Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1981 г., вып. 21
УДК 517.977.1

РЕАЛИЗАЦИЯ МНОГОЗНАЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНЫМИ УПРАВЛЯЕМЫМИ СИСТЕМАМИ

С.И.Суслов

Пусть в конечномерном евклидовом пространстве R^n в каждый момент времени $t \in T = [0,1]$ задано множество $F(t)$. Мы хотим в классе дифференциальных управляемых систем выбрать достаточно простую систему так, чтобы за время t ее множество достижимости $\mathcal{D}(t)$ мало отличалось от $F(t)$. Точнее вопрос ставится так: существует ли такая линейная управляемая система

$$\dot{x} \tilde{\in} A(t)x + U(t), \quad x(0) \in F(0),$$

что при всех $t \in T$ множества $\mathcal{D}(t)$ и $F(t)$ совпадают с точностью до заданного $\varepsilon > 0$.

Поскольку в непрерывном случае множества достижимости линейной системы выпуклы, то естественно рассматривать только функции F с выпуклыми значениями. В дискретном же случае вопрос можно ставить для произвольных функций F.

В работе к исследованию поставленной задачи намечено два подхода. Достоинством первого подхода, излагаемого в § 2, является то, что линейная система, множества достижимости которой $\mathcal{D}(t)$ приближают множества $F(t)$, строится в том же пространстве R^n. Однако остается неизвестным, верно ли естественно желаемое включение $F(t) \subseteq \mathcal{D}(t)$ всюду на T. Кроме того, класс реализующих систем получается очень широким в том смысле, что, вообще говоря, могут понадобиться системы с произвольными функциями управляемости U. Этих недостатков лишен второй подход, излагаемый в § 3, при котором гарантируется включение $F(t) \subseteq \mathcal{D}(t)$ и функция управляемости тождественно равна единичному симплексу $S^m = \{x \in R^m : \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1,\dots,m\}$. Но в этом случае реализующая система строится в пространстве R^m, $m \geq n$, и чем точнее мы хотим реализовать функцию F, тем, вообще говоря, больше требуется размерность m. В § 4 показывается, как полученные результаты можно применить к задаче приближения областей достижимости произвольной управляемой системы областями достижимости линейной управляемой системы.

§ 1. Основные определения и обозначения

Многозначной функцией $F : T \to X$ для двух множеств T, X называется функция на T со значениями в множестве всех непустых подмножеств множества X. Мы будем в основном рассматриват многозначные функции из T в R^n.

Пусть $(T,\mathcal{A})$ – измеримое пространство, X – топологическое пространство. Многозначная функция $F: T \to X$ называется измеримой, если для любого открытого подмножества $A \subseteq X$ справедливо

$$\{t \in T : F(t) \cap A \neq \emptyset\} \in \mathcal{A}.$$

На отрезке $T = [0,1]$ рассмотрим дифференциальное включение, выполняемое почти всюду на T:

$$\dot{x} \,\tilde{\in}\, A(t)x + U(t), \quad x(0) \in O, \qquad /1/$$

где $A: T \to \mathcal{L}(X,X)$ – измеримое отображение в пространство линейных непрерывных отображений банахова пространства X в себя, $U: T \to X$ – измеримое многозначное отображение, O – подмножество X.

Здесь и в дальнейшем символ $\tilde{\in}$ означает, что включение выполняется почти всюду.

Областью достижимости за время $t \in T$ назовем множество $\mathcal{D}(t) = \{y \in X : y = x(t)\}$, где абсолютно непрерывная функция $x: T \to X$ удовлетворяет системе /1/.

Многозначную функцию $F: T \to X$ назовем абсолютно непрерывной, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для любых точек $s_1 < t_1 \le s_2 < \dots < t_n$ таких, что $\sum_{i=1}^{n}(t_i - s_i) \le \delta$, справедливо

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(F(t_i), F(s_i)) \le \varepsilon,$$

где ρ – расстояние Хаусдорфа.

Совокупность абсолютно непрерывных многозначных функций $F: T \to X$ с замкнутыми, ограниченными и выпуклыми значениями обозначим через $AC(T,X)$.

Будем говорить, что система /1/ ε-реализует функцию $F \in AC(T,X)$, если для всех $t \in T$ выполняется $\rho(F(t), \mathcal{D}(t)) \le \varepsilon$, и ε-реализует сверху, если, кроме того, $F(t) \subseteq \mathcal{D}(t)$. Совокупность функций $F \in AC(T,X)$, точно реализуемых ($\varepsilon = 0$) системами типа /1/, будем обозначать через $\Lambda(T,X)$.

В дальнейшем для множества $A \subseteq R^n$ выражения $co A$ и $\overline{co} A$ обозначают соответственно его выпуклую и замкнутую выпуклую оболочки, $|A| = \{\sup |x| : x \in A\}$, а скалярное произведение векторов $x, y \in R^n$ обозначается через $\langle x, y \rangle$.

§ 2. ε-реализация функции $F \in AC(T,R^n)$ в пространстве R^n

Т е о р е м а 1. Для любой функции $F \in AC(T,R^n)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $G \in \Lambda(T,R^n)$, что $\rho(F(t), G(t)) \le \varepsilon$ для всех $t \in T$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выберем $\delta > 0$ таким, что $\rho(F(t), F(s)) \le \varepsilon/4$ при $|t-s| \le \delta$, и возьмем такое разбиение $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ отрезка T, что $|t_i - t_{i-1}| \le \delta$, $i = 1, \dots, n$.

Зададим рекуррентно вспомогательную многозначную функцию Φ в точках разбиения следующим образом:

$$\Phi(t_0) = F(t_0),\ \Phi(t_i) = \Phi(t_{i-1}) + \lambda_i F(t_i),$$

где $\lambda_0 = 1$, а $\lambda_i \in R$ выбираются так, что

$$\lambda_i^{-1} |\Phi(t_{i-1})| \le \varepsilon/4,\quad \lambda_{i-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1})^{-1} |F(t_i)| \le \varepsilon/4,$$

а в точках $t \in (t_{i-1}, t_i)$ – в некотором смысле линейно:

$$\Phi(t) = \Phi(t_{i-1}) + \varphi_i(t) \lambda_i F(t_i),$$

где $\varphi_i(t) = (t - t_{i-1})(t_i - t_{i-1})^{-1},\ i = 1, \dots, n.$

Заметим теперь, что функция Φ реализуется следующей системой:

$$\dot{x} \tilde{\in} U(t),\ x(t_0) \in \Phi(t_0), \qquad /2/$$

где $U(t) = \lambda_i (t_i - t_{i-1})^{-1} F(t_i)$ для $t \in [t_{i-1}, t_i]$.
Действительно, область достижимости $\mathcal{D}(t)$ системы /2/ за время t совпадает в этом случае с интегралом Аумана [I] от функции управляемости U. Поэтому при $t \in [t_{i-1}, t_i]$ имеет место

$$\mathcal{D}(t) = \Phi(t_0) + \int_{t_0}^{t} U = \Phi(t_0) + \sum_{j=1}^{i-1} \int_{t_{j-1}}^{t_j} U + \int_{t_{j-1}}^{t} U =$$

$$= \Phi(t_0) + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j F(t_j) + \varphi_i(t) \cdot \lambda_i \cdot F(t_i) = \Phi(t).$$

Для точки $t \in [t_{i-1}, t_i],\ i = 1, \dots, n$, определим линейное преобразование $A(t)$ как сжатие пространства R^n в $\mu(t)$ раз, где

$$\mu(t) = (\lambda_{i-1} + \varphi_i(t)(\lambda_i - \lambda_{i-1}))^{-1}.$$

Функция $A : T \to \mathcal{L}(R^n, R^n)$ абсолютно непрерывна. Следовательно, почти всюду на T существуют операторы $dA/dt\,(t) = \dot{A}(t)$. Тогда, сделав в /2/ замену переменных $y(t) = A(t)\, x(t)$, получим, что система

$$\dot{y} \tilde{\in} \dot{A}(t) A^{-1}(t) y + A(t)\, U(t),\ y(t_0) \in F(t_0) \qquad /3/$$

точно реализует функцию $A\Phi$.

Покажем теперь, что /3/ ε-реализует функцию F. Для этого достаточно показать, что $\rho(A(t) \cdot \Phi(t), F(t)) \le \varepsilon$ для всех $t \in T$. Возьмем точку $t \in T$ и предположим, что $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Тогда

$$\Delta(t) = \rho(A(t)\Phi(t), F(t)) \le \rho(\mu(t)\Phi(t), F(t_i)) + \rho(F(t_i), F(t)).$$

Но, по выбору δ, имеем $\rho(F(t_i), F(t)) \le \varepsilon/4$ и

$$\rho(\mu(t)\Phi(t), F(t_i)) \le \rho(\mu(t)(\lambda_{i-1} F(t_i) + \varphi_i(t) \lambda_i F(t_i)), F(t_i)) +$$

$$+ \rho(\mu(t)\Phi(t_{i-1}), \mu(t)\lambda_{i-1} F(t_{i-1})) + \rho(\mu(t)\lambda_{i-1} F(t_{i-1}), \mu(t)\lambda_{i-1} F(t_i)).$$

Теперь воспользуемся тем, что для $\lambda, \mu > 0$ справедливо

$$\rho(\lambda A, \lambda B) = \lambda \rho(A, B), \quad \rho(\lambda A, \mu A) \le |\lambda - \mu| \cdot |A|.$$

Тогда, учитывая специальный выбор δ и λ_i, $i = 1, \dots, n$, получаем

$$\rho(\mu(t)(\lambda_{i-1} F(t_i) + \varphi_i(t)\lambda_i F(t_i)), F(t_i)) \le$$

$$\le [(\lambda_{i-1} + \varphi_i(t)\lambda_i)(\lambda_{i-1} + \varphi_i(t)(\lambda_i - \lambda_{i-1}))^{-1} - 1] \cdot |F(t_i)| \le \lambda_{i-1}(\lambda_i - \lambda_{i-1})^{-1} |F(t_i)| \le \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\rho(\mu(t)\Phi(t_{i-1}), \mu(t)\lambda_{i-1} F(t_{i-1})) \le \mu(t)\lambda_{i-1}\rho(\lambda_{i-1}^{-1}\Phi(t_{i-1}), F(t_{i-1})) \le$$

$$\le \mu(t)\lambda_{i-1} |\lambda_{i-1}^{-1} \Phi(t_{i-2})| \le \varepsilon/4, \qquad i = 2, \dots, n,$$

$$\rho(\mu(t)\lambda_{i-1} F(t_{i-1}), \mu(t)\lambda_{i-1} F(t_i)) \le \mu(t)\lambda_{i-1}\rho(F(t_{i-1}), F(t_i)) \le \varepsilon/4.$$

Таким образом, получаем суммарную оценку $\Delta(t) \le \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon$, что заканчивает доказательство.

§ 3. ε -реализация сверху

Доказывается ключевая для излагаемого способа построения реализаций сверху

Лемма I. Пусть совокупность абсолютно непрерывных функций $x_i : T = [0, 1] \to R^n$, $i = 1, \dots, n$, такова, что при каждом $t \in T$ векторы $\{x_i(t)\}_{i=1}^{n}$ линейно-независимы, а многозначная функция F определяется соотношениями $F(t) = co\{x_i(t)\}_{i=1}^{n}$, $t \in T$. Тогда $F \in \Lambda(T, R^n)$.

Доказательство. Обозначим через $A'(t)$ линейный взаимно-однозначный оператор, переводящий $x_i(t)$ в e_i, $i = 1, \dots, n$, где совокупность $\{e_i\}_{i=1}^{n}$ образует базу пространства R^n. Тогда функция $A^{-1} \cdot F$, где $A^{-1}(t) = (t+1)A'(t)$, $t \in T$, реализуется системой

$$\dot{x} \,\tilde{\in}\, S^n, \qquad x(0) \in S^n, \qquad /4/$$

где $S^n = co\{e_i\}_{i=1}^{n}$. Действительно, области достижимости системы /4/ совпадают с интегралом Аумана от функции управляемости

$$\mathcal{D}(t) = S^n + \int_0^t S^n = (t+1) S^n = A^{-1}(t) F(t).$$

Так как функции x_i, $i = 1, \dots, n$, абсолютно непрерывны, то почти всюду на T существуют операторы $dA/dt\,(t) = \dot{A}(t)$. Следовательно, преобразованием переменных $y(t) = A(t)\, x(t)$ система /4/ переводится в систему

$$\dot{y} \,\tilde{\in}\, \dot{A}(t) A^{-1}(t) y + A(t) S^n, \quad y(0) \in F(0),$$

которая реализует функцию F.

Теперь дальнейшая программа ясна: для функции $F\in AC(T,R^n)$ надо построить близкую сверху к ней функцию $G\in AC(T,R^m)$, значениями которой являются m-угольники с линейно-независимыми вершинами. Поскольку для хорошего приближения необходимо, вообще говоря, $m>n$, то функция G будет строиться в пространстве большей размерности, чем исходное, а функция F будет рассматриваться как лежащая в некотором его подпространстве.

Первый шаг на намеченном пути – это приближение выпуклозначных функций многограннозначными, подкласс которых в $AC(T,X)$ будем обозначать через $AP(T,X)$.

Лемма 2. Пусть $F\in AC(T,R^n)$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ существует $G\in AP(T,R^n)$ такая, что при всех $t\in T$ $\rho(F(t),G(t))\le\varepsilon$ и $G(t)=co\{x_i(t)\}_{i=1}^m$ для некоторых абсолютно непрерывных функций

$$x_i: T\to R^n,\quad i=1,\dots,m.$$

Доказательство. Выберем $\delta>0$ и разбиение $t_0<t_1<\ldots<t_n$ отрезка T такие, что $\rho(F(t),F(s))\le\varepsilon/6$ при $|t-s|\le\delta$, а $|t_i-t_{i-1}|\le\delta$, $i=1,\dots,n$. Мы всегда можем считать, что для всех $t\in T$ множества $F(t)$ содержатся в некотором стандартном n-мерном кубе с центром в начале координат и диагональю длиной $2M$. Поскольку выпуклый компакт в R^n есть пересечение не более, чем счетного множества полупространств, то из единичной сферы в R^n мы можем выбрать совокупность $L=\{\ell_i\}_{i=1}^K$ такую, что

$$\rho(F(t_i),\ G(t_i))\le\varepsilon/3,\quad i=0,1,\dots,n,$$

где

$$G(t)=\bigcap_{j\le K}\{x\in R^n:\ \ell_j(x)\le\delta(F(t),\ell_j)\},\quad \delta(A,\ell)=\sup\{\ell(x):x\in A\}$$

для $t\in T$. В силу компактности сферы в R^n мы можем считать, что L является $\varepsilon/6M$-сетью на ней. Кроме того, мы всегда можем считать, что базисные векторы содержатся в L и, следовательно, $|G(t)|\le M$ для всех $t\in T$. Пусть теперь ℓ – некоторый единичный вектор, а ℓ' – ближайший к нему вектор из множества L. Тогда $\sup\{\ell(x):x\in G(t)\}$ и $\sup\{\ell'(x):x\in G(t)\}$ достигаются на одной вершине $y(t)$. Следовательно,

$$|\delta(G(t),\ell)-\delta(G(t),\ell')|=|\ell(y(t))-\ell'(y(t))|\le|\ell-\ell'|\,|y(t)|\le\varepsilon/6,$$

для всех $t\in T$ и

$$|\delta(G(t),\ell)-\delta(G(t_i),\ell)|\le|\delta(G(t),\ell)-\delta(G(t),\ell')|+$$

$$+|\delta(G(t_i),\ell)-\delta(G(t_i),\ell')|+|\delta(G(t),\ell')-\delta(G(t_i),\ell')|\le$$

$$\le\varepsilon/6+\varepsilon/6+|\delta(F(t),\ell')-\delta(F(t_i),\ell')|\le\varepsilon/2,$$

$i=1,\dots,n$, для $t\in(t_{i-1},t_i)$. Таким образом,

$$\rho(G(t), G(t_i)) = \sup\{|\delta(G(t),\ell) - \delta(G(t_i),\ell)| : |\ell| = 1\} \leq \varepsilon/2$$

и

$$\rho(G(t), F(t)) \leq \rho(G(t), G(t_i)) + \rho(G(t_i), F(t_i)) + \rho(F(t_i), F(t)) \leq \varepsilon .$$

Заметим теперь, что множество $G(t)$ является многогранником, каждую вершину которого можно получить как решение системы

$$\ell_i(x) = \delta(F(t), \ell_i), \qquad /5/$$

$i = 1,\dots,n$, где линейно-независимые функционалы $\{\ell_i\}_{i=1}^n$ входят в L. Поскольку правая часть в системе /5/ абсолютно непрерывна по t, то и решение обладает тем же свойством. Следовательно, существует совокупность абсолютно непрерывных функций $\{x_i\}_{i=1}^m$ такая, что $G(t) = co\{x_i(t)\}_{i=1}^m$, при всех $t \in T$ и $G \in AP(TR^n)$.

Для построения многогранника с линейно-независимыми вершинами нужна следующая

Лемма 3. Предположим, что, используя лемму 2, мы приблизили некую многозначную функцию многограннозначной функцией F и $\mathrm{Int}\, F(t) \neq \emptyset$, $F(t) \subseteq R^{n+} = \{x \in R^n : x_i > 0\}$ для всех $t \in T$. Тогда существуют такие абсолютно непрерывные функции f_i, $i = 1,\dots,n$, что для всех $t \in T$ точки $\{f_i(t)\}_{i=1}^n$ линейно-независимы и лежат в $F(t)$.

Доказательство. По предположению, существуют единичные векторы $\{\ell_i\}_{i=1}^m$ и абсолютно непрерывные функции $\{x_i\}_{i=1}^K$, $\{\alpha_i\}_{i=1}^m$ такие, что

$$F(t) = co\{x_i(t)\}_{i=1}^K = \bigcap_{j \leq m} \{x \in R^n : \ell_i(x) \leq \alpha_i(t)\}$$

для всех $t \in T$. Следовательно, функция $f = \sum_{i=1}^K K^{-1} x_i$ абсолютно непрерывна и $f(t) \in \mathrm{Int}\, F(t)$ при всех $t \in T$. Кроме того, функция λ_{ij}, значением которой в точке $t \in T$ является решение системы

$$\ell_j(f(t) + \lambda e_i) = \alpha_j(t),\ i = 1,\dots,n,\ j = 1,\dots,m,$$

где $\{e_i\}_{i=1}^n$ - база пространства R^n, также абсолютно непрерывна. Положим

$$\lambda_i(t) = \min_j \{\max\{0, \lambda_{ij}(t)\}\}$$

для $t \in T$ и покажем, что функции $f_i = f + \lambda_i e_i$, $i = 1,\dots,n$, удовлетворяют условиям леммы. Действительно, функции $\{f_i\}_{i=1}^n$ абсолютно непрерывны, так как абсолютно непрерывны функции f и $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$. Предположим теперь, что при некотором $t \in T$ точки $\{f_i(t)\}_{i=1}^n$ линейно-зависимы. Тогда существует набор из n чисел $(\mu_1,\dots,\mu_n) \neq 0$ такой, что $\sum_{i=1}^n \mu_i f_i(t) = 0$, т.е.

$$\Big(\sum_{i=1}^n \mu_i\Big) f(t) + \sum_{i=1}^n \mu_i \lambda_i(t) e_i = 0 .$$

Пусть $f(t)=\sum_{i=1}^{n} \nu_i(t)\, e_i$. По предположению, $\nu_i(t)>0$, $i=1,\dots,n$.

Тогда соотношение

$$\nu_i(t)\sum_{j=1}^{n}\mu_j=-\lambda_i(t)\mu_i\ , \quad i=1,\dots,n$$

возможно только при $\sum_{j=1}^{n}\mu_j=0$. Но в этом случае

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i\lambda_i(t)e_i=0\ ,$$

что противоречит базисности векторов $\{e_i\}_{i=1}^{n}$.

Теперь мы можем доказать основную теорему этого параграфа.

Т е о р е м а 2. Пусть $F\in AC(T,R^n)$, $F(t)\subseteq R^{n+}$, $t\in T$. Для любого $\varepsilon>0$ существуют натуральное число m_ε и функция $G_\varepsilon\in\Lambda(T,R^{m_\varepsilon})$ такие, что $\rho(F(t),G_\varepsilon(t))\le\varepsilon$ и $F(t)\subseteq PG_\varepsilon(t)$, $t\in T$, где P означает проекцию на первые n координат.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Без ограничения общности мы можем считать, что $I_n\, t\, F(t)\ne\emptyset$. В противном случае рассматривается функция $F+B_\delta$, где B_δ – шар радиуса δ с центром в начале координат. По лемме 2, существует совокупность абсолютно непрерывных функций $\{f_i\}_{i=n+1}^{m_\varepsilon}$ такая, что

$$F(t)\subseteq co\{f_i(t)\}_{i=n+1}^{m_\varepsilon}=F'(t),\ \ \rho(F(t),F'(t))\le\varepsilon/2$$

для всех $t\in T$. Учитывая сделанное замечание, получаем, что $I_n\, t\, F'(t)\ne\emptyset$. Тогда, по лемме 3, существует совокупность абсолютно непрерывных функций $\{f_i\}_{i=1}^{n}$ такая, что при каждом $t\in T$ точки $\{f_i(t)\}_{i=1}^{n}$ линейно-независимы и входят в $F'(t)$. Следовательно, многозначная функция G_ε , определенная соотношением

$$G_\varepsilon(t)=co\{g_i(t)\}_{i=1}^{m_\varepsilon}\ ,$$

где

$$g_i(t)=f_i(t),\quad i=1,\dots,n,$$

$$g_i(t)=f_i(t)+\varepsilon/2\cdot(m_\varepsilon-n)^{-1}e_i,\quad i=n+1,\dots,m_\varepsilon\ ,$$

удовлетворяет условиям леммы I. Таким образом, $G_\varepsilon\in\Lambda(T,R^{m_\varepsilon})$. Кроме того, простые вычисления показывают, что $\rho(F(t),G_\varepsilon(t))\le\varepsilon$. Наконец, включение $F(t)\subseteq PG_\varepsilon(t)$ сразу следует из построения.

§ 4. Область достижимости управляемой системы – абсолютно непрерывная функция времени

В этом параграфе показывается, что при достаточно общих предположениях функция достижимости управляемой системы абсолютно непрерывна и, следовательно, к ней могут применяться результаты предыдущих параграфов.

Л е м м а 4. Рассмотрим управляемую систему

$$\dot{x} \,\tilde{\in}\, f(t, x, U(t)), \quad x(t_0) \in O, \qquad /6/$$

где многозначная функция $U: T \to R^n$ измерима, а функция $f: T \times R^n \times R^K \to R^n$, измеримая по первому аргументу и непрерывная по остальным, удовлетворяет условию

$$\langle x, f(t, x, u)\rangle \le C|x|^2 + \tau(t) \qquad /7/$$

с положительной константой C и суммируемой функцией τ. Функция достижимости $\mathcal{D}$ системы /6/ абсолютно непрерывна.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как $\rho(A,C) = max\{\bar{\rho}(A,C), \bar{\rho}(C,A)\}$, где $\bar{\rho}(A,C) = \sup\limits_{A} \inf\limits_{C}(a-c)$, то достаточно показать абсолютную непрерывность с заменой в определении ρ на $\bar{\rho}$. Возьмем последовательность $s_1 < t_1 \le \ldots \le s_n < t_n$ и выберем точки $a_i \in \mathcal{D}(s_i)$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что

$$\bar{\rho}(\mathcal{D}(s_i), \mathcal{D}(t_i)) \le \inf\{|a_i - c| : c \in \mathcal{D}(t_i)\} + \varepsilon .$$

Тогда если x_i - такая траектория системы /6/, что $x_i(s_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$, то

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}(\mathcal{D}(s_i), \mathcal{D}(t_i)) \le \sum_{i=1}^{n} |x_i(s_i) - x_i(t_i)| + n\varepsilon \le \sum_{i=1}^{n} \int_{s_i}^{t_i} |\dot{x}_i| + n\varepsilon .$$

Но условие /7/ и неравенство Гронуола дают

$$|\dot{x}(t)| \le \tau(t) + K,$$

где $K > 0$, для любой траектории системы /6/. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{\rho}(\mathcal{D}(s_i), \mathcal{D}(t_i)) \le \int_I (\tau(t) + K) + n\varepsilon ,$$

где $I = \bigcup\limits_{i=1}^{n} [s_i, t_i]$, что может быть сделано как угодно малым.

С л е д с т в и е. В условиях леммы 4 функция $\overline{co}\,\mathcal{D}$ абсолютно непрерывна.

Д о к а з а т е л ь с т в о сразу следует из неравенства

$$\rho(\overline{co}\,A, \overline{co}\,B) \le \rho(A, B).$$

Поступила в ред.-изд.отдел
14 мая 1981 г.

Л и т е р а т у р а

1. Aumann R.J. Jntegrals of set-valued functions.- J. Math. Analys. and Applic., 1965, v.12, p.1-12.