Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1981 г., вып. 21
УДК 519.95:517.27

# ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Р.М.Ларин

Рассматривается метод решения задач оптимизации, в основу которого положена идея включения решаемой задачи в однопараметрическое семейство задач таких, что при некотором значении параметра решение известно. Тогда, опираясь на непрерывность траектории минимумов (в зависимости от параметра) и двигаясь вдоль этой траектории от известной начальной точки, можно получить решение исходной задачи.

Предлагаемый метод представляет собой разновидность метода возмущений, который сравнительно давно используется для исследования свойств различных математических задач, в том числе и задач оптимизации (см., например, [1,2,10]). Однако упомянутым методом рассматриваются малые возмущения целевой функции и ограничений, что позволяет исследовать локальные свойства решений.

С другой стороны предлагаемый метод примыкает к методу регуляризации, развитому в шестидесятые годы А.Н.Тихоновым [4, 5]. Этот метод формально можно отнести к методам возмущений, так как с его помощью исследуются решения специально возмущенных задач, при определенных условиях эти решения сходятся к решению исходной задачи. Заметим, что в некоторых важных случаях метод, рассматриваемый в настоящей работе, формально близок к методу регуляризации, что позволяет использовать ряд результатов теории регуляризации при обосновании нашего подхода. Однако основной упор в методах регуляризации делается на обоснование устойчивости по отношению к различным ошибкам, в том числе и к ошибкам, возникающим в процессе вычислений. Поэтому в литературе по теории регуляризации не рассматривается вопрос о непрерывной зависимости решения от параметра регуляризации во всей области задания параметра, тем более не возникал вопрос о дифференцируемости по параметру. Непрерывная же зависимость решения семейства однопараметрических задач оптимизации от параметра позволяет предложить конструктивный метод его нахождения, а наличие дифференцируемости упрощает этот процесс. В этом, по-видимому, принципиальное отличие предлагаемого метода от метода регуляризации.

Ближе всего в идейном плане к рассматриваемому нами методу примыкает прием, использованный в [3] для установления глобального свойства одной вариационной задачи. Суть его в следующем. Наряду с функционалом $\mathcal{J}_1$ используется функционал $\mathcal{J}_0$, обладающий свойством $\alpha$. По данным функционалам строится функционал $t\mathcal{J}_1 + (1-t)\mathcal{J}_0$, где $t$ - параметр, $0 \le t \le 1$. Показывается, что при определенных условиях свойство $\alpha$ при непрерывном изменении параметра $t$ переносится на функционал $\mathcal{J}_1$.

Хотя в статье метод иллюстрируется на задачах конечномерной оптимизации, в частности, на задачах математического программирования, тем не менее из дальнейшего будет ясно, что он применим для решения общих задач оптимизации. Диапазон его применимости по крайней мере так же широк, как и метода регуляризации.

## § I. Постановка задачи

Пусть на некотором множестве $M_1$ $n$-мерного арифметического пространства $R^n$ задана функция $f_1(x)$ переменных $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Требуется найти

$$\min_{x \in M_1} f_1(x) \qquad /I/$$

и точку $x^*$ такую, что

$$x^* \in M_1^* \triangleq \left\{ x \in R^n \,\middle|\, x \in M_1, \quad f_1(x) = \min_{y \in M_1} f_1(y) \right\}, \qquad /2/$$

где символ $\triangleq$ означает "равен по определению".

В некоторых случаях потребуется конкретный вид множества $M_1$, а именно:

$$M_1 = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, g_j(x) \le 0 \quad (j = \overline{1,m}) \right\}. \qquad /3/$$

В дальнейшем, если речь идет о множестве $M_1$ вида /3/, будем говорить о задаче /I/-/3/, в противном случае - о задаче /I/-/2/. В обоих случаях рассматриваемую задачу назовем основной (или исходной) - задачей $A_1$.

## § 2. Идея метода

Задача $A_1$ включается в однопараметрическое семейство задач $A(t)$, $t_0 \le t \le t_1$:

$$\min_{x \in M(t)} F(x,t) \qquad /4/$$

таких, что

$$F(x,t_1) \equiv f_1(x) \quad (x \in M_1), \quad M(t_1) \equiv M_1, \qquad /5/$$

а при $t = t_0$ имеем

$$F(x,t_0) \equiv f_0(x) \quad (x \in M_0), \quad M(t_0) \equiv M_0, \qquad /6/$$

и решение задачи $A(0) \triangleq A_0$ существует и известно.

Пусть задачи $A_1$, $A_0$ и $A(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, имеют соответственно решения $x^*$, $x_0$ и $x(t)$. Если функция $x(t)$, отображающая отрезок $[t_0, t_1]$ в $R^n$, непрерывна и $x(t_0)=x_0$, $x(t_1)=x^*$, то можно перейти из точки $x_0$ в точку $x^*$ по траектории $x(t)$. В результате по известному решению $x_0$ задачи $A_0$ получим решение основной задачи $A_1$.

Если функция $F(x,t)\in C^1(R^n)$ для всех $t\in[t_0, t_1]$ и $M(t)\equiv R^n$, то задача сводится к решению уравнения

$$F'_x(x,t)=0 \qquad /7/$$

для всех значений $t$, начиная с $t=t_0$, при этом

$$F'_x(x_0, t_0)=0.$$

Если же существуют и непрерывны $(F''_{xx})^{-1}$ и $F''_{xt}$ вдоль траектории $x(t)$, то точку $x^*$ можно найти, решая систему

$$\frac{dx}{dt}=-(F''_{xx})^{-1}F''_{xt}, \quad x(t_0)=x_0 \quad (t_0\leq t\leq t_1). \qquad /8/$$

Здесь $(F''_{xx})^{-1}$ – матрица, обратная матрице вторых производных по $x$, а $F''_{xt}$ – вектор, составленный из смешанных производных по $x$ и $t$.

Строгое обоснование этих утверждений дается ниже.

## § 3. Примеры построения задачи $A(t)$

Пример I. Пусть $M_0\equiv R^n$ и необходимо решить задачу /I/–/3/, тогда в качестве функций $F(x,t)$ и множеств $M(t)$ можно взять

$$F(x,t)=t f_1(x)+(1-t)f_0(x), \qquad /9/$$

$$M(t)=\{x\in R^n \mid t g_j(x)+t-1\leq 0 \quad (j=\overline{1,m})\}. \qquad /10/$$

Здесь $t_0=0$, $t_1=1$.

Пример 2 представляет собой обобщение примера I. Положим

$$F(x,t)=\varphi_1(t)f_1(x)+\varphi_0(t)f_0(x), \qquad /11/$$

$$M(t)=\{x\in R^n \mid \bar{\varphi}_j(t)\,g_j(x)+\bar{\bar{\varphi}}_j(t)\leq 0 \quad (j=\overline{1,m})\}, \qquad /12/$$

где $\varphi_0(t), \varphi_1(t)$ непрерывны,

$$\varphi_1(0)=0,\ \ \varphi_0(0)=\alpha_0>0,\ \ \bar{\varphi}_j(0)=0,\ \ \bar{\bar{\varphi}}_j(0)=\beta_{0j}<0,$$

$$\varphi_1(1)=\alpha_1>0,\ \ \varphi_0(1)=0,\ \ \bar{\varphi}_j(1)=\beta_{1j}>0,\ \ \bar{\bar{\varphi}}_j(1)=0 \ \ (j=\overline{1,m}).$$

Оказывается, в некоторых случаях включения вида /9/, /10/ недостаточно для получения непрерывной или непрерывно дифференцируемой на всем отрезке $[t_0, t_1]$ функции $x(t)$.

Пусть $f_1(x)=|x|$, $f_0(x)=|1-x|$, $M_1=M_0=R^1$. Заметим, что функции $f_1(x)$ и $f_0(x)$ выпуклы. Тогда при включении /9/ получим

$$x(t)=\begin{cases} 1 & \text{при } t\in[0,\frac{1}{2}), \\ 0 & \text{при } t\in(\frac{1}{2},0], \end{cases}$$

при $t=\frac{1}{2}$ любое значение $x\in[0,1]$ оптимально, т.е. функция $x(t)$ разрывна при $t=\frac{1}{2}$.

Рассмотрим включение /11/, когда

$$\varphi_1(t)=\begin{cases} Kt & \text{при } t\in[0,\frac{1}{K}], \\ 1 & \text{при } t\in(\frac{1}{K},1]; \end{cases}$$

$$\varphi_0(t)=\begin{cases} 1 & \text{при } t\in[0,1-\frac{1}{K}], \\ K(1-t) & \text{при } t\in(1-\frac{1}{K},1], \end{cases}$$

где $K>2$. Здесь можно выделить непрерывную траекторию

$$x(t)=\begin{cases} 1 & \text{при } t\in[0,\frac{1}{K}), \\ \frac{K-1}{K-2}\left(1-\dfrac{t}{1-\frac{1}{K}}\right) & \text{при } t\in[\frac{1}{K},1-\frac{1}{K}], \\ 0 & \text{при } t\in(1-\frac{1}{K},1]. \end{cases}$$

Если взять функцию $F(x,t)=|1-t-x|$, то $x(t)=1-t$, т.е. получим не только непрерывную, но и непрерывно дифференцируемую по $t$ функцию $x(t)$ и притом единственную. В то же время функции $f_1(x)$ и $f_0(x)$ как функции переменной $x$ этим свойством не обладают.

Для построения функций $F(x,t)$, обладающих свойством траектории $x(t)$, непрерывности или непрерывной дифференцируемости, полезно применить теории, изучающие поведение критических точек (см., например, [8,9]).

З а м е ч а н и е 1. В примерах 1, 2 в качестве задачи $A_0$ часто удобно брать задачу следующего вида:

$$\min_{x\in R^n}\|x-x_0'\|^2, \qquad /13/$$

где $x_0'$ – некоторая заданная точка, а $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

З а м е ч а н и е 2. Пусть задача $A_0$ имеет вид /13/ и $\varphi_1(t)>0$, $\varphi_0(t)>0$ при $t\in(0,1)$. Тогда равенство /11/ можно представить в виде

$$\frac{1}{\varphi_1(t)}F(x,t)=f_1(x)+\frac{\varphi_0(t)}{\varphi_1(t)}\|x-x_0'\|^2. \qquad /11'/$$

Отсюда очевидна связь метода регуляризации с рассматриваемым методом при включениях вида /11/. Можно отметить аналогичную связь с методами из [10] и других работ, в которых изучается поведение оптимального решения при нелинейных возмущениях задач линейного программирования.

З а м е ч а н и е 3. Пусть в примерах 1, 2 точка $x^*=x_0\in$ $\in \operatorname{int} M(t)$ при всех $t\in(0,1)$ и функция $F(x,t)$ дифференцируема в некоторой окрестности этой точки, тогда $F'_x(x_0,t)\equiv 0$, $F''_{xt}(x_0,t)\equiv 0$ и $\frac{dx}{dt}\equiv 0$. Это следует из определения функции $F(x,t)$, оптимальности точек $x^*$ и $x_0$ и уравнения /8/.

Пример 3. Пусть

$$f_1(x) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\,\ln\frac{\psi_{ij}}{x_{ij}}, \qquad /14/$$

$$M_1=\Big\{x\in R^{nm}\;\Big|\;\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=a_j,\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=b_i,\ x_{ij}\geqslant 0\ (i=\overline{1,m},\,j=\overline{1,n})\Big\} \qquad /15/$$

Здесь $a_j>0$, $b_i>0$, $\sum_{j=1}^{n} a_j=\sum_{i=1}^{m} b_i=c$, $\psi_{ij}=e^{-\rho\alpha_{ij}}$, где $\rho\geqslant 0$, $\alpha_{ij}\geqslant 0$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$.

Задача минимизации функции /14/ на множестве /15/ возникает при расчете трудовых связей в градостроительстве [6].

При $\rho=0$ решение известно:

$$x^0_{ij}=\frac{a_j\,b_i}{c}.$$

Положив

$$F(x,t)=-\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}\,\ln\frac{e^{-t\alpha_{ij}}}{x_{ij}},$$

$$M(t)\equiv M_1\quad(0\leqslant t\leqslant \rho),$$

получим при $t_0=0$ задачу с известным решением, а при $t_1=\rho$ – исходную задачу.

Для решения задачи /14/, /15/ в настоящее время применяется итерационный алгоритм, называемый балансировкой [6].

Пример 4 показывает, как можно строить множества при наличии ограничений-равенств.

Пусть $M_1=\{x\in R^n\mid g_j(x)=0\ \ j=\overline{1,m}\}$.

Заменим каждое ограничение-равенство на два неравенства и воспользуемся представлениями множества $M(t)$ в виде /10/ или /12/. Получим соответственно $(0\leqslant t\leqslant 1)$:

$$M(t)=\{x\in R^n\mid t g_j(x)+t-1\leqslant 0,\ -t g_j(x)+t-1\leqslant 0\ \ (j=\overline{1,m})\},$$

$$M(t)=\{x\in R^n\mid \bar\varphi_j(t)\,g_j(x)+\bar{\bar\varphi}_j(t)\leqslant 0,\ -\bar\varphi_j(t)\,g_j(x)+\bar{\bar\varphi}_j(t)\leqslant 0\ (j=\overline{1,m})\}.$$

Здесь $M(0)=M_0=R^n$, и любая точка является допустимой.

## § 4. Случай непрерывности функции $x(t)$

В дальнейшем, не теряя общности, будем считать, что $t_0=0$, $t_1=1$.

Введем следующие условия:

1) $M(t)=R^n$ $(t\in[0,1])$;

2) функции $F(x,t)$, $F'_{x_i}(x,t)$, $F''_{x_i x_j}(x,t)$ и $F''_{x_i t}(x,t)$ определены и непрерывны при $x\in R^n$ и $t\in[0,1]$;

3) существует решение $\bar{x}(t)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\left(F''_{xx}\right)^{-1} F''_{xt} \qquad /16/$$

с начальным условием $\bar{x}(0) = x_0$, определенное при всех $t \in [0,1]$ ; причем вдоль траектории $\{\bar{x}(t),\ t\}$ матрица $F''_{xx}$ неособенная;

4) $M'_1 \triangleq \{x \in R^n \mid f'_{1x}(x) = 0\} = M^*_1$.

Т е о р е м а I. Пусть выполнены условия I)–4). Тогда

$$\bar{x}(1) \in M^*_1 .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Представим уравнение /16/ при $x = \bar{x}(t)$ в виде

$$F''_{xx}(\bar{x}(t), t)\frac{d\bar{x}(t)}{dt} + F''_{xt}(\bar{x}(t), t) \equiv 0 \quad (t \in [0,1]).$$

Отсюда следует, что

$$F'_x(\bar{x}(t), t) + C = 0 \qquad (C = const).$$

Из условий

$$\bar{x}(0) = x_0,\ F'_x(x,0) = f'_{0x}(x) \qquad (x \in R^n)$$

и оптимальности $x_0$ получаем, что $F'_x(x_0, 0) = 0$, т.е. $C = 0$.

Следовательно, имеем равенство

$$F'_x(\bar{x}(t), t) = 0 \qquad (t \in [0,1]). \qquad /18/$$

По определению функции $F(x,t)$, справедливо

$$F'_x(x,1) = f'_{1x}(x) \qquad /19/$$

для всех $x \in R^n$. Используя /18/ и /19/, получаем

$$f'_{1x}(\bar{x}(1)) = 0 \quad , \text{ т.е. } \bar{x}(1) \in M^*_1 .$$

Теорема I доказана.

Условия I)–4) являются достаточными для нахождения решения задачи $A_1$ путем интегрирования системы дифференциальных уравнений /16/.

Рассмотрим задачу $A_1$ в случае, когда

$$M_1 = \{x \in R^n \mid g(x) = 0\}, \qquad /20/$$

где $g: R^n \longrightarrow R^m \quad (m < n)$.

В качестве задачи $A_0$ возьмем задачу с $M_0 = M_1$, т.е. $x \in M_1$, а задачу $A(t)$ представим в виде

$$\min_{x \in M_1} F(x,t). \qquad /21/$$

Введем функцию Лагранжа

$$\bar{L}(x, \lambda, t) \triangleq F(x,t) + \lambda^T g(x). \qquad /22/$$

В силу необходимости, $x(t)$ удовлетворяет системе уравнений

$$F'_x + (g'_x)^T \lambda = 0, \quad g = 0.$$

При подстановке в эту систему ее решения $x(t)$, $\lambda(t)$ получим тождество, которое после дифференцирования по $t$ принимает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} W & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F'_{xt} \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad /23/$$

где $W \triangleq F''_{xx} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g''_{jxx}$ – матрица размерности $n \times n$;

$A^T = g'_x$ – матрица производных вектор-функции $g(x)$ по $x$ размерности $m \times n$;

$g''_{jxx}$ – матрица вторых производных $j$-й компоненты вектор-функции $g(x)$ по $x$ размерности $n \times n$.

Если матрицы $W$ и $A^T W^{-1} A$ неособенные, то матрица

$$B(x,\lambda,t) \triangleq \begin{pmatrix} W & A \\ A^T & 0 \end{pmatrix} \qquad /24/$$

также неособенная и систему /23/ можно представить в нормальной форме:

$$\dot{x} = -P W^{-1} F''_{xt}, \qquad \dot{\lambda} = \tilde{P} W^{-1} F''_{xt}, \qquad /25/$$

где

$$P \triangleq E - W^{-1} A (A^T W^{-1} A)^{-1} A^T,$$

$$\tilde{P} \triangleq -(A^T W^{-1} A)^{-1} A^T,$$

$E$ – единичная матрица размерности $n \times n$.

Пусть $x_0$ – решение задачи $A_0$, а $\lambda_0$ – соответствующий ему множитель Лангража.

Добавим к условиям 1)–4) следующие:

5) $g(x) \in C^2_m(R^m)$;

6) решение $\bar{x}(t)$, $\bar{\lambda}(t)$ системы /25/ при начальных условиях $\bar{x}(0) = x_0$, $\bar{\lambda}(0) = \lambda_0$ существует и определено при всех $t \in [0,1]$;

7) ранг матрицы $g'_x(x(t))$ равен $m$ при всех $t \in [0,1]$;

8) матрица $B(\bar{x}(t), \bar{\lambda}(t), t)$ неособенная при $t \in [0,1]$.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 2), 5) – 8). Тогда $\bar{x}(1)$ есть стационарная точка задачи $A_1$, а $\bar{\lambda}(1)$ – соответствующий ей множитель Лангража. Если, кроме того, система уравнений $f'_{1x}(x) + (g'_x(x))^T \lambda = 0$, $g(x) = 0$ имеет единственное решение $x^*$, $\lambda^*$ и оно соответствует минимуму функции $f_1(x)$ на $M_1$, то $\bar{x}(1) = x^*$, $\bar{\lambda}(1) = \lambda^*$ есть решение задачи $A_1$.

Доказательство принципиально не отличается от доказательства теоремы I. Система уравнений /25/ при $x = \bar{x}(t)$, $\lambda = \bar{\lambda}(t)$ может быть представлена в виде

$$F''_{xx}(\bar{x}(t),t)\,\frac{d\bar{x}(t)}{dt}+F''_{xt}(\bar{x}(t),t)+\Big[\sum_{j=1}^{m}\bar{\lambda}_j(t)\,g''_{jxx}(\bar{x}(t))\Big]^T+$$

$$g_x(\bar{x}(t))\big]^T\frac{d\bar{\lambda}(t)}{dt}\equiv 0,\qquad g'_x(\bar{x}(t))\,\frac{d\bar{x}(t)}{dt}\equiv 0,$$

или

$$\frac{d}{dt}\big[F'_x(\bar{x}(t),t)+(g'_x(\bar{x}(t)))^T\,\bar{\lambda}(t)\big]\equiv 0,$$
$$\frac{d}{dt}\,g(\bar{x}(t))\equiv 0. \qquad /26/$$

Используя условие $\bar{x}(0)=x_0\in M_1$, из второго соотношения системы /26/ получаем

$$g(\bar{x}(t))=0\qquad (t\in[0,1]). \qquad /27/$$

Откуда следует, что $\bar{x}(t)\in M_1$ для всех $t\in[0,1]$.

Далее, так как $\bar{x}(0)=x_0$, $\bar{\lambda}(0)=\lambda_0$ есть оптимальное решение задачи $A_0$, а $F'_x(x,0)=f'_{0x}(x)$ для всех $x\in M_1$, то

$$F'_x(\bar{x}(t),t)+[g'_x(\bar{x}(t))]^T\,\bar{\lambda}(t)=0\quad (t\in[0,1]). \qquad /28/$$

Из равенств /27/ и /28/, верных при $t=1$, сразу же следуют утверждения теоремы.

Теорема 2 доказана.

Следует отметить внешнее сходство систем /23/ и /25/ с системами из [II]. Автором [II] описана модификация непрерывного градиентного метода, которая с учетом ограничений типа равенств позволяет обеспечить вычислительную устойчивость метода. В описанном нами подходе это означает замену уравнения $A^T\dot{x}=0$ на уравнение $A^T\dot{x}=-g$. В данной статье не рассматриваются вопросы вычислительной устойчивости метода в общем случае задания $F(x,t)$.

## § 5. Связь с методом регуляризации

Функцию $F(x,t)$ вида /II/ можно привести к виду /II$'$/ при $t\in(0,1]$ и применить для исследования методы теории регуляризации. Далее используем следующие обозначения:

$$\Omega(x)\triangleq\|x-x_0\|^2,\quad \Omega(\bar{x}^*)=\min_{x\in M_1^*}\Omega(x)\quad (\bar{x}^*\in M_1^*), \qquad /29/$$

$$F(x,t)=\varphi_1(t)\,f_1(x)+\varphi_0(t)\,\Omega(x),$$

$$M(t)\equiv M_1,\quad F_t^*\triangleq F(x(t),t),$$

где

$$x(t)\in M^*(t)\triangleq\{x\in R^n\mid x\in M(t),\ F(x,t)=\min_{y\in M(t)}F(y,t)\},$$

а точка $\tilde{x}(t) \in M_1$ такова, что

$$F(\tilde{x}(t), t) \leq F_t^* + \xi(t), \quad \xi(t) > 0 \qquad (t \in [0,1)).$$

Теорема 3. Если функция $f_1(x)$ непрерывна на замкнутом множестве $M_1$, $M_1^* \neq \emptyset$, то при условиях

$$\varphi_0(t) > 0, \quad \varphi_1(t) > 0 \quad (t \in (0,1)), \quad \lim_{t \to 1} \frac{\xi(t)}{\varphi_0(t)} = 0,$$

имеет место

$$\lim_{t \to 1} f_1(\tilde{x}(t)) = f_1(x^*), \quad \lim_{t \to 1} \rho(\tilde{x}(t), M_1^*) = 0.$$

Если, кроме того, $f_1(x)$ и множество $M_1$ выпуклы, то $\lim\limits_{t \to 1} \tilde{x}(t) = \bar{x}^*$.

Если учесть, что $\varphi_1(t) \geq 0$ при $t \in [0,1]$, то доказательство этой теоремы в несколько иной записи можно найти в [5].

Рассмотрим задачу /I/-/3/ при следующих предположениях:

9) Функции $f_1(x)$ и $g_j(x)\,(j=\overline{1,m})$ выпуклы и непрерывны на $R^n$.

10) $M_1^* \neq \emptyset$.

Рассмотрим функцию

$$\Phi(x,t) \triangleq (1-t)^p \left[t f_1(x) + (1-t)\Omega(x)\right] + t \varphi^2(x),$$

где

$$\varphi(x) \triangleq \sum_{j=1}^{m} \left(\max(0, g_j(x))\right)^2, \quad p > 0.$$

Здесь множитель перед выражением в квадратных скобках есть штрафной коэффициент, а функция $\Phi(x,t)$ является штрафной функцией [5].

11) Функции $\Phi(x,t)$, $\Phi'_{x_i}(x,t)$, $\Phi''_{x_i t}(x,t)$ и $\Phi''_{x_i x_j}(x,t)\,(i,j=\overline{1,n})$ непрерывны при $x \in R^n$ и $t \in [0,1]$.

12) Существует решение $\bar{x}(t)$ уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -\left(\Phi''_{xx}\right)^{-1} \Phi''_{xt}$$

с начальным условием $\bar{x}(0) = x_0$, определенное при всех $t \in [0,1]$, причем вдоль $\{\bar{x}(t), t\}$ матрица $\Phi''_{xx}$ неособенная.

Теорема 4. Если выполнены условия 9) - 12), то $\bar{x}(1) \in M_1^*$. Если, кроме того, существует $t'$, $0 \leq t' < 1$, такое, что $\bar{x}(t) \in M_1$ при $t \in (t', 1]$, то $\bar{x}(1) = \bar{x}^*$.

Доказательство этой теоремы принципиально не отличается от доказательства аналогичной теоремы (общий случай регуляризации) в [5]. Вид функции $\Phi(x,t)$ может быть более общим; $F(x,t)$ можно взять в виде /11/ вместо /9/.

Отметим некоторые особенности предлагаемого метода по сравнению с классическим методом регуляризации в случае, когда внешне они совпадают (функция $F(x,t)$ имеет вид /9/ или /11/).

Одной из основных трудностей классической схемы регуляризации является вопрос о выборе начальных значений параметров регуляризации и закона их дальнейшего изменения. При нашем подходе эти трудности автоматически устраняются (например, для задач, удовлетворяющих условиям, рассмотренным выше). Более того, поскольку начальная точка известна, то, как показывают теоремы I, 2 и 4, для определения траектории $x(t)$ не нужно решать задачу оптимизации при $t \in [0,1]$. Эта задача подменяется задачей интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений с известной начальной точкой. Методы интегрирования для задачи Коши хорошо разработаны и позволяют получить решение с высокой точностью. Если же траектория $x(t)$ недифференцируема, но непрерывна, то требуется решить уравнение типа /7/, используя непрерывность и точку $x(0)=x_0$.

Конечно, нельзя гарантировать абсолютной точности при численном интегрировании, но тогда помогает итерационная процедура, которая описана в следующем параграфе. Сохраняя все преимущества описанного подхода, она позволяет повысить точность решения.

Эти же особенности имеют место и в случае общего задания функции $F(x,t)$.

## § 6. Итерационный алгоритм повышения точности численного решения

Алгоритм описывается для случая, когда целевая функция параметризованной задачи имеет вид /II/, где $f_0(x) = \|x - x_0\|^2$.

Ш а г I. Выбирается начальная точка $x_0$.

Ш а г 2. Полагаем $x^K(0) = x^{K-1}(1)$ $(K = 1, 2, \ldots)$, причем $x^0(1) \triangleq x_0$. Здесь $K$ - номер итерации.

Ш а г 3. Решаем систему уравнений типа /8/ с функцией

$$F^K(x,t) = \varphi_1(t)\cdot f_1(x) + \varphi_0(t)\cdot \|x - x^K(0)\|^2 \quad (t \in [0,1])$$

или с функцией $\Phi^K(x,t)$. В результате получаем $x^K(1)$.

Ш а г 4. Если $\|x^K(1) - x^K(0)\| \le \varepsilon, |f_1(x^K(1)) - f_1(x^K(0))| \le \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ - заданная точность решения задачи $A_1$, то процесс заканчивается. В противном случае переходим к шагу 2.

Функции $\varphi_1(t)$, $\varphi_0(t)$ можно поставить в зависимость от $K$, т.е. рассматривать $\varphi_1^K(t)$ и $\varphi_0^K(t)$, учитывая особенности функции $f_1(x)$ в окрестности точки $x^*$.

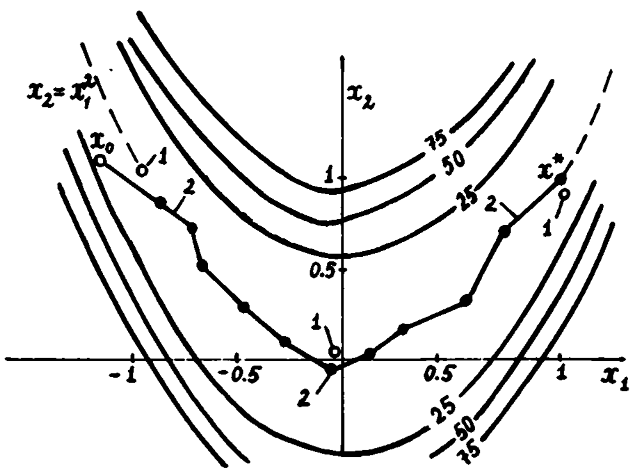
## § 7. Примеры численного решения задач

Для численного эксперимента были выбраны те задачи нелинейного программирования, которые часто используются различными авторами как тестовые и играют роль "классических". Нами было обсчитано большинство примеров, помещенных в работе [7].

В качестве иллюстрации приводятся результаты вычислений для целевой функции $f_1(x) = 100\,(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$, называемой функцией Розенброка. Здесь $M_1 = R^2$.

Метод наискорейшего спуска, градиентный метод и метод Ньютона плохо сходятся для этой функции. Геометрически она представляет собой овраг с крутыми склонами, идущий вдоль кривой $x_2 = x_1^2$, при этом дно оврага пологое и определяется слагаемым $(1 - x_1)^2$.

Вычисления проводились на ЭВМ ЕС-1033. Для интегрирования была использована стандартная программа метода Рунге-Кутта с удвоенной точностью (точность вычислений метода Рунге-Кутта - $10^{-6}$, шаг интегрирования - $10^{-3}$).




На рисунке приведена траектория (кривая I), которая была получена описанным в работе методом, а также траектория (кривая 2), полученная методом Дэвидона-Флетчера-Пауэлла [7, с.128]. В качестве начальной в обоих методах взята точка $x_0 = (-1.2, 1)$.

Таблица иллюстрирует работу итерационного алгоритма, описанного в § 6 для случая $x_0 = (-2, 3)$.

| K | $x^K\ (0)$ | $x^K\ (1)$ |
|---|---|---|
| I | (-2,3) | (-0.6308219,0.4070491) |
| 2 | (-0.6308219,0.4070491) | (0.9999943,0.9999888) |
| 3 | (0.9999943,0.9999888) | (I.0000000,I.0000000) |
| 4 | (I.0000000,I.0000000) | (I.0000000,I.0000000) |

Автор выражает искреннюю благодарность Г.М.Заикиной за вычислительную часть работы и постоянное внимание к ней.

Поступила в ред.-изд.отдел
5 марта 1981 г.

Литература

I. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач.-М.: Наука, 1974.-480 с.

2. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы.-М.: Мир, 1979.-400с.

3. Гельфанд И.М., Фомин С.В. Вариационное исчисление.-М.: Гос.изд-во физ.-мат. лит., 1961.-228с.

4. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач.-М.: Наука, 1979.-288 с.

5. Карманов В.Г. Математическое программирование.-М.: Наука, 1980.-256 с.

6. Абрамович Э.Г. Математическая модель оптимального размещения застройки в генеральном плане города.-В кн: Математические методы решения комплексных задач градостроительного проектирования.-М.: Стройиздат, 1977, с. 22-34.

7. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование.-М.: Мир, 1975.-536 с.

8. Милнор Дж. Теория Морса.-М.: Мир, 1965, - 184 с.

9. Брекер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы.-М.: Мир, 1977.-208 с.

10. Mangasarian O.L., Meyer R.R. Nonlinear perturbation of linear programs.- SIAM J. Conrol and Optimization, 1979, v,17, N 6, p. 745-752.

11. Yamashita H. A continuous path method of optimization and its application to global optimization.-In: Survey of Mathematical Programming.I. Proc. 9th Int.Math. Program. Symp. Budapest, 1979, p. 539-546.