Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1982 г., вып. 22.

УДК 517.977.8

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ ВРЕМЕНИ ПРЕСЛЕДОВАНИЯ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Е.М.Мухсинов

Исследуется оптимальность времени преследования в линейных дифференциальных играх, описываемых дифференциальными уравнениями с неограниченными операторами. Данное исследование примыкает к [1 - 5].

Пусть X - сепарабельное банахово пространство; Y - полное сепарабельное метризуемое пространство; Z - отделимое топологическое пространство; отображение $F: Y\times Z\times[0,\infty)\to X$ измеримо по $t\in[0,\infty)$ при каждом фиксированном $(u,v)\in Y\times Z$ и непрерывно по $(u,v)\in Y\times Z$ при каждом фиксированном $t\in[0,\infty)$, причем существует локально суммируемая функция $h:[0,\infty)\to[0,\infty)$ такая, что $\|F(u,v,t)\|\le h(t)$ при любых $u\in Y$, $v\in Z$, $t\in[0,\infty)$.

Дифференциальная игра описывается уравнением

$$\dot{x} = A(t)x + F(u,v,t) \qquad /1/$$

и замкнутым терминальным множеством $M\subset X$, где $t\ge t_0\ge 0$, а линейные замкнутые операторы $A(t):\mathcal{D}\to X$, имеющие не зависящую от $t\in[0,\infty)$ и плотную в X область определения $\mathcal{D}$, таковы, что при каждом $x\in\mathcal{D}$ отображение $t\to A(t)x$ непрерывно дифференцируемо на $[0,\infty)$ и при всех $t\ge 0$, $\lambda\ge 0$ резольвента $(A(t)-\lambda I)^{-1}$ оператора $A(t)$ определена, причем $\|(A(t)-\lambda I)^{-1}\|\le(1+\lambda)^{-1}$. При этих ограничениях на операторы $A(t)$ существует эволюционный оператор $\Phi(t,s)$ (см. [6]).

В дальнейшем множество всех измеримых отображений, действующих из $[a,b]$ в Y, будем обозначать через $\mathcal{U}([a,b],Y)$. Тогда при произвольных $u(\cdot)\in\mathcal{U}([0,\infty),Y)$, $v(\cdot)\in\mathcal{U}([0,\infty),Z)$, $x_0\in X$, $0\le t_0<\tau<\infty$, соответствующим этим данным решением задачи

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + F(u(t),v(t),t),\quad x(t_0)=x_0, \qquad /2/$$

на отрезке $[t_0,\tau]$ будем называть отображение $x(\cdot):[t_0,\tau]\to X$, задаваемое формулой

$$x(t) = \Phi(t,t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t}\Phi(t,s)F(u(s),v(s),s)\,ds,\quad t\in[t_0,\tau],$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера [7]. Отметим, что такое определение решения задачи /2/ принято, например, в [5]. Далее, отображения $u(\cdot), v(\cdot)$ будем называть соответственно *управлениями* *преследования* и *убегания*.

Следуя [I - 4], будем считать, что в игре /I/ из начальной точки (x_0,t_0) можно завершить преследование за время, не превосходящее числа $\tau(x_0)-t_0\geq 0$, если для любого $v(\cdot)\in\mathcal{U}([t_0,\tau(x_0)],Z)$ можно выбрать такое $u(\cdot)\in\mathcal{U}([t_0,\tau(x_0)],Y)$, что при некотором $\tau_0\in[t_0,\tau(x_0)]$ выполняется включение $x(\tau_0)\in M$, где $x(\cdot)$ - решение задачи /2/, соответствующее управлениям $u(\cdot)$ и $v(\cdot)$. При этом для нахождения значения $u(t)$ в каждый момент $t\in[t_0,\tau(x_0)]$ разрешается использовать $v(t)$ и $x(s), t_0\leq s\leq t$. Число $\tau(x_0)-t_0$ называется оптимальным временем преследования, если, во-первых, из начальной точки (x_0,t_0) можно завершить преследование за время, не превосходящее числа $\tau(x_0)-t_0$, и, во-вторых, при всех $t\in[t_0,\tau(x_0))$ для любого $u(\cdot)\in\mathcal{U}([t_0,t],Y)$ можно выбрать такое $v(\cdot)\in\mathcal{U}([t_0,t],Z)$, что для решения $x(\cdot)$ задачи /2/ выполняется условие $x(s)\bar{\in} M$ для всех $s\in[t_0,t]$. При этом для выбора $v(t)$ в каждый момент $t\in[t_0,\tau(x_0)]$ разрешается использовать значения $x(s)$, $t_0\leq s\leq t$, и $u(\xi)$, $t_0\leq t-\theta\leq\xi<t$, где θ - достаточно малое положительное число.

В п.I излагается вспомогательная лемма, в п.II - основные результаты о возможности завершения преследования и об оптимальности времени преследования, а в п.III - пример.

I. Множество всех непустых замкнутых подмножеств топологического пространства E обозначим через 2^E. Отображение $P:[a,b]\to 2^E$ называется замкнутым (секвенциально замкнутым), если его график $\Gamma(P)$ является замкнутым (секвенциально замкнутым) множеством в топологическом пространстве $[a,b]\times E$. Здесь секвенциальная замкнутость множества $\Gamma(P)\subset[a,b]\times E$ понимается в том смысле, что если произвольные последовательности $t_n\in[a,b]$ и $x_n\in P(t_n)$ такие, что $t_n\to t$, $x_n\to x$, то $t\in[a,b]$ и $x\in P(t)$.

Лемма. Пусть отображение $P:[a,b]\to 2^E$, $0<b-a<\infty$, секвенциально замкнуто, где E - отделимое линейное топологическое пространство, полученное в результате наделения банахова пространства X ослабленной топологией $\sigma(X,X^*)$ (см. [8]). Пусть M - компактное подмножество E. Тогда отображение $t\to M+P(t)$, действующее из $[a,b]$ в 2^E, секвенциально замкнуто.

Доказательство. Пусть $t_n\in[a,b]$, $t_n\to t$, и $x_n\in M+P(t_n)$, причем $x_n\to x$ в E. Очевидно, $t\in[a,b]$, поэтому достаточно показать, что $x\in M+P(t)$. Имеем $x_n=m_n+z_n$, где $m_n\in M$, $z_n\in P(t_n)$. В силу известной теоремы Эберлейна-Шмульяна [8], последовательность m_n содержит подпоследовательность m_{n_k}, сходящуюся в E к точке $m\in M$, так как, по условию, множество M компактно относительно топологии $\sigma(X,X^*)$. Следовательно, последовательность $z_{n_k}=x_{n_k}-m_{n_k}$ сходится в E к точке $x-m$. В то же время $t_{n_k}\to t$, $x_{n_k}-m_{n_k}=z_{n_k}\in P(t_{n_k})$. Поэтому $x-m\in P(t)$, так как, по условию, отображение $P:[a,b]\to 2^E$ секвенциально замкнуто. Значит, $x\in m+P(t)\subset M+P(t)$. Лемма доказана.

II. Положим

$$\Omega(t_0,t)=\int_{t_0}^{t}\bigcap_{v\in Z}\Phi(t,s)F(Y,v,s)\,ds\,,$$

где интеграл от многозначного отображения понимается как множество, состоящее из интегралов от интегрируемых по Бохнеру селекторов подынтегрального многозначного отображения [9].

Теорема I. Пусть выполнены следующие условия:

а/ начальная точка $(x_0,t_0)\in X\times[0,\infty)$ такая, что при некотором $t_1>t_0$ имеет место включение $\Phi(t_1,t_0)x_0\in M-\Omega(t_0,t_1)$;

б/ терминальное множество M компактно в ослабленной топологии $\sigma(X,X^*)$;

в/ отображение $t\to\Omega(t_0,t)$, $t\in[t_0,t_1]$, секвенциально замкнуто в ослабленной топологии $\sigma(X,X^*)$.

Тогда из точки (x_0,t_0) можно завершить преследование за время, не превосходящее числа $\tau(x_0)-t_0$, где

$$\tau(x_0)=min\{t\geq t_0:\ \Phi(t,t_0)x_0\in M-\Omega(t_0,t)\}. \qquad /3/$$

Доказательство. В силу условий "б", "в" и согласно доказанной лемме, отображение $t\to M-\Omega(t_0,t)$ секвенциально замкнуто в ослабленной топологии $\sigma(X,X^*)$. Отсюда, учитывая условие "а", нетрудно показать, что

$$\Phi(\tau(x_0),t_0)x_0\in M-\Omega(t_0,\tau(x_0)). \qquad /4/$$

На основании /4/ существуют некоторая точка $m\in M$ и такой интегрируемый селектор φ отображения $s\to\bigcap_{v\in Z}\Phi(\tau(x_0),s)F(Y,v,s)$, что

$$\Phi(\tau(x_0),t_0)x_0=m-\int_{t_0}^{\tau(x_0)}\varphi(t)\,dt\,. \qquad /5/$$

Пусть выбрано произвольное управление убегания $v(\cdot)\in\mathcal{U}([t_0,\tau(x_0)],Z)$. Тогда, в силу теоремы о неявной функции из [10], найдется управление преследования $u(\cdot)\in\mathcal{U}([t_0,\tau(x_0)],Y)$ такое, что

$$\varphi(t)=\Phi(\tau(x_0),t)F(u(t),v(t),t) \qquad /6/$$

для почти всех $t\in[t_0,\tau(x_0)]$.

Учитывая /5/ и /6/, в задаче /2/ для решения $x(\cdot)$, соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на отрезке $[t_0,\tau(x_0)]$, имеем $x(\tau(x_0))\in M$. Действительно,

$$x(\tau(x_0))=\Phi(\tau(x_0),t_0)x_0+\int_{t_0}^{\tau(x_0)}\Phi(\tau(x_0),t)F(u(t),v(t),t)\,dt=m\in M\,.$$

Теорема доказана.

Замечание. Описанный в доказательстве теоремы I способ выбора управления обеспечивает включение $x(\tau(x_0))\in M$. При этом

выбор $u(t)$ в каждый момент осуществляется исходя из информации о $v(t)$ и x_0. Теперь покажем, что если при выборе $u(t)$ в каждый момент t использовать информацию о $v(t)$ и $x(s)$, $t_0 \leq s \leq t$, то время достижения множества M не более числа $\tau(x_0)-t_0$. Фиксируем положительное число $\varepsilon \in (0, \tau(x_0)-t_0]$. Для натуральных чисел $K \geq 1$ положим $t_K = \min\{t_0 + K\cdot\varepsilon, \tau_{K-1}(x_0)\}$, где $\tau_0(x_0) = \tau(x_0)$ и $\tau_{K-1}(x_0) =$
$= \min\{t \in [t_{K-1}, \tau_{K-2}(x_0)] : \Phi(t, t_{K-1})\, x(t_{K-1}) \in M - \Omega(t_{K-1}, t)\}$
при $K \geq 2$. Управление преследования $u(\cdot)$ на отрезке $[t_0, t_1]$ выбираем по формуле /6/. Тогда, в силу /5/, /6/, имеем

$$\Phi(\tau(x_0), t_0)\, x_0 = m - \int_{t_0}^{t_1} \Phi(\tau(x_0), t)\, F(u(t), v(t), t)\, dt - \int_{t_1}^{\tau(x_0)} \varphi(t)\, dt .$$

С другой стороны, в задаче /2/ для решения $x(\cdot)$, соответствующего управлениям $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на отрезке $[t_0, t_1]$, получаем

$$x(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(t_1, t)\, F(u(t), v(t), t)\, dt + \Phi(t_1, t_0)\, x_0 .$$

Следовательно,

$$\Phi(\tau(x_0), t_1)\, x(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \Phi(\tau(x_0), t)\, F(u(t), v(t), t)\, dt +$$
$$+ \Phi(\tau(x_0), t_0)\, x_0 = m - \int_{t_1}^{\tau(x_0)} \varphi(t)\, dt .$$

Значит, имеет место включение

$$\Phi(\tau(x_0), t_1)\, x(t_1) \in M - \Omega(t_1, \tau(x_0)) .$$

Нетрудно видеть, что $0 \leq \tau_1(x_0) - t_1 \leq \tau(x_0) - t_1$, и если $\tau_1(x_0) = t_1$, то из определения числа $\tau_1(x_0)$ следует, что $x(t_1) \in M$. Если же $\tau_1(x_0) > t_1$, то на отрезке $[t_1, t_2]$ продолжим преследование из состояния $x(t_1)$, как из начального, выше описанным образом. Так как число $\varepsilon > 0$ фиксировано, то при некотором натуральном $n \geq 2$ имеем:

$$\tau_n(x_0) = t_n \quad \text{и} \quad \tau_K(x_0) > t_K \ \text{для всех} \ K \in \{1, 2, \dots, n-1\},$$

если при каждом K на отрезке $[t_K, t_{K+1}]$ преследование вести из состояния $x(t_K)$, как из начального. Следовательно, $x(t_n) \in M$ и $t_n - t_0 \leq \tau(x_0) - t_0$.

Теорема 2. Пусть выполнены условие "а" из теоремы I и следующие условия:

а/ терминальное множество M выпукло и компактно в ослабленной топологии $\sigma(X, X^*)$;

б/ отображение $t \to \Omega(t_0, t)$, $t \in [t_0, \tau(x_0)]$, выпуклозначно и замкнуто в ослабленной топологии $\sigma(X, X^*)$, где число $\tau(x_0)$ определяется из равенства /3/;

в/ существует отображение $\omega(\cdot): Y \to Z$ такое, что при всех $u \in Y$, $t \in [t_0, \tau(x_0)]$, $t \geq s \geq t_0$, выполняется

$$\Phi(t,s) F(u, \omega(u), s) \in \bigcap_{v \in Z} \Phi(t,s) F(Y, v, s)$$

и для каждого $u(\cdot) \in \mathcal{U}([t_0, \tau(x_0)], Y)$ суперпозиция $\omega(u(\cdot)) \in \mathcal{U}([t_0, \tau(x_0)], Z)$. Тогда время преследования $\tau(x_0) - t_0$ оптимально.

Доказательство. Утверждение о том, что из начальной точки (x_0, t_0) можно завершить преследование за время, не превосходящее числа $\tau(x_0) - t_0$, следует из теоремы I. Далее, в силу определения числа $\tau(x_0)$, следует, что при всех $t \in [t_0, \tau(x_0))$

$$[\Phi(t,t_0) x_0 + \Omega(t_0, t)] \cap M = \phi . \qquad /7/$$

Если ε - некоторое число из интервала $(t_0, \tau(x_0))$, то значения $v(t)$ управления убегания $v(\cdot) \in \mathcal{U}([t_0, \tau(x_0)], Z)$ на $[t_0, \varepsilon]$ выбираем произвольно, а при $t \in (\varepsilon, \tau(x_0))$ - специальным образом: $v(t) = \omega(u(t - \varepsilon + t_0))$. Тогда в задаче /2/ для решения $x(\cdot)$, соответствующего выбранным управлениям $u(\cdot), v(\cdot)$ на $[t_0, \tau(x_0))$, имеем

$$x(t) = \Phi(t,t_0) x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi(t,s) F(u(s), v(s), s)\, ds = \Phi(t,t_0) x_0 +$$
$$+ \int_{t_0}^{\varepsilon} \Phi(t,s) F(u(s), v(s), s)\, ds + \int_{\varepsilon}^{t} \Phi(t,s) F(u(s), \omega(u(s-\varepsilon+t_0)), s)\, ds.$$

В силу /7/, условий "а", "б" и согласно теореме о строгой отделимости [8], множества M и $\Phi(t,t_0) x_0 + \Omega(t_0,t)$ при всех $t \in [t_0, \tau(x_0))$ строго отделимы, т.е. при всех $t \in [t_0, \tau(x_0))$ можно найти такой непрерывный линейный функционал $\psi \in X^*$ и такие константы C и $\delta > 0$, что

$$\psi(x) \leq c - \delta < c \leq \psi(m) \qquad /8/$$

при всех $x \in \Phi(t,t_0) x_0 + \Omega(t,t_0)$ и $m \in M$.

Пусть $p(\cdot)$ - произвольный интегрируемый селектор отображения $s \to \bigcap_{v \in Z} \Phi(t,s) F(Y, v, s)$, $s \in [t_0, \varepsilon]$. Тогда на основании условия "в" и неравенств /8/ имеем

$$\psi(x(t)) = \psi\Big(\Phi(t,t_0) x_0 + \int_{t_0}^{\varepsilon} p(s)\, ds + \int_{\varepsilon}^{t} \Phi(t,s) F(u(s), \omega(u(s-\varepsilon+t_0)), s)\, ds\Big) +$$
$$+ \psi\Big(\int_{t_0}^{\varepsilon} \Phi(t,s) F(u(s), v(s), s)\, ds - \int_{t_0}^{\varepsilon} p(s)\, ds\Big) \leq c - \delta +$$
$$+ \int_{t_0}^{\varepsilon} \psi\big(\Phi(t,s) F(u(s), v(s), s) - p(s)\big)\, ds .$$

В силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега существует число $\varepsilon=\theta>t_0$ такое, что

$$\left|\int_{t_0}^{\theta}\Psi\big(\Phi(t,s)F(u(s),v(s),s)-\rho(s)\big)ds\right|<\frac{\delta}{2}.$$

Следовательно, $\Psi(x(t))\le C-\frac{\delta}{2}<C$. Поэтому число $\varepsilon=\theta>t_0$ и соответствующее ему управление $v(\cdot)$ можно выбрать так, что $x(t)\in M$ при всех $t\in[t_0,\tau(x_0))$, что и доказывает оптимальность времени преследования $\tau(x_0)-t_0$. Теорема доказана.

Замечания. I. Если при каждом $t\in[0,\infty)$ линейный оператор $A(t)$ ограничен, то доказанные теоремы верны и в том случае, когда от отображения $t\to A(t)$ требуется лишь локальная интегрируемость по Бохнеру.

2. Если замкнутый линейный оператор $A(t)\equiv A$ не зависит от t, то теоремы I и 2 верны и в том случае, когда вместо принятого выше ограничения на резольвенту оператора A выполняется более слабое требование, а именно: существует такое число β, что при всех $\lambda>\beta$ определена резольвента $(A-\lambda I)^{-1}$ оператора A, удовлетворяющая неравенству $\|(A-\lambda I)^{-n}\|\le C\cdot(\lambda-\beta)^{-n}$ при всех $\lambda>\beta$, $n=1,2,3,\dots$, где константа C не зависит от λ и n.

3. Доказанные выше теоремы I и 2 обобщают на бесконечномерный случай некоторые результаты из [I - 4]. Эти обобщения позволяют исследовать конфликтно-управляемые системы не только с сосредоточенными, но и с распределенными параметрами.

4. Впервые интеграл типа $\Omega(t_0,t)$ в конечномерном случае рассматривал академик Л.С.Понтрягин [I], а в бесконечномерном случае условие через множество $\Omega(t_0,t)$ впервые вводится в данной статье.

Ш. Пример. Дифференциальная игра задается гиперболическим уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}z(t,s)=\frac{\partial^2}{\partial s^2}z(t,s)+u(t,s)-v(t,s),$$

где $t\ge 0$, $s\in(-\infty,\infty)$. При каждом $t\ge 0$ функции $z(t,\cdot)$, $\frac{\partial}{\partial s}z(t,\cdot)$, $\frac{\partial^2}{\partial s^2}z(t,\cdot)$, $u(t,\cdot)$, $v(t,\cdot)$ принадлежат $L_2(-\infty,\infty)$, причем выполняются начальные условия: $z(0,s)\equiv z_0(s)$, $\frac{\partial}{\partial t}z(0,s)\equiv z_1(s)$, $z_1(\cdot)\in L_2(-\infty,\infty)$, и интегральные ограничения на управления:

$$\int_{-\infty}^{\infty}|u(t,s)|^2ds\le\beta^2,\quad \int_{-\infty}^{\infty}|v(t,s)|^2ds\le\gamma^2,\quad \forall t\ge 0\quad,\text{ где }\beta>\gamma\ge 0.$$

Положим

$$X=L_2(-\infty,\infty)\times L_2(-\infty,\infty),\quad M=\{x\in X:\ \|x\|\le\ell\},\ \ell\ge 0,$$

$$x(t)=\left(\frac{\partial}{\partial t}z(t,\cdot),\frac{\partial}{\partial s}z(t,\cdot)\right),\ \bar u(t)=(u(t,\cdot),0),\ \bar v(t)=(v(t,\cdot),0),$$

$$Y=\{(x_1,0)\in X:\|x_1\|\le\beta\},\quad Z=\{(x_1,0)\in X:\|x_1\|\le\gamma\}.$$

Тогда рассматриваемое гиперболическое уравнение принимает вид:

$$\dot x(t)=A\,x(t)+\bar u(t)-\bar v(t),$$

причем

$$x(0)=\left(z_1(\cdot),\frac{\partial}{\partial s}z_0(\cdot)\right),\ \|\bar u(t)\|\le\beta,\ \|\bar v(t)\|\le\gamma,$$

а оператор

$$A=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{\partial}{\partial s}\\ \dfrac{\partial}{\partial s} & 0\end{pmatrix},$$

отображающий $\mathcal{D}=\{y(\cdot)\in X:\frac{d}{ds}y(\cdot)\in X\}$ в X, порождает сильно непрерывную сжимающую группу $\Phi(t)$ (см. [11]). При этом $\Phi(t)\,y(s)=$ $=\Phi(t)(y_1(s),y_2(s))=\big((y_1(s+t)+y_1(s-t))/2+(y_2(s+t)-y_2(s-t))/2,$ $(y_1(s+t)-y_1(s-t))/2+(y_2(s+t)+y_2(s-t))/2\big)$.

В данном примере терминальное множество M выпукло и компактно в ослабленной топологии $\sigma(X,X^*)$, отображение $t\to\Omega(0,t)=$ $=\int_0^t\Phi(t-s)S_{\beta-\gamma}\,dt$, где $S_{\beta-\gamma}=\{(x_1,0)\in X:\|x_1\|\le\beta-\gamma\}$, выпуклозначно и замкнуто в ослабленной топологии $\sigma(X,X^*)$ (см. [9, 12]): в качестве отображения $\omega(\cdot):Y\to Z$ можно взять отображение, задаваемое формулой $\omega(u)=u\gamma/\|u\|$. Следовательно, используя теорему 2, получаем, что если при некотором $t_1\ge0$ имеет место включение

$$x(0)\in\Phi(-t_1)M-\int_0^{t_1}\Phi(-t)\,S_{\beta-\gamma}\,dt,$$

то из точки $x(0)$ можно завершить преследование за оптимальное время:

$$\tau(x_0)=\min\left\{t\in[0,t_1]:x(0)\in\Phi(-t)M-\int_0^t\Phi(-s)\,S_{\beta-\gamma}\,ds\right\}.$$

В частности, если $\ell<7(\beta-\gamma)/\sqrt{2}$, то из точки $x(0)=(z_1(\cdot),\partial z_0(\cdot)/\partial s)\in M$, где

$$z_1(s)=\begin{cases}\sqrt{1,5}\cdot\ell\cdot s-\sqrt{1,5}\cdot\ell-\sqrt{3}\,(\beta-\gamma)\cdot s & \text{при } s\in[0,1],\\ 0 & \text{при } s\,\bar\in\,[0,1],\end{cases}$$

$$z_0(s)=\begin{cases}\sqrt{0,375}\cdot\ell\cdot s^2-\sqrt{0,75}\,(\beta-\gamma)\cdot s-\sqrt{1,5}\cdot\ell s & \text{при } s\in[0,1],\\ 0 & \text{при } s\,\bar\in\,[0,1],\end{cases}$$

можно завершить преследование за время $\tau(x(0))=1$.

Поступила в ред.-изд.отдел
16 июня 1982 г.

Литература

1. Понтрягин Л.С. Линейные дифференциальные игры преследования.- Мат.сб., 1980, т. 112, № 3, с. 307-331.

2. Гусятников П.Б., Никольский М.С. Об оптимальности времени преследования.- Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 3, с. 518-521.

3. Сатимов Н.Ю. К полному исследованию задачи об "изохронных ракетах". - Докл. АН УзССР, 1980, № 9, с. 6-8.

4. Мухсинов Е.М. Дифференциальные игры преследования в банаховом пространстве. - Докл. АН УзССР, 1981, № 6, с. 7-9.

5. Friedman A.- Differential games of pursuit in Banach space.- J.Math. Analys. Appl., 1969, v. 25, N 1, p. 93-113.

6. Крейн С.Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. - М.: Наука, 1967. - 464 с.

7. Иосида К. Функциональный анализ.- М.: Мир, 1967. - 624 с.

8. Канторович Л.В., Акилов Г.П. Функциональный анализ. - 2-е изд., перераб. - М.: Наука, 1977. - 744 с.

9. Datko R. On the integration of set-valued mappings in a Banach space. - Fund. Math., 1973, v. 78, N 3, p. 205-208.

10. Castaing C., Valadier M. Convex analysis and measurable multifunctions. - Lecture Notes in Math., 1977, v. 580, p. 1-278.

11. Балакришнан А.В. Прикладной функциональный анализ. - М.: Наука, 1980. - 384 с.

12. Берж К. Общая теория игр нескольких лиц. - М.: Физматгиз, 1961. - 126 с.