Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1982 г., вып. 22

УДК 62-52

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ДИСКРЕТНЫХ НЕПОЛНЫХ НАБЛЮДЕНИЯХ

В.И.Болдырев

Решается задача стохастического оптимального управления линейными системами, возбуждаемыми белым шумом. Предполагается, что информация о состоянии системы поступает в дискретные моменты времени. Предлагается способ построения стабилизирующего оптимального управления, зависящего линейно от результатов измерений.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bu + w_1 ,$$
$$x(0) = x_0 ,$$
$$y(t_i) = Hx(t_i) + w_2(t_i), \quad t_i = iT, \qquad /1/$$
$$i \in I = \{0, 1, \dots\} ,$$

где x – n-мерный вектор состояния; u – r-мерный вектор управления; y – ℓ-мерный вектор выходных переменных; w_1 – случайный процесс типа белого шума с нулевым средним значением и корреляционной матрицей $E\{w_1(t)\,w_1^*(\tau)\} = V_1\,\delta(t-\tau)$ (δ – дельта-функция); $\{w_2(t_i)\}$ – последовательность некоррелированных случайных величин с нулевым средним значением и корреляционной матрицей $E\{w_2(t_i)\,w_2^*(t_i)\} = V_2$; T – заданная положительная константа. Матрицы $A, B, H,$ V_1 и V_2 постоянные и имеют размерности $n\times n$, $n\times r$, $\ell\times n$, $n\times n$ и $\ell\times\ell$ соответственно.

Предположим, что последовательности случайных величин $w_2(t_i)$ и $\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-\tau)} w_1(\tau)\,d\tau, \quad i \in I$, взаимно некоррелированы.

Здесь и всюду ниже подразумевается, что интеграл от случайной величины является интегралом Ито. Далее, пусть $x(t_0)$ – случайная величина со средним значением $\bar{x}_0$ и ковариационной матрицей G_0, некоррелированная с w_1 и w_2. Допустимыми управлениями будем считать функции

$$u = -M(t)\,y(t_i), \quad t \in [t_i, t_{i+1}), \qquad /2/$$
$$i \in I .$$

Здесь $M(t)$ – $r\times\ell$-матрица, элементами которой являются кусочно-непрерывные по t функции.

Рассмотрим критерий

$$c_i = E\{x^*(t_{i+1})\, w\, x(t_{i+1})\}, \qquad /3/$$

где w - положительно определенная симметрическая матрица. Управление $u^0 = -M^0(t)\,y(t_i)$, $i \in I$, называется оптимальным, если для любого i оно доставляет минимум функционалу /3/. Управления /2/ будем называть стабилизирующими (в среднем), если система

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} - BM(t)H\bar{x}(t_i),$$
$$t \in [t_i, t_{i+1}),\ i \in I, \qquad /4/$$
$$\bar{x}(t) = E\{x(t)\}$$

асимптотически устойчива, т.е. все решения системы /4/ стремятся к нулю при $t \to \infty$.

З а д а ч а. Построить оптимальное стабилизирующее управление.

Всюду в дальнейшем будем пользоваться следующими обозначениями: $N(t)$ - произвольная матрица ра мерности $r \times \ell$, для которой выполняется условие

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-A(\tau - t_i)} B N(\tau)\, d\tau = 0, \qquad /5/$$

$Q(i)$ - ковариационная матрица случайной величины $\acute{x}^0(t_i)$, соответствующей оптимальному управлению u^0, а матрицы $G^0(i)$ определим с помощью рекуррентных соотношений:

$$G^0(i) = FQ(i)H^*[v_2 + HQ(i)H^*]^{-1},$$
$$Q(i+1) = [F - G^0(i)H]Q(i)F^* + \tilde{v}_1,\ i \geq 0, \qquad /6/$$
$$Q(0) = Q_0,$$

$$F = e^{AT},\ \tilde{v}_1 = \int_0^T e^{A(T-\tau)} v_1 e^{A^*(T-\tau)} \qquad /7/$$

Если V - квадратная матрица, то $V > 0$ означает, что V - положительно определенная матрица; если V - произвольная прямоугольная матрица, то $R[V]$ означает ранг матрицы V. Положим $L(P, S) = (S, PS, \ldots, P^{n-1}S)$, где P, S - произвольные постоянные матрицы размерности $n \times n$ и $n \times s$ соответственно.

Пусть система /I/ полностью управляема и полностью наблюдаема [I], т.е.

$$R[L(A, B)] = n,\ R[L(A^*, H^*)] = n. \qquad /8/$$

Предположим, что

$$v_2 > 0,\ \int_0^T e^{-A\tau} v_1 e^{-A^*\tau}\, d\tau > 0. \qquad /9/$$

Т е о р е м а. Если система /I/ удовлетворяет условиям /8/ и /9/ и для шага дискретности T выполнено соотношение $R[L(e^{A^*T}, H^*)] = n$, то оптимальное стабилизирующее управление существует и определяется по формулам

$$u^0 = -M^0(t)\, y(t_i), \qquad /I0/$$
$$t \in [t_i, t_{i+1}),\ i \in T,$$
$$M^0(t) = B^* e^{-A^*(t-t_i)} \mathcal{D}^{-1} e^{-AT} G^0(i) + N(t), \qquad /II/$$
$$\mathcal{D} = \int_0^T e^{-A\tau} B B^* e^{-A^*\tau}\, d\tau,$$

Оптимальные значения критерия качества /3/ определяются выражением

$$c_i^0 = tr\,[Q(i+1)\, w].$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем вначале, что оптимальное управление существует, и дадим способ его построения. Замкнем систему /I/ управлением /2/ и проинтегрируем ее на промежутке $[t_i, t_{i+1}]$. В результате получим

$$x(t) = K(t)\, x(t_i) - \int_{t_i}^{t} e^{A(t-\tau)} B M(\tau)\, d\tau\, w_2(t_i) +$$
$$+ \int_{t_i}^{t} e^{A(t-\tau)} w_1(\tau)\, d\tau, \quad t \in [t_i, t_{i+1}], \qquad /I2/$$
$$K(t) = e^{A(t-t_i)} - \int_{t_i}^{t} e^{A(t-\tau)} B M(\tau)\, d\tau\, H;$$
$$x(t_{i+1}) = K(t_{i+1})\, x(t_i) - \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-\tau)} B M(\tau)\, d\tau\, w_2(t_i) +$$
$$+ \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-\tau)} w_1(\tau)\, d\tau. \qquad /I3/$$

В обозначениях

$$\xi(i) = x(t_i),$$
$$\omega_1(i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-\tau)} w_1(\tau)\, d\tau,$$
$$\omega_2(i) = w_2(t_i),$$
$$G(i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-\tau)} B M(\tau)\, d\tau,$$
$$F = e^{AT}$$

выражения /I3/ и /3/ примут вид

$$\xi(i+1) = F\,\xi(i) - G(i)\, H\,\xi(i) + \omega_1(i) - G(i)\,\omega_2(i),$$
$$i \geq 0, \qquad /I4/$$
$$\xi(0) = x_0,$$

$$c_i = E\{\xi^*(i+1)\, w\, \xi(i+1)\} \to \min_G. \qquad /I5/$$

В силу предположения, величины $\omega_1(i)$ и $\omega_2(i)$ образуют последовательности взаимно некоррелированных случайных величин. Среднее значение и корреляционная матрица процесса $\omega_1(i)$ равны соответственно

$$E\{\omega_1(i)\} \equiv 0 \qquad \text{для всех} \quad i \geqslant 0,$$

$$\tilde{v}_1 = E\{\omega_1(i)\,\omega_1^*(i)\} = \int_0^T e^{A(T-\tau)} v_1 e^{A^*(T-\tau)} d\tau .$$

Таким образом, требуется найти последовательность матриц $G^0(j)$, $j = 0, 1, \ldots, i$, такую, чтобы функционал /I5/ достигал минимума.

Вывод формул /6/, /7/, которым удовлетворяют матрицы $G^0(j)$, аналогичен выводу формул [2, с. 600–602] для оптимальных коэффициентов усиления дискретного фильтра Калмана в случае линейного оценивания фазовых координат. Пусть матрицы $G^0(i)$, $i \geqslant 0$, найдены. Так как система /I/ полностью управляема, то существует матрица $M^0(t)$ такая, что

$$G^0(i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-\tau)} B M^0(\tau)\, d\tau .$$

Согласно [3, с. 36–39], такая матрица имеет вид /5/, /II/. Тем самым управление /I0/ минимизирует функционал /3/. Оптимальное управление построено.

Покажем теперь, что управление u^0 является стабилизирующим в среднем. Для этого достаточно показать, что все решения дискретной системы

$$\bar{\xi}(i+1) = [F - G^0(i) H]\, \bar{\xi}(i), \quad \bar{\xi}(i) = E\{\xi(i)\} \qquad /I6/$$

стремятся к 0 при $i \to \infty$.

Так как система /I/ полностью наблюдаема, то, согласно [4], почти для всех T ранг

$$R\,[L(F^*, H^*)] = n ,$$

т.е. почти для всех T система /I4/ полностью наблюдаема. Тогда дискретная система

$$z(i+1) = F^* z(i) + H^* \zeta \qquad /I7/$$

полностью управляема по ζ. Поэтому существует управление

$$\zeta(i) = -S(i)\, z(i), \quad i = 0, 1, \ldots, i_1 - 1,$$

минимизирующее функционал

$$J = \sum_{i=0}^{i_1-1} \left[z^*(i+1)\, \tilde{v}_1\, z(i+1) + \zeta^*(i)\, v_2\, \zeta(i)\right] + $$
$$+ z^*(i_1)\, Q_0\, z(i_1) , \qquad /I8/$$

где $i_1 > 0$ – фиксированное целое число. Установившийся закон управления $\tilde{\zeta} = -\tilde{S}z(i)$, получающийся при $i_1 \to \infty$, будет асимптотически устойчив (см., напр. [2], теорема 6.31, с. 565), т.е. матрица $F^* - H^*\tilde{S}$ асимптотически устойчива. Так как уравнение для ковариационной матрицы $E\{\xi(i)\,\xi^*(i)\}$ совпадает с уравнением для матрицы

$$E\left\{[\xi(i) - \bar{\xi}(i)]\,[\xi(i) - \bar{\xi}(i)]^*\right\}$$

(см. [2], теорема 6.44, с. 605), то в силу дуальности задач /I4/, /I5/ и /I7/, /I8/ имеем

$$S(i) = G^{o*}(i_1 - 1 - i), \quad i \le i_1 - 1 .$$

Но так как $S(i) \to \tilde{S}$, $G^o(i) \to \tilde{G}$ при $i \to \infty$, а матрица $F^* - H^*\tilde{S}$ асимптотически устойчива, то матрица $F - \tilde{G}H$ также будет асимптотически устойчивой. Отсюда легко заключаем, что все решения системы /I6/ при $i \to \infty$ стремятся к решениям асимптотически устойчивой системы

$$\bar{\xi}(i+1) = [F - \tilde{G}H]\,\bar{\xi}(i),$$

т.е. система /I6/ асимптотически устойчива. Поскольку матрица

$$K^o(t) = e^{A(t-t_i)} - \int_{t_i}^{t} e^{A(t-\tau)} BM^o(\tau)\,d\tau\, H$$

равномерно ограничена относительно всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$, $i \in I$, причем $\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{A(t_{i+1}-\tau)} BM^o(\tau)\,d\tau = G^o(i)$, то и все решения непрерывной системы

$$\frac{d\bar{x}}{dt} = A\bar{x} - BM^o(t)M\bar{x}(t_i),$$
$$t \in [t_i, t_{i+1}], \; i \in I,$$
$$\bar{x}(t) = E\{x(t)\}$$

тоже стремятся к нулю. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е I. Если исходная система не стационарна, но по-прежнему равномерно полностью управляема и равномерно полностью наблюдаема [I], все результаты остаются в силе.

З а м е ч а н и е 2. Как видно из формул /5/ и /II/, оптимальное управление не единственно, а существует целое семейство оптимальных управлений (матрица $N(t)$ произвольная, удовлетворяющая лишь условию /5/). Поэтому имеется возможность выбирать управление, не только минимизирующее функционал /3/, но и удовлетворяющее дополнительным требованиям (в частности, минимизирующее некоторые дополнительные функционалы, например, минимизирующее какую-либо норму матрицы $M(t)$). Так если рассмотреть функционал $J_i = \int_0^{t_{i+1}} u^{o*} u^o\,dt$, то минимум этого функционала достигается при $N(t) \equiv 0$.

Поступила в ред.-изд.отдел
4 июня I98I г.

Литература

I. Калман Р.Е. Об общей теории управления. I-й межд. конг. ИФАК. -М.: Наука, I960, с. 52I-547.

2. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные оптимальные системы управления.- М.: Мир, I977, - 650 с.

3. Зубов В.И. Лекции по теории управления.- М.: Наука, I975, - 203 с.

4. Болдырев В.И., Смирнов Е.Я. Стабилизация при наличии дискретной информации о состоянии системы.- В сб.: Управляемые системы, Новосибирск, вып. 20, I980, с. 28-40.