p задач минимизации этого полинома на множествах M_i, $i=\overline{1,p}$. Остается заметить, что каждая такая задача представляет собой задачу минимизации полинома, соответствующего растущему из корня дереву, откуда и следует утверждение леммы.

Класс полиномов P_G включает почти правильные полиномы, рассмотренные в [3]. Трудоемкость алгоритмов минимизации полиномов P_T и P_G соответственно $O(|E|^2)$ и $O(|E|^3)$.

§ 3. 3-связный полином

Булеву матрицу (h_{ij}) $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ будем называть характеристической матрицей полинома задачи (3)-(4), если

$$h_{ij} = \begin{cases} 0 \text{ при } & i \notin \alpha_j, \\ 1 \text{ при } & i \in \alpha_j. \end{cases}$$

Будем говорить, что булева матрица (h_{ij}) обладает свойством p-связности, если для любых i, K разность $h_{ij} - h_{Kj}$ меняет знак не более p раз при монотонном изменении j от 1 до n. Полином задачи (3)-(4) назовем p-связным, если его характеристическая матрица обладает свойством p-связности.

В [2] построены эффективные алгоритмы минимизации 1- и 2-связных полиномов. Следующий результат показывает, что дальнейшее продвижение на этом пути не расширяет класс эффективно минимизируемых полиномов.

Т е о р е м а 2. Задача минимизации 3-связного полинома NP-трудна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что к задаче минимизации 3-связного полинома сводится NP-трудная задача о минимальном вершинном покрытии кубического графа (см. [5]).

Пусть дан кубический граф $G=(V,E), |V|=m, |E|=n$, и пусть $(h_{ij})(i=\overline{1,m},\ j=1,\dots,n)$ – его матрица инциденций, а $c_i \geq 0$, $i=\overline{1,m}$, – веса вершин. Необходимо найти множество вершин минимального веса, покрывающее все ребра графа.

Рассмотрим следующую эквивалентную задачу (по лемме 2):

$$\sum_{i=1}^{m} c_i(1-x_i) + G\sum_{j=1}^{n} \prod_{i|h_{ij}=1} x_i \to \min_{(x_i)}, \tag{13}$$

где $G > \sum\limits_{i=1}^{m} c_i$.

Матрица (h_{ij}) является характеристической матрицей полинома задачи (13). Легко проверить, что она обладает свойством 5-связности.

Покажем, что полином задачи (13) перестановкой нелинейных членов всегда можно сделать 3-связным. Каждой такой перестановке соответствует некоторая нумерация ребер графа G. Поскольку граф кубический, то число его вершин m четно. Разобьем все вершины на пары (произвольным образом) и соединим каждую пару дополнительным ребром. В графе с дополнительными ребрами существует эйлеров цикл, который может быть эффективно найден известными алгоритмами. Начиная с любого ребра последовательно занумеруем ребра цикла, пропуская дополнительные, и переставим столбцы матрицы (h_{ij}) согласно этой нумерации. Нетрудно убедиться, что новая матрица обладает свойством 3-связности, что и требуется для доказательства.

§ 4. Полиномы с K вхождениями

Полином задачи (3)-(4) будем называть полиномом с K вхождениями, если для всякого $i \in \{1,\dots,m\}$ число номеров j таких, что $i \in \alpha_j$, не превосходит K, т.е. переменная x_i входит не более чем в K нелинейных членов

Т е о р е м а 3. Задача минимизации полинома с двумя вхождениями сводится к задаче о минимальном покрытии вершин графа ребрами.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нетрудно проверить, что задача сводится к случаю, когда каждая переменная входит ровно в два нелинейных члена. Докажем теорему для этого случая.

Согласно лемме 2 задача эквивалентна задаче о минимальном покрытии (10)-(12) с матрицей ограничений, состоящей из двух подматриц – транспонированной характеристической и единичной. Первая подматрица содержит по две единицы в каждом столбце. Переформулируем данную задачу как задачу на графе. Рассмотрим граф $G=(V,E)$, $V=\{1,\dots,m\}$, $E=\{1,\dots,n\}$, $a_i\geq 0$, $i\in V$, – веса вершин, $b_j\geq 0$, $j\in E$, – веса ребер. Задача заключается в отыскании покрытия вершин ребрами и вершинами минимального суммарного веса. Нетрудно проверить, что оптимальное решение данной задачи можно получить из оптимальных решений двух задач: обычной задачи о минимальном покрытии графа G ребрами и задачи о минимальном покрытии ребрами графа G', отличающегося от графа G одной дополнительной вершиной и дополнительными ребрами с весами a_i, $i\in V$, соединяющими эту вершину со всеми остальными. Теорема доказана.

Как показывает следующий результат, уже при $K=3$ задача становится труднорешаемой.

Т е о р е м а 4. Задача минимизации полинома с тремя вхождениями NP-трудна.

Для доказательства достаточно заметить, что по лемме 2 к рассматриваемой задаче сводится NP-трудная задача о минимальном вершинном покрытии кубического графа.

§ 5. Полиномы с разделяющимися переменными

В [4] рассматривалась следующая подзадача задачи (3)-(4):

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(1-x_i)+\sum_{j=1}^{n} b_j(1-y_j)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_iy_j \to \min_{(x_i)(y_j)}, \tag{14}$$

$$a_i, b_j\in R,\quad c_{ij}\geq 0,\quad i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n}. \tag{15}$$

Показано, что она сводится к эффективно решаемой задаче о максимальном потоке в сети.

Рассмотрим две похожие задачи:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(1-x_i)+\sum_{j=1}^{n} b_j(1-y_j)+\sum_{k=1}^{p} c_k(1-z_k)+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}x_iy_j+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{p} f_{ik}x_iz_k+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} h_{jk}y_jz_k \to \min_{(x_i)(y_j)(z_k)}, \tag{16}$$

$$a_i, b_j, c_k\in R,\ d_{ij}, f_{ik}, h_{jk}\geq 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,p}, \tag{17}$$

и

$$\sum_{i=1}^{m} a_i(1-x_i)+\sum_{j=1}^{n} b_j(1-y_j)+\sum_{k=1}^{p} c_k(1-z_k)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{p} d_{ijk}x_iy_jz_k \to \min_{(x_i)(y_j)(z_k)}, \tag{18}$$

$$a_i,\ b_j,\ c_k \in R,\ d_{ijk} \geqslant 0,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n},\ k=\overline{1,p}. \tag{19}$$

Т е о р е м а 5. Задачи (16)-(17) и (18)-(19) NP-трудны.

Для доказательства теоремы потребуются две леммы.

Л е м м а 4. Задача о минимальном вершинном покрытии 3-раскрашиваемого графа NP-трудна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что к задаче о минимальном вершинном покрытии 3-раскрашиваемого графа сводится общая задача о минимальном вершинном покрытии.

Пусть дан неориентированный граф $G=(V,E)$. Построим 3-раскрашиваемый граф $G'=(V',E')$ следующим образом. В множество вершин V' включим в качестве независимого подмножества множество вершин V графа G. Каждую пару вершин из этого подмножества, смежных в графе G, соединим тремя непересекающимися цепями длины 3 (см. рис. 2).

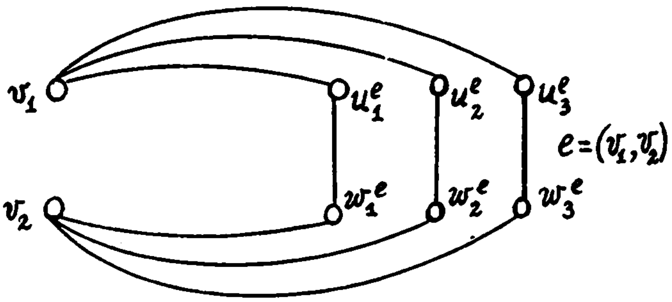

Рис. 2

Граф $G'=(V',E')$, полученный таким образом, является, очевидно, 3-раскрашиваемым, причем $|V'|=|V|+6|E|,\ |E'|=9|E|$. Покажем, что минимальное вершинное покрытие графа G' порождает минимальное вершинное покрытие графа G.

Рассмотрим отдельно подграф на рис. 2. Всякое тупиковое (минимальное по включению) вершинное покрытие графа G' содержит по крайней мере одну из вершин v_1, v_2 и тем самым индуцирует некоторое вершинное покрытие графа G. Обратно, всякому тупиковому вершинному покрытию графа G соответствует тупиковое вершинное покрытие графа G'. Остается заметить, что мощности соответствующих покрытий отличаются на постоянную величину $3|E|$. Следовательно, минимальному вершинному покрытию графа G' соответствует минимальное вершинное покрытие графа G. Лемма доказана.

Рассмотрим следующую подзадачу задачи о минимальном покрытии. Пусть имеется конечное множество I, разбиение его на три попарно непересекающихся подмножества I_1, I_2, I_3, и семейство трехэлементных подмножеств (троек) $J \subset \{T=\{i_1,i_2,i_3\},\ i_1\in I_1,\ i_2\in I_2,\ i_3\in I_3\}$. Необходимо найти подмножество минимальной мощности $C \subset I$ такое, что $C \cap T \neq \emptyset$ для всех $T \subset J$. Сформулированную задачу назовем задачей о минимальном покрытии троек.

Л е м м а 5. Задача о минимальном покрытии троек NP-трудна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сведем задачу о минимальном вершинном покрытии 3-раскрашиваемого графа к рассматриваемой задаче.

Пусть дан 3-раскрашиваемый граф $G=(V,E)$ и пусть V_i – множество вершин одного цвета, $i = 1,2,3$. Рассмотрим следующую задачу о минимальном покрытии троек. Множество I содержит множество вершин V графа G, причем $V_i \subset I_i$, $i = 1,2,3$. Каждой паре смежных вершин v_1, v_2 поставлены в соответствие три элемента u_1^e, u_2^e, u_3^e $(e=(v_1,v_2))$, принадлежащие множеству I_i, не содержащему вершины v_1 и v_2, при этом в множество троек J входят три тройки $\{v_1, v_2, u_1^e\}$, $\{v_1, v_2, u_2^e\}$ и $\{v_1, v_2, u_3^e\}$. Таким образом, имеем $|I| = |V| + 3|E|$, $|J| = 3|E|$. Остается заметить, что в данной задаче минимальное покрытие системы троек J содержит только элементы множества V и является одновременно минимальным вершинным покрытием графа G. Лемма доказана.

Доказательство теоремы вытекает из лемм 2, 4 и 5. По лемме 2 задача о минимальном вершинном покрытии 3-раскрашиваемого графа сводится к задаче (16)-(17), а задача о минимальном покрытии троек сводится к задаче (18)-(19).

Поступила в ред.-изд.отдел
26 августа 1983 г.

Л и т е р а т у р а

1. Береснев В.Л., Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Экстремальные задачи стандартизации. – Новосибирск: Наука, 1978, – 333 с.

2. Береснев В.Л. Алгоритмы минимизации полиномов от булевых переменных. – Проблемы кибернетики, 1979, вып. 36, с.225-246.

3. Белинская И.Г. Об одном классе полиномов от булевых переменных. – В кн.: Целочисленные экстремальные задачи (Управляемые системы). Новосибирск, 1981, вып. 21, с.6-12.

4. Агеев А.А. О минимизации некоторых полиномов от булевых переменных. – В кн.: Целочисленные экстремальные задачи (Управляемые системы). Новосибирск, 1981, вып. 21, с.3-5.

5. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи.– М.: Мир, 1982, – 416с.