Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1982 г., вып. 22.

УДК 519.854.2

АЛГОРИТМЫ С ОЦЕНКАМИ ДЛЯ ЗАДАЧ ДЖОНСОНА И АКЕРСА-ФРИДМАНА В СЛУЧАЕ ТРЕХ СТАНКОВ

С.В.Севастьянов

Задача Акерса-Фридмана формулируется следующим образом. На станках $C_1, \dots, C_m$ требуется выполнить операции над деталями $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_n$. Для каждой детали $\mathcal{D}_j$ указан технологический маршрут $\tau_j = (\tau_j(1), \dots, \tau_j(m))$, являющийся перестановкой чисел $\{1, 2, \dots, m\}$ ($\tau_j(i)$ означает номер станка, на котором выполняется i-я операция детали $\mathcal{D}_j$), и задана длительность a_{ij} обработки детали $\mathcal{D}_j$ на станке C_i, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. Расписание P будем считать заданным, если для каждой операции указаны интервалы времени ее выполнения. Допустимое расписание должно удовлетворять следующим условиям:

1. $(i+1)$ -я операция детали $\mathcal{D}_j$ не может начаться раньше момента окончания i -й операции;

2. на каждом станке выполняется одновременно не более одной операции.

Требуется найти оптимальное расписание, т.е. такое, при котором вся совокупность операций выполняется за наименьшее время $T(P)$.

В случае, когда $\tau_j = (1, 2, \dots, m)$ для всех $j = \overline{1,n}$, получаем задачу Джонсона. В [1] построен алгоритм трудоемкости $O(n^2)$, который для задачи Джонсона с тремя станками находит расписание с оценкой $T(P) \le A^* + 4a^*$, где $A^* = \max\limits_{i=\overline{1,m}} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}$, $a^* = \max\limits_{i,j} a_{ij}$.

В [2] для задачи Акерса-Фридмана с тремя станками приведен алгоритм построения расписания P_1 с оценкой $T(P_1) \le A^* + 3(3\sqrt{2}+5)a^*$.

В настоящей работе предлагаются алгоритм трудоемкости $O(n^2)$, находящий расписание задачи Акерса-Фридмана в случае $m=3$ с оценкой $T(P) \le A^* + 6a^*$, и алгоритм трудоемкости $O(n \log n)$, находящий расписание задачи Джонсона в случае $m=3$ с оценкой $T(P) \le A^* + 3a^*$, а также показывается, что последняя оценка неулучшаема.

Как и в [3], заметим, что указанные алгоритмы достаточно привести для случая, когда матрица (a_{ij}) удовлетворяет соотношениям

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = A^*, \quad i = \overline{1,m}. \qquad /1/$$

В самом деле, нетрудно предложить алгоритм трудоемкости $O(mn)$, который по всякой матрице (a_{ij}), $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, строит матрицу (a'_{ij}) со свойствами $a_{ij} \le a'_{ij} \le a^*$; $\sum_{j=1}^{n} a'_{ij} = A^*$, $i=\overline{1,m}$, а затем по расписанию задачи с матрицей (a'_{ij}) строит расписание той же длины для задачи с матрицей (a_{ij}).

В дальнейшем соотношения /I/ для рассматриваемых задач будем считать выполненными.

§ I. Задача Джонсона

Т е о р е м а I. Для задачи Джонсона с матрицей (a_{ij}), $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,n}$, с трудоемкостью $O(n \log n)$ может быть найдено расписание с оценкой

$$T(P) \le A^* + 3a^* . \qquad /2/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим векторы $b_j = (a_{1j} - a_{2j},\ a_{2j} - a_{3j}) \in R^2$, $j=\overline{1,n}$, и введем обозначения: $b_\pi^x = \sum_{j=1}^{x} b_{\pi(j)}$, $b(i)$ – i-я координата вектора b. Из соотношения /I/ следует, что $\sum b_j = 0$. Искомое расписание с оценкой /2/ будем искать среди так называемых стандартных расписаний P_π, в которых:

I) каждая операция выполняется непрерывно;

2) детали проходят через каждый станок в одной и той же последовательности π;

3) все операции выполняются в наиболее ранние сроки;

4) начальным моментом расписания является $t=0$.

Для длины стандартного расписания P_π задачи Джонсона известно выражение

$$T(P_\pi) = \max_{1 \le K_1 \le K_2 \le n} \left(\sum_{j=1}^{K_1} a_{1,\pi(j)} + \sum_{j=K_1}^{K_2} a_{2,\pi(j)} + \sum_{j=K_2}^{n} a_{3,\pi(j)} \right).$$

Заменяя $a_{1,\pi(K_1)}$ и максимальный из элементов $a_{2,\pi(K_2)}$, $a_{3,\pi(K_2)}$ на a^*, получаем оценку

$$T(P_\pi) \le 2a^* + A^* + T'(P_\pi), \qquad /3/$$

где $T'(P_\pi) = \max_{x=\overline{1,n}} b_\pi^x(1) + \max_{x \in X(\pi)} b_\pi^x(2)$, $X(\pi) = \{x \in \{1,2,\dots,n\} : b_\pi^x(2)$ не является строгим локальным максимумом функции $\nu(x) = b_\pi^x(2)\}$.

Построим перестановку π, удовлетворяющую оценкам:

$$b_\pi^x(1) \le 0, \quad x=\overline{1,n}, \qquad /4/$$

$$b_\pi^x(2) \le a^*, \quad x \in X(\pi), \qquad /5/$$

что вместе с /3/ гарантирует нам оценку /2/.

Для каждого вектора b_j, $j=\overline{1,n}$, вычислим угловую координату

$\alpha(b_j)\in[0,2\pi)$, удовлетворяющую соотношению $\alpha(b)=\arg(-b(2)-b(1)i)$, и упорядочим числа $j=\overline{1,n}$ по неубыванию величин $\alpha(b_j)$: $(j_1,\dots,j_n)\doteq\pi'$. Если просуммировать векторы b_j в порядке π', то получится выпуклая замкнутая ломаная, целиком лежащая в полуплоскости $b(1)=0$ (см. рис. I). Перестановку $\pi(s)$ будем определять индукцией по $s=\overline{1,n}$ так, чтобы для любого $k=\overline{1,n}$ множество $\{\pi(s),\ s=\overline{1,k}\}$ состояло из некоторых начального и конечного отрезков последовательности π', и чтобы выполнялись условия /4/,/5/.

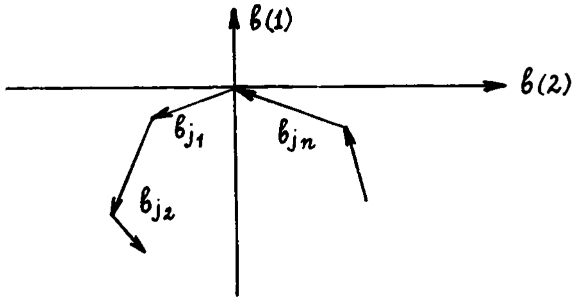
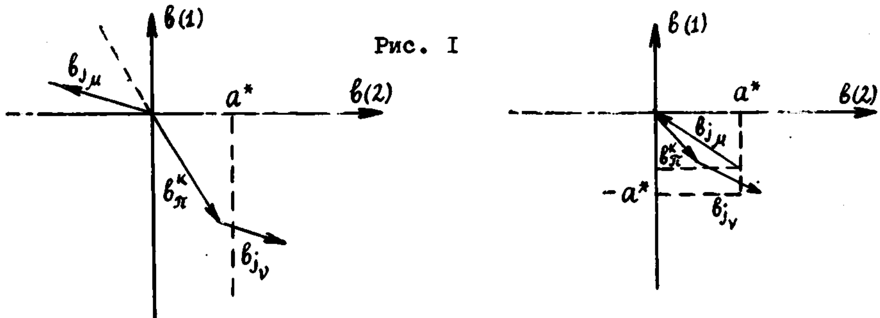


Рис. I



а б

Рис. 2

Положим $\pi(1):=j_1$.

Пусть $\pi(s)$ определено для $s=\overline{1,k}$, $k<n$; $b_\pi^k(1)\le 0$; $b_\pi^k(2)\le a^*$; $\{1,2,\dots,n\}\setminus\{\pi(s),\ s=\overline{1,k}\}=\{j_\nu, j_{\nu+1},\dots,j_m\}$. Тогда $b_\pi^k(1)+b_{j_\nu}(1)\le 0$, и если $b_\pi^k(2)+b_{j_\nu}(2)\le a^*$, то положим $\pi(k+1):=j_\nu$, после чего неравенства /4/, /5/ для $x=k+1$ выполнены. Если $(b_\pi^k(2)+b_{j_\nu}(2)>a^*)\,\&\,(b_\pi^k(1)+b_{j_\mu}(1)\le 0)$ (см.рис. 2,а), то положим $\pi(k+1):=j_\mu$ и неравенства /4/, /5/ для $x=k+1$ выполнены. Если $(b_\pi^k(2)+b_{j_\nu}(2)>a^*)\,\&\,(b_\pi^k(1)+b_{j_\mu}(1)>0)$ (см. рис. 2,б), то положим $\pi(k+1):=j_\nu$, $\pi(k+2):=j_\mu$. Поскольку $b_\pi^k(2)+b_{j_\mu}(2)\le 0$, то $b_\pi^{k+2}(2)\le a^*$, в то время как $b_\pi^{k+1}(2)$ является локальным максимумом функции $\nu(x)$ и, следовательно, $(k+1)\notin X(\pi)$. Одновременно выполняется $b_\pi^{k+1}(1)\le -b_{j_\mu}(1)\le 0$, откуда $b_\pi^{k+2}(1)\le 0$. Таким образом, неравенства /4/, /5/ выполнены при $x=k+2$, что завершает обоснование индукционного шага. Поскольку самой трудоемкой операцией в алгоритме является упорядочение чисел $j=\overline{1,n}$ по неубыванию величин $\alpha(b_j)$, то его трудоемкость равна $O(n\log n)$.

Теорема I доказана.

Следующий пример показывает, что оценка /2/ неулучшаема в том смысле, что для любого $\varkappa<3$ можно построить такую матрицу (a_{ij}), $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,n}$, что длина оптимального расписания P_0 задачи Джонсона с матрицей (a_{ij}) удовлетворяет оценке снизу

$$T(P_0)>A^*+\varkappa a^*. \qquad /6/$$

Пример. Для N деталей I-го типа выполнено

$$a_{1j}=a_{3j}=1-\varepsilon,\ a_{2j}=1;$$

для K деталей 2-го типа выполнено $a_{1j}=a_{3j}=1, a_{2j}=0$, где $\varepsilon=K/N$. Имеем $A^*=N$, $a^*=1$. Пусть $\pi=(\pi(1),\ldots,\pi(n))$ – произвольная перестановка, где $n=N+K$. Очевидно, K деталей 2-го типа делят перестановку π на $(K+1)$ отрезков, заполненных номерами деталей I-го типа, причем хотя бы один из отрезков имеет длину не менее $N/(K+1)$. Пусть таковым является отрезок $(\pi(j_1),\ldots,\pi(j_2))$. Для стандартного расписания P_π справедлива оценка

$$T(P_\pi)\geqslant\sum_{j=1}^{j_1}a_{1,\pi(j)}+\sum_{j=j_1}^{j_2}a_{2,\pi(j)}+\sum_{j=j_2}^{n}a_{3,\pi(j)}\geqslant$$

$$\geqslant(n+2)(1-\varepsilon)+\varepsilon N/(K+1)=N+K+2-K-(K+2)K/N+K/(K+1)=$$

$$=A^*+3-1/(K+1)-(K+2)K/N. \qquad /7/$$

Поскольку для задачи Джонсона с тремя станками хотя бы одно оптимальное расписание является стандартным, то из /7/ следует, что для любого $\varkappa<3$ найдется задача Джонсона с матрицей (a_{ij}), $i=\overline{1,3}$, $j=\overline{1,n}$, оптимальное расписание которой удовлетворяет оценке /6/.

§ 2. Задача Акерса-Фридмана

Теорема 2. Для задачи Акерса-Фридмана $(m=3)$ с трудоемкостью $O(n^2)$ может быть построено расписание P с оценкой

$$T(P)\leqslant A^*+6a^*. \qquad /8/$$

Для доказательства используется следующий результат.

Лемма. Пусть $\{b_1,\ldots,b_n\}\subset Ш_0$, $\sum b_j=0$, где $Ш_0=\{x=(x(1),x(2))\in R^2: |x(i)|\leqslant1,\ i=1,2;\ |x(1)-x(2)|\leqslant1\}$. Тогда с трудоемкостью $O(n^2)$ может быть построена такая перестановка $\pi=(\pi(1),\ldots,\pi(n))$, что

$$\sum_{j=1}^{k}b_{\pi(j)}\in1.5\,Ш_0,\quad k=\overline{1,n}.$$

(Доказательство приведено в [4, с.68–69]).

Доказательство теоремы 2. Через O_{ij} обозначим операцию обработки детали $\mathcal{D}_j$ на станке C_i.

Построение расписания. Определим векторы $b_j=(a_{1j}-a_{3j}, a_{2j}-a_{3j})\in R^2$, $j=\overline{1,n}$. Тогда из /I/ имеем $b_j \in a^* Ш_0$, $\sum b_j = 0$, откуда с трудоемкостью $O(n^2)$ можно найти перестановку π такую, что $\sum_{j=1}^{k} b_{\pi(j)} \in$ $\in 1.5\, a^* Ш_0$, $k=\overline{1,n}$. Последнее эквивалентно условию

$$\left| \sum_{j=1}^{k} a_{i_1,\pi(j)} - \sum_{j=1}^{k} a_{i_2,\pi(j)} \right| \le 1.5 a^*, \quad k=\overline{1,n}, \qquad /9/$$

для любых $i_1, i_2 \in \{1,2,3\}$.

Далее расписание будет строиться на тех же принципах, что и в [2], а именно:

I) при наличии деталей, готовых к запуску на станок, последний не простаивает;

2) при наличии очереди деталей, готовых к запуску на станок C_i, приоритет между ними устанавливается следующим образом:

а) любая I-я или 2 -я операция какой-либо детали приоритетнее любой 3-й;

б) в совокупности I-х и 2-х операций приоритет устанавливается согласно перестановке π (т.е. операция $O_{i,\pi(j_1)}$ выполняется раньше операции $O_{i,\pi(j_2)}$, если $j_1 < j_2$) ;

в) между 3-ми операциями приоритет произвольный.

Докажем, что любое расписание, построенное в соответствии с принципами I, 2, удовлетворяет оценке /8/.

Для станка C_i выделим интервалы непрерывной работы и интервалы простоя. Моменты перехода от простоя к работе будем обозначать $t_0^i, t_2^i, t_4^i, \ldots$, а моменты перехода от работы к простою-через t_1^i , $t_3^i, \ldots$, где $0=t_0^i \le t_1^i < t_2^i < t_3^i < \ldots < t_{2\ell_i+1}^i < t_{2\ell_i+2}^i = \infty$, $t_{2\ell_i+1}^i$ - момент окончания работы станка C_i . В силу I-го принципа, справедливо

Замечание. Для любых $k=\overline{1,\ell_i+1}$ и $t\in [t_{2k-1}^i, t_{2k}^i)$ все детали, пришедшие на станок C_i до момента t , успевают обработаться на нем также до момента t .

Пусть $O_{i,\pi(j)}$ - I-я операция детали $\mathcal{D}_{\pi(j)}$. Тогда, в силу принципов упорядочения деталей на станке, она заканчивается не позднее момента $\sum_{k=1}^{j} a_{i,\pi(k)}$.

Пусть $O_{i_1\pi(j)}, O_{i_2,\pi(j)}$ - соответственно I-я и 2-я операции детали $\mathcal{D}_{\pi(j)}$. Тогда на станок C_{i_2} деталь $\mathcal{D}_{\pi(j)}$ придет не позднее момента $\sum_{k=1}^{j} a_{i_1\pi(k)} \le$ (в силу /9/) $\le \sum_{k=1}^{j} a_{i_2,\pi(k)} + 1.5 a^*$.

Пусть $O_{i,\pi(j)}$ - 2-я операция детали $\mathcal{D}_{\pi(j)}$, которая выполняется в интервале $[\tau_{i,\pi(j)}^{н}, \tau_{i,\pi(j)}^{к}) \subset [t_{2s}^i, t_{2s+1}^i)$. Если среди операций, выполняемых на станке C_i в интервале времени $[t^i_{2s}, \tau^{н}_{i,\pi(j)})$, существуют менее приоритетные, чем $O_{i,\pi(j)}$, операции, то рассматриваем последнюю из них $(O_{i,\pi(j_0)})$; если же таких операций нет, то можем считать, что последняя из них имеет нулевую длительность и выполняется в интервале $[t^i_{2s}, t^i_{2s})$. Операции, последовательно выполняемые на станке C_i после $O_{i,\pi(j_0)}$ до $O_{i,\pi(j)}$, пронумеруем: $O_{i,\pi(j_1)}, O_{i,\pi(j_2)}, \dots, O_{i,\pi(j_\nu)}$, где $j_\nu = j$. Поскольку все операции $O_{i,\pi(j_k)}$, $k=\overline{1,\nu}$, не менее приоритетны, чем $O_{i,\pi(j)}$, то все они являются либо I-ми, либо 2-ми операциями своих деталей, причем $j_k \le j$, $k=\overline{1,\nu}$. Пусть $\min\limits_{k=\overline{1,\nu}} j_k$ достигается при $k=z$. В момент прихода (не позднее момента $\sum\limits_{k=1}^{j_z} a_{i,\pi(k)} + 1.5a^*$) детали $D_{\pi(j_z)}$ на станок C_i последний может быть занят какой-то (менее приоритетной) деталью. Следовательно, к выполнению операции $O_{i,\pi(j_z)}$ станок приступит не позднее момента $\sum\limits_{k=1}^{j_z} a_{i,\pi(k)} + 2.5a^*$, а закончит ее не позднее момента $\sum\limits_{k=1}^{j_z} a_{i,\pi(k)} + 3.5a^*$, откуда заключаем, что операция $O_{i,\pi(j)}$ закончится не позднее момента $\sum\limits_{k=1}^{j_z} a_{i,\pi(k)} + \sum\limits_{k=z+1}^{\nu} a_{i,\pi(j_k)} + 3.5a^* \le$ (поскольку все j_k, $k=\overline{z+1,\nu}$, различны и содержатся в интервале $(j_z, j]$) $\le \sum\limits_{k=1}^{j} a_{i,\pi(k)} + 3.5a^*$).

Итак, если $O_{i_2,\pi(j)}$, $O_{i_3,\pi(j)}$ соответственно 2-я и 3-я операции детали $D_{\pi(j)}$, то операция $O_{i_2,\pi(j)}$ закончится не позднее момента $\sum\limits_{k=1}^{j} a_{i_2,\pi(k)} + 3.5a^*$ и, в силу /9/, на станок C_{i_3} деталь $D_{\pi(j)}$ придет не позднее момента $\sum\limits_{k=1}^{j} a_{i_3,\pi(k)} + 5a^*$. Пусть $T = A^* + 5a^*$. Поскольку любая деталь приходит на место выполнения последней операции над ней не позднее момента T , то, в силу замечания, либо станок C_i заканчивает работу не позднее момента T , либо $T \in [t^i_{2\ell_i}, t^i_{2\ell_i+1})$. Покажем, что во втором случае простой станка C_i (измеряемый в интервале $[0, t^i_{2\ell_i+1}]$) составляет не более $6a^*$, откуда будет следовать оценка /8/.

Если $t^i_{2\ell_i} \le 5a^*$, то простой станка C_i не превышает $5a^*$.

Пусть $t^i_{2\ell_i} > 5a^*$ и t - произвольное число из интервала $[t^i_{2\ell_i-1}, t^i_{2\ell_i})$. Найдем w такое, что $\sum\limits_{j=1}^{w} a_{i,\pi(j)} \le t - 5a^* < \sum\limits_{j=1}^{w+1} a_{i,\pi(j)}$. В силу замечания, все детали $D_{\pi(j)}$, $j=\overline{1,w}$, успевают обработаться на станке C_i до момента t . Следовательно, до момента t простой станка

C_i составит не более $t - \sum_{j=1}^{w} a_{i,\pi(j)} < 5a^* + a_{i,\pi(w+1)} \le 6a^*$, откуда, в силу произвольности $t \in [t^i_{2\ell_i-1}, t^i_{2\ell_i})$, простой станка C_i до момента $t^i_{2\ell_i}$ (а значит, и до момента $t^i_{2\ell_i+1}$) составляет не более $6a^*$.

Трудоемкость алгоритма складывается из трудоемкости нахождения перестановки π и трудоемкости нахождения наиболее приоритетной детали из очереди на станок C_i $(i=\overline{1,3})$ в момент окончания обработки на нем очередной детали. Таким образом, весь алгоритм может быть реализован с трудоемкостью $O(n^2)$, что завершает доказательство теоремы 2.

Поступила в ред.-изд.отдел
16 октября 1981 г.

Литература

1. Душин Б.И. Замечание к алгоритму в одномаршрутной задаче Джонсона. - Кибернетика, 1980, № 2, с. 129-131.

2. Бабушкин А.И., Башта А.Л., Белов И.С. Построение календарного плана для многомаршрутной задачи трех станков. - Автоматика и телемеханика, 1976, № 7, с. 154-158.

3. Белов И.С., Столин Я.Н. Алгоритм в одномаршрутной задаче календарного планирования.- В кн.: Математическая экономика и функциональный анализ. - М.: Наука, 1974, с. 248-257.

4. Севастьянов С.В. Оценки и свойства функций Штейница. - В кн.: Дискретный анализ. Новосибирск, 1981, вып. 36, с. 59-73.