Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1980 г., вып.20.
УДК 519.3:62-50

ОСОБЫЕ ЭКСТРЕМАЛИ РАЗРЫВНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ.II

Л.Т.Ащепков

Данная статья есть продолжение исследования [1] особых экстремалей разрывных систем управления. Разбираются случаи касания оптимальной траектории поверхности разрыва и терминального многообразия. Необходимые условия оптимальности устанавливаются с помощью традиционной схемы игольчатого варьирования [2]. Основными результатами работы являются уточненное условие скачка сопряженных переменных в случае касания [3] и условие трансверсальности для особых точек терминального многообразия.

§ 1. Постановка задачи

Объектом нашего внимания будет, как и ранее [1], задача управления

$$K = \Phi(x(t_1), t_1) \longrightarrow \inf , \qquad /1/$$

$$\dot{x} = f(x, u, t) ,$$
$$h^0(x(t_0)) = 0 , \quad h^1(x(t_1), t_1) = 0 , \quad u \in U \qquad /2/$$

в системе с разрывной правой частью

$$f = f^-(x,u,t) , \ p(x,t) < 0 ; \quad f = f^+(x,u,t) , \ p(x,t) > 0 ,$$

где $\Phi, h^1, p : R^n \times R \to R$, $h^0 : R^n \to R^m$ - дважды непрерывно дифференцируемые по своим аргументам функции; f^-, f^+ - непрерывные вместе с частными производными $f^{\pm}_{xx}, f^{\pm}_u, f^{\pm}_t$ отображения $R^n \times R^r \times R \to R^n$. Управлениями служат кусочно-непрерывные кусочно-гладкие функции $u : [t_0, \infty) \to R^r$ со значениями в заданном множестве $U \subset R^r$. Момент t_0 задан, t_1 не фиксирован. Решение дифференциального уравнения понимается по А.Ф.Филиппову [4].

Пара из оптимального управления и оптимальной траектории называется особой экстремалью, если траектория пересекает поверхность разрыва $p = 0$ и терминальное многообразие $h^1 = 0$, имея с ними хотя бы одно одностороннее касание.

Как видно из определения, термин особая экстремаль трактуется здесь несколько иначе, чем в [I], и характеризует отношение решения задачи не столько к гамильтоновой функции, сколько к другим составляющим задачи - поверхности разрыва и терминальному многообразию.

§ 2. Касание траекторией поверхности разрыва

Пусть оптимальному управлению $u(t), t \geqslant t_0$, отвечает траектория $x(t)$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$, системы /2/, имеющая с поверхностью разрыва единственное левостороннее касание в момент $t_0 < \tau < t_1$, т.е.

$$p(x(\tau),\tau)=0 \quad , \quad \overset{-}{\dot p}(x(\tau),u(\tau-),\tau)=0 . \qquad /3/$$

Через $\overset{-}{p}, \overset{+}{p}, \overset{=}{p}, \overset{++}{p}, \dots$ здесь и далее обозначаются первые и вторые производные функции p по t в силу уравнений $\dot x = f^-$, $\dot x = f^+$.

Согласно выше приведенному определению, пара $u(t), x(t)$ есть особая экстремаль. Чтобы получить необходимые условия оптимальности особой экстремали, построим семейство варьированных управлений $\tilde u(t) = u(t) + \Delta u(t)$ и траекторий $\tilde x(t) = x(t) + \Delta x(t)$, удовлетворяющих условиям /2/ задачи. При построении семейства будем требовать от особой экстремали дополнительных свойств:

а) $\overset{=}{p}(x(\tau), u(\tau-), \dot u(\tau-),\tau) < 0$; б) $\overset{+}{p}(x(\tau),u(\tau+),\tau) > 0$,

если $\overset{+}{p}(x(\tau),u(\tau+),\tau)=0$, то $\overset{++}{p}(x(\tau),u(\tau+),\dot u(\tau+),\tau) > 0$;

в) $p(x(t_0),t_0) < 0$, ранг $h^0_x(x(t_0)) = m < n$; г) $p(x(t_1),t_1) > 0$, $\overset{+}{h}{}^1(x(t_1),u(t_1),t_1) \neq 0$.

Условие б) вместе с предположением единственности τ обеспечивает переход траекторий семейства, попавших на поверхность разрыва, в область $p > 0$. Второе условие в) гарантирует регулярное строение начального многообразия в окрестности $x(t_0)$, а второе условие г) - пересечение траектории семейства с терминальным многообразием.

В соответствии с определением, приращение $t \to \Delta x(t)$ описывается системой уравнений

$$\Delta \dot x = f(x(t) + \Delta x, u(t) + \Delta u(t), t) - f(x(t), u(t), t) , \qquad /4/$$
$$\Delta x(t_0) = \Delta x_0,$$

$$h^0(x(t_0)+\Delta x_0)-h^0(x(t_0))=0.$$

Положим

$$\Delta u(t)=\begin{cases} 0, & t\notin(\theta-\varepsilon^2/2,\ \theta\,], \\ v-u(t), & t\in(\theta-\varepsilon^2/2,\ \theta\,], \end{cases} \qquad /5/$$

$$\Delta x_0=\varepsilon^2/2\ \ \delta^2 x_0+o(\varepsilon^2), \qquad /6/$$

считая $t_0<\theta<\tau$ - произвольной фиксированной точкой гладкости управления $u(t)$, ε - малым неотрицательным параметром, v - точкой из U, $\delta^2 x_0$ - решением системы линейных алгебраических уравнений

$$h^0_x(x(t_0))\ \delta^2 x_0=0. \qquad /7/$$

Приращение /5/ управления, очевидно, допустимо. Допустимость начального приращения /6/ траектории при малых ε обеспечивается выбором вектора $\delta^2 x_0$ и функции $\varepsilon\longrightarrow o(\varepsilon^2)$ порядка выше ε^2, существование которой следует из теоремы о неявной функции.

Опишем приращение $\Delta x(t)$, отвечающее /4/-/6/.

I) В области $t_0\leqslant t\leqslant\tau$, $p(x(t)+\Delta x(t),t)\leqslant 0$ на основании известных результатов [2] имеем

$$\Delta x(t)=\varepsilon^2/2\ \ \delta^2 x(t)+o(\varepsilon^2),$$

где $\delta^2 x:[t_0,\tau]\longrightarrow R^n$ - решение уравнения в вариациях:

$$\delta^2\dot x=f_x(x(t),\ u(t),t)\,\delta^2 x,\qquad \delta^2 x(t_0)=\delta^2 x_0,$$

$$\delta^2 x(\theta+)=\delta^2 x(\theta-)+\Delta_v f\,\big|_\theta,$$

$$\Delta_v f\big|_\theta=f(x(\theta),v,\ \theta)-f(x(\theta),u(\theta),\theta).$$

2) Найдем момент $\tilde\tau=\tau+\Delta\tau$ пересечения траектории $\tilde x(t)$ с поверхностью разрыва. Рассмотрим решение $y(t,\varepsilon)$ системы

$$\dot y=f^-(y,u(t),t),\quad y(\theta)=\tilde x(\theta).$$

В области $t\geqslant\theta,\ p(x,t)\leqslant 0$ решения $y(t,\varepsilon)$ и $\tilde x(t)$ совпадают и потому либо одновременно попадают на поверхность разрыва, либо оба не имеют с ней общих точек. Кроме того, в левосторонней окрестности

$$y(t,\varepsilon)=x(\tau)+(t-\tau)\dot{x}(\tau-)+$$
$$+1/2\left[(t-\tau)^2\ddot{x}(\tau-)+\varepsilon^2\delta^2 x(\tau-)\right]+o(|t-\tau|^2+\varepsilon^2). \qquad /8/$$

Функцию $y(t,\varepsilon)$ удобно считать дифференцируемым продолжением $\tilde{x}(t)$ на малую окрестность точки $t=\tau$, $\varepsilon=0$ в плоскости переменных t,ε .

Искомое $\tilde{\tau}$ есть по смыслу наименьший на отрезке $[t_0,t_1]$ корень уравнения

$$q(t,\varepsilon)=p(y(t,\varepsilon),t)=0. \qquad /9/$$

Разложим левую часть уравнения в ряд Тейлора в окрестности $t=\tau$, $\varepsilon=0$, ограничившись квадратичными членами. Учитывая /3/, /9/ и заменяя $t-\tau$ на $\Delta\tau$, получаем

$$0=\Delta\tau^2+q_{tt}+\varepsilon^2 q_{\varepsilon\varepsilon}+o(|\Delta\tau|^2+\varepsilon^2), \qquad /10/$$

где
$$q_{tt}=\ddot{p}(x(\tau),u(\tau-),\dot{u}(\tau-),\tau),$$
$$q_{\varepsilon\varepsilon}=p_x'(x(\tau),\tau),\delta^2 x(\tau-).$$

Из представления /10/ вытекает следующее очевидное утверждение: для того чтобы функция $\varepsilon\to\Delta\tau$ вида

$$\Delta\tau=\varepsilon\,\delta\tau+o(\varepsilon) \qquad /11/$$

при некотором вещественном $\delta\tau$ удовлетворяла /10/, необходимо, чтобы

$$q_{tt}\,\delta\tau^2+q_{\varepsilon\varepsilon}=0,\quad q_{\varepsilon\varepsilon}/q_{tt}\leqslant 0. \qquad /12/$$

Верно и обратное [5]. Если условия /12/ выполняются и $q_{\varepsilon\varepsilon}/q_{tt}<0$, то решение /10/ в форме /11/ существует.

Выразим производную $q_{\varepsilon\varepsilon}$ через параметры вариаций управления и начальных значений. С помощью решения $\psi_-:[t_0,\tau]\to R^n$ линейного сопряженного уравнения $\dot{\psi}=-f_x^{-\prime}(x(t),u(t),t)\,\psi$, , $\psi(\tau)=p_x(x(\tau),\tau)$ можем записать $q_{\varepsilon\varepsilon}=\psi_-'(t_0)\delta^2 x_0+\psi_-'(\theta)\Delta_v f|_\theta$.

Итак, если существуют допустимые $\delta^2 x_0,\theta,v$, для которых

$$\psi_-'(t_0)\,\delta^2 x_0+\psi_-'(\theta)\Delta_v f\,\Big|_\theta>0, \qquad /13/$$

то при

$$\delta\tau = -\left[-(\psi_-'(t_0)\delta^2 x_0 + \psi_-'(\Theta)\Delta_v f\big|_\Theta)\Big/\right.$$
$$\left.\Big/\ \overset{\leftrightarrow}{p}(x(\tau), u(\tau-), \dot u(\tau-), \tau)\right]^{1/2} \qquad /14/$$

функция /II/ будет удовлетворять /I0/. Отметим, что из двух корней квадратного уравнения /I2/ в качестве $\delta\tau$ взят меньший отрицательный. Положительный корень непосредственного отношения к моменту $\tilde\tau$ не имеет и является посторонним. Случай $q_{\varepsilon\varepsilon}/q_{tt} \geqslant 0$ оставим в стороне как малоинтересный в плане данного исследования.

3) При $t \geqslant \tau$ для приращения $\Delta x(t)$ обычным путем доказывается формула

$$\Delta x(t) = \Delta\tau\delta x(t) + 1/2\left[\Delta\tau^2\delta^2 x_1(t) + \right.$$
$$\left. + \varepsilon^2\delta^2 x_2(t)\right] + o(|\Delta\tau|^2 + \varepsilon^2), \qquad /15/$$

где $\delta x, \delta^2 x_1, \delta^2 x_2 : [\tau, t_1] \to R^n$ - решения уравнений в вариациях

$$\delta\dot x = f_x\,\delta x, \quad \delta x(\tau+) = \nabla\dot x(\tau),$$
$$\delta^2\dot x_1 = f_x\,\delta^2 x_1 + (f_x\delta x)_x\,\delta x, \quad \delta^2 x_1(\tau+) = \nabla\ddot x(\tau) - 2\overset{+}{f_x}\,\nabla\dot x(\tau),$$
$$\delta^2\dot x_2 = f_x\,\delta^2 x_2, \quad \delta^2 x_2(\tau+) = \delta^2 x(\tau-)$$

и $\nabla a(\tau) = a(\tau-) - a(\tau+)$ - скачок функции $t \to a(t)$ в точке τ.

4) Чтобы найти момент $\tilde t_1 = t_1 + \Delta t_1$ попадания варьированной траектории на терминальное многообразие, применим к уравнению

$$g(t, \Delta t, \varepsilon) = h^1(x(t) + \Delta x(t), t) = 0 \qquad /16/$$

теорему о неявной функции. Так как, по предположению,

$$g(t_1, 0, 0) = 0, \quad g_t(t_1, 0, 0) = \overset{+}{h^1}(x(t_1), u(t_1), t_1) \neq 0$$

и управление $u(t)$ в окрестности t_1 без потери общности можно считать гладким, то условия теоремы выполнены. Следовательно, хотя бы в малой окрестности точки $t = t_1, \Delta\tau = 0, \varepsilon = 0$ существует решение $\tilde t_1 = \tilde t_1(\Delta\tau, \varepsilon)$ уравнения /I6/, допускающее представление

$$\Delta t_1 = \tilde t_1 - t_1 = \Delta\tau\,\delta t_1 +$$
$$+ 1/2\left[\Delta\tau^2\delta^2 t_1 + \varepsilon^2\delta^2 t_2\right] + o(|\Delta\tau|^2 + \varepsilon^2). \qquad /17/$$

Неизвестные коэффициенты δt_1, $\delta^2 t_1$, $\delta^2 t_2$ в правой части находятся из уравнений, полученных дифференцированием по $\Delta\tau$, ε тождества $g_1(\tilde{t}_1(\Delta\tau,\varepsilon), \Delta\tau, \varepsilon) \equiv 0$. Опуская промежуточные выкладки, приведем лишь конечные результаты (выражения в правых частях вычислены ниже на особой экстремали в момент $t=t_1$) :

$$\delta t_1 = -h_x^{1\,\prime}\delta x / \overset{+}{h}{}^1, \quad \delta^2 t_2 = -h_x^{1\,\prime}\delta^2 x_2 / \overset{+}{h}_1,$$
$$\delta^2 t_1 = -h_x^{1\,\prime}\delta^2 x_1 / \overset{+}{h}{}^1 -$$
$$-\delta x'[h_{xx} - (2/\overset{+}{h}{}^1)h_x((h_x^1)^{+} + \overset{+}{f}{}_x^{\,\prime} h_x^1)' +$$
$$+\overset{++}{h}{}^1/(\overset{+}{h}{}^1)^2 h_x^1 h_x^{1\,\prime}]\delta x / \overset{+}{h}{}^1. \qquad /18/$$

5) Выделим теперь главные по $\Delta\tau$, ε члены в приращении функционала. По аналогии с [I] будем иметь

$$\Delta I = \Phi(\tilde{x}(\tilde{t}_1),\tilde{t}_1) - \Phi(x(t_1),t_1) =$$
$$= \Phi(\tilde{x}(\tilde{t}_1),\tilde{t}_1) - \Phi(\tilde{x}(t_1),t_1) + \Phi(\tilde{x}(t_1),t_1) - \Phi(x(t_1),t_1) =$$
$$= \Delta t_1 \overset{+}{\Phi} + \Delta x'(t_1)\Phi_x + 1/2\,[\Delta t_1^2 \overset{++}{\Phi} + 2\Delta t_1 \Delta x'(t_1)(\overset{+}{\Phi})_x +$$
$$+\Delta x'(t_1)\Phi_{xx}\Delta x(t_1)] + o(|\Delta t_1|^2 + \|\Delta x(t_1)\|^2). \qquad /19/$$

Здесь и далее аргументы производных для краткости не указаны, ими везде служат составляющие экстремали в момент $t=t_1$. Подставляя в /19/ значения $\Delta x(t_1)$, Δt_1 из /15/, /17/, /18/, находим искомое представление приращения в виде

$$\Delta K = -\Delta\tau\ \psi'(t_1)\,\delta x(t_1) -$$
$$-\Delta\tau^2/2\,[\psi'(t_1)\delta^2 x_1(t_1) + \delta x'(t_1)\Psi(t_1)\,\delta x(t_1)] -$$
$$-\varepsilon^2/2\ \ \psi'(t_1)\,\delta^2 x_2(t_1) + o(|\Delta\tau|^2 + \varepsilon^2), \qquad /20/$$

где

$$\psi(t_1) = -\Phi_x(x(t_1),t_1) - \lambda^1 h_x^1(x(t_1),t_1), \qquad /21/$$

$$\lambda^1 = -(\overset{+}{\Phi}/\overset{+}{h}{}^1)(x(t_1),u(t_1),t_1),$$

$$\Psi(t_1) = -\Phi_{xx} - \lambda^1 h^1_{xx} +$$
$$+ (1/\overset{+}{h}{}^1)\, h^1_x \left[(\Phi_x)^{+} + \lambda^1 (h^1_x)^{+} - \dot\psi(t_1) \right]' +$$
$$+ (1/\overset{+}{h}{}^1) \left[(\Phi_x)^{+} + \lambda^1 (h^1_x) - \dot\psi(t_1) \right] h^{1\prime}_x -$$
$$- (\overset{++}{\Phi} + \lambda^1 \overset{++}{h}{}^1) / (\overset{+}{h}{}^1)^2\, h^1_x h^{1\prime}_x . \qquad /22/$$

б) Анализ формулы приращения /20/ приводит к таким выводам: вдоль особой экстремали необходимо выполнить соотношения:

I) $\delta\tau\ \psi'(t_1)\,\delta x(t_1) \leqslant 0$;

II) если $\psi'(t_1)\delta x(t_1) = 0$, то

$$\delta\tau^2 \left[\psi'(t_1)\delta^2 x_1(t_1) + \delta x'(t_1)\Psi(t_1)\delta x(t_1)\right] + \psi'(t_1)\delta^2 x_2(t_1) \leqslant 0.$$

Полученные выводы суть необходимые условия оптимальности экстремали в случае касания. Придадим им новую форму, введя в рассмотрение непрерывное при $t_0 \leqslant t \leqslant t_1,\ t \neq \tau$, решение $\psi_+(t)$ сопряженного уравнения

$$\dot\psi = -f_x'(x(t), u(t), t)\,\psi \qquad /23/$$

с начальным условием /2I/ и условием скачка в точке τ :

$$\psi(\tau-) = \psi(\tau+) + \mu\, p_x(x(\tau), \tau), \qquad /24/$$

где $\mu = \mu_+$,

$$\mu_+ = -\left[\psi_+'(\tau+)\,\nabla\ddot x(\tau) + 2\,\dot\psi_+'(\tau+)\,\nabla\dot x(\tau) +\right.$$
$$\left. + \nabla\dot x(\tau)\,\Psi_+(\tau)\,\nabla\dot x(\tau)\right] / \overset{++}{p}(x(\tau), u(\tau-)\,\dot u(\tau-), \tau),$$

$\Psi_+(t),\ \tau \leqslant t \leqslant t_1$, - решение матричного дифференциального уравнения

$$\dot\Psi = -f_x'(\dot x(t), u(t), t)\Psi - \Psi f_x(x(t), u(t), t) - H_{xx}(\psi_+(t), x(t), u(t), t)$$

с начальным условием /22/.

В новых обозначениях с учетом /I3/, /I4/ и уравнений на

δx, $\delta^2 x_1$, $\delta^2 x_2$ условия оптимальности примут вид:

I) $\psi_+'(\tau+)\nabla\dot{x}(\tau) \geqslant 0$;

П) если $\psi_+'(\tau+)\nabla\dot{x}(\tau)=0$, то

$$\psi_+'(t_0)\,\delta^2 x_0 + \psi_+'(\theta)\Delta_v f\Big|_\theta \leqslant 0$$

для всех $\delta^2 x_0$, $v\in U$, $t_0<\theta<\tau$, удовлетворяющих /7/, /13/.

7) Заметим, что условию П) можно придать более законченную форму. Если отвлечься от деталей, в нем фактически утверждается, что на особой экстремали некоторое линейное неравенство $a'z\leqslant 0$ должно выполняться для всех решений системы условий

$$A_0 z = 0,\quad Az < 0,\quad z\in V \qquad /25/$$

при заданных матрицах A_0, A и множестве V. Конкретнее, имеются в виду

$$z=\begin{pmatrix}\delta^2 x_0\\ \Delta_v f\big|_\theta\end{pmatrix},\quad a=\begin{pmatrix}\psi_+(t_0)\\ \psi_+(\theta)\end{pmatrix},\quad A_0=(h_x^0(x(t_0)),0), \qquad /26/$$

$$A=-(\psi_-'(t_0),\psi_-'(\theta)),\quad V=R^n\times\Delta_v f\big|_\theta .$$

Легко доказывается следующее утверждение. Если неравенство $a'z\leqslant 0$ есть следствие системы условий /25/ (в приведенном выше смысле), то оно же будет следствием расширенной системы условий

$$A_0 z = 0,\quad Az\leqslant 0,\quad z\in Q,$$

где Q - конус с вершиной в нуле, порожденный замыканием выпуклой оболочки V :

$$Q=\bigcup_{\alpha\geqslant 0}\alpha\cdot\overline{co\,V}.$$

В свою очередь, последнее будет иметь место тогда и только тогда, когда найдутся векторы λ^0, $\lambda\geqslant 0$ соответствующих размерностей и вектор y из конуса Q^*, сопряженного Q, такие, что

$$a = A_0'\lambda^0 + A'\lambda + y. \qquad /27/$$

Заключительная часть утверждения является обобщением известной леммы Фаркаша (см., например, [6 , с.125]). Достаточность проверяется непосредственно, необходимость устанавливается с помощью теоремы об отделимости выпуклых множеств.

Равенство /27/, будучи следствием необходимого условия оптимальности, само становится необходимым условием оптимальности. Перепишем его в обозначениях /26/. Поскольку

$$\overline{co\, V} = R^n \times \overline{co\, \Delta_v f\big|_\theta}\,, \quad \theta^* = \{0\} \times (\overline{co\Delta_v f|_\theta})^*,$$

будем иметь

$$\psi_+(t_0) + \lambda\, \psi_-(t_0) = h_x^{0\prime}(x(t_0))\lambda^0, \quad \lambda \geqslant 0, \quad \lambda^0 \in R^m,$$
$$\psi_+(\theta) + \lambda\, \psi_-(\theta) \in (\overline{co\, \Delta_v f\big|_\theta})^*. \qquad /28/$$

Функция $\psi(t) = \psi_+(t),\, \tau < t \leqslant t_1$; $\psi(t) = \psi_+(t) + \lambda\, \psi_-(t),\, t_0 \leqslant t < \tau$, как легко проверить, удовлетворяет /23/, /24/ при $\mu = \mu_+ + \lambda \geqslant \mu_+$. Для нее из /28/ получаем

$$\psi(t_0) = h_x^{0\prime}(x(t_0))\,\lambda^0, \qquad /29/$$

$$\Delta_v H\big|_\theta = \psi'(\theta)\Delta_v f\big|_\theta = [\psi_+(\theta) + \lambda\psi_-(\theta)]'\Delta_v f\big|_\theta \leqslant 0. \qquad /30/$$

Сформулируем окончательные выводы.

Т е о р е м а I. Пусть $u(t), x(t)$ - особая экстремаль задачи /I/, /2/, касающаяся в момент τ поверхности разрыва и обладающая свойствами а) - г). Пусть, далее, $\psi : [t_0, t_1] \to R^n$ - непрерывное, за исключением $t = \tau$, решение уравнения /23/ с начальным условием /21/ и условием скачка /24/. Если имеются $\delta^2 x_0 \in R^n, v \in U,\ \theta \in (t_0, \tau)$, удовлетворяющие /7/, /13/, то справедливо неравенство

$$\psi'(\tau+)\ \nabla \dot{x}(\tau) \geqslant 0. \qquad /31/$$

Если дополнительно $\psi'(\tau+) \nabla \dot{x}(\tau) = 0$, то существуют вектор $\lambda^0 \in R^m$ и число $\mu \geqslant \mu_+$ такие, что выполняются условие трансверсальности /29/, условие максимума /30/ для $t_0 \leqslant \theta \leqslant t_1$, $v \in U$. При этом функция $t \to H(\psi(t), x(t), u(t), t)$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ непрерывна и

$$H(\psi(t_1), x(t_1), u(t_1), t_1) = \Phi_t(x(t_1), t_1) + \lambda^{1\prime} h_t^1(x(t_1), t_1). \qquad /32/$$

Первые утверждения теоремы установлены выше. Неравенство /30/ для $\tau \leqslant t \leqslant t_1$ и свойства функции H доказываются по аналогии с непрерывными системами [2]. Константа μ_+ определена в п.6).

§ 3. Касание траекторией терминального многообразия

Рассмотрим особую экстремаль $u(t), x(t), t_0 \leq t \leq t_1$, задачи /I/, /2/, имеющую касание с терминальным многообразием $h^1 = 0$, и удовлетворяющую следующим требованиям: а) имеется единственное $t_0 < \tau < t_1$, для которого $p(x(\tau),\tau)=0$, $\overset{-}{p}(x(\tau), u(\tau-), \tau) \times$ $\times \overset{+}{p}(x(\tau), u(\tau+), \tau) > 0$, $u(\tau-) = u(\tau+)$; б) $p(x(t_1), t_1) > 0$, $\overset{+}{h}{}^1(x(t_1), u(t_1), t_1) = 0$, $\overset{++}{h}{}^1(x(t_1), u(t_1), \dot{u}(t_1), t_1) > 0$.

Как и в предыдущем разделе, погрузим особую экстремаль в семейство варьированных управлений $\tilde{u}(t)$ и траекторий $\tilde{x}(t)$ задачи /I/, /2/. Приращения $\Delta u(t), \Delta x_0$ зададим в виде /5/-/7/, считая $t_0 < \theta < t_1$, $\theta \neq \tau$.

На основании известных [7,8] результатов, приращение $\Delta x(t)$ траектории будет описываться такими же соотношениями, как в п.I) раздела 2, вплоть до момента $\tilde{t}_1 = t_1 + \Delta t_1$ попадания $\tilde{x}(t)$ на терминальное многообразие. Вследствие непрерывности траектории $\tilde{x}(t)$ в точке пересечения с поверхностью разрыва на функцию $t \to \delta^2 x(t)$ накладывается дополнительное соотношение

$$\delta^2 x(\tau+) = \delta^2 x(\tau-) + \delta^2 \tau \; \nabla \dot{x}(\tau),$$

$$\delta^2 \tau = -p'_x(x(\tau),\tau)\; \delta^2 x(\tau-) \Big/ \overset{-}{p}(x(\tau), u(\tau), \tau).$$

Момент $\tilde{t}_1$ находится с очевидными изменениями рассуждений п.2) раздела 2. Результаты таковы. Если

$$h^1_x(x(t_1), t_1)\, \delta^2 x(t_1) \Big/ \overset{++}{h}{}^1(x(t_1), u(t_1), \dot{u}(t_1), t_1) \leq 0, \qquad /33/$$

то

$$\Delta t_1 = \varepsilon\, \delta t_1 + o(\varepsilon),$$

$$\delta t_1 = -[-h^{1\prime}_x(x(t_1), t_1)\, \delta^2 x(t_1) / \overset{++}{h}{}^1(x(t_1), u(t_1) \dot{u}(t_1), t_1)]^{1/2}, \qquad /34/$$

$$\tilde{x}(\tilde{t}_1) = x(t_1) + \Delta t_1\, \dot{x}(t_1) +$$

$$+ 1/2\, [\Delta t_1^2\, \ddot{x}(t_1) + \varepsilon^2 \delta^2 x(t_1)] + o(|\Delta t_1|^2 + \varepsilon^2).$$

Для вывода необходимых условий оптимальности остается проанализировать на особой экстремали приращение функционала

$$0 \leq \Delta K = \Phi(\tilde{x}(\tilde{t}_1), \tilde{t}_1) - \Phi(x(t_1), t_1) =$$

$$= \Delta t_1\, \overset{+}{\Phi}(x(t_1), u(t_1), t_1) + 1/2\, [\Delta t_1^2\, \overset{++}{\Phi}(x(t_1), u(t_1), \dot{u}(t_1), t_1) +$$

$$+\varepsilon^2 \Phi_x'(x(t_1),t_1)\,\delta^2 x(t_1)] + o(|\Delta t_1|^2+\varepsilon^2).$$

Отсюда, учитывая /33/, /34/, получаем два вывода:

I) $\delta t_1 \overset{+}{\Phi} \geqslant 0$;

П) если $\overset{+}{\Phi} = 0$, то

$$\delta t_1^2 \overset{++}{\Phi} + \Phi_x' \delta^2 x(t_1) = [\Phi_x - (\overset{++}{\Phi}/\overset{++}{h^1}) h_x^1]' \delta^2 x(t_1) \geqslant 0. \quad /35/$$

Используя непрерывное (за исключением τ) решение $\psi_1 : [t_0, t_1] \to R^n$ сопряженного уравнения /23/, /24/ с начальным условием и параметрами $\lambda = \lambda^1$, $\mu = \mu_1$ вида

$$\psi(t_1) = -\Phi_x(x(t_1),t_1) - \lambda h_x^1(x(t_1),t_1), \quad /36/$$

$$\lambda^1 = -(\overset{++}{\Phi}/\overset{++}{h^1})(x(t_1), u(t_1), \dot u(t_1), t_1),$$

$$\mu_1 = -\psi'(\tau+)\nabla \dot x(\tau) / \overset{+}{p}(x(\tau), u(\tau), \tau),$$

перепишем /35/ в эквивалентной форме:

$$\psi_1'(t_0)\delta^2 x_0 + \psi_1'(\theta)\Delta_v f\Big|_\theta \leqslant 0. \quad /37/$$

Применив к /33/, /37/ результаты п.7) предыдущего раздела, получаем следующий результат.

Т е о р е м а 2. Пусть особая экстремаль $u(t)$, $x(t)$ задачи /I/, /2/ касается терминального многообразия и отвечает требованиям а), б) раздела 2. Пусть, далее, $\psi : [t_0, t_1] \to R^n$ - непрерывное при $t \neq \tau$ решение /23/, /24/, /36/. Если найдутся $\delta^2 x_0 \in R^n$, $v \in U$, $\theta \in [t_0, t_1]$, $\theta \neq \tau$, для которых

$$[\psi_1'(t_0)\delta^2 x_0 + \psi_1'(\theta)\Delta_v f\Big|_\theta] / \overset{++}{h^1}(x(t_1), u(t_1), \dot u(t_1), t_1) < 0,$$

$$h_x^0(x(t_0))\,\delta^2 x_0 = 0,$$

то $\overset{+}{\Phi} \leqslant 0$. Кроме того, если $\overset{+}{\Phi} = 0$, то существуют такие $\lambda^0 \in R^m$, $\lambda \geqslant \lambda^1$, $\mu = \mu_1$, что справедливы условие трансверсальности /29/, условие максимума /30/ и условие /32/ для момента t_1 , где λ^1 следует заменить на λ .

§ 4. Обсуждение результатов. Примеры

Сопоставим полученные выводы с имеющимися в литературе [3]. Как видно из формулировки теоремы I, в случае касания принципу максимума предшествует еще одно дополнительное необходимое условие оптимальности вида /3I/, которое можно рассматривать как некоторое соотношение на момент касания или как условие сопряжения оптимальных скоростей на поверхности разрыва. Само оно имеет место лишь в предположении /I3/, когда гарантировано попадание варьированных траекторий на поверхность разрыва. В этом и состоит основное отличие формулировки теоремы I от приведенных в [3] результатов. Другое отличие - в уточнении константы μ в условии скачка. В работе [3] утверждается только ее существование.

Важность условий теоремы покажем на простых примерах задачи /I/, /2/.

Пример I. $\Phi = x_2$; $\dot{x}_1 = u_1, \dot{x}_2 = u_2$,

$$p = -x_2 - (x_1 - 1)^2 < 0 ; \ \dot{x}_1 = u_2, \ \dot{x}_2 = -u_1, \ p > 0; \ h_1^0 = x_1(0) = 0,$$

$$h_2^0 = x_2(0) = 0 ; \ h^1 = t_1 - 2 = 0 ; \ 0 \leqslant u_1, \ u_2 \leqslant 1 .$$

Управление $u_1(t) = 1, u_2(t) = 0, 0 \leqslant t \leqslant 2$, очевидно, оптимально и удовлетворяет условиям теоремы I при $\tau = 1$. Ему соответствует решение $\psi_{-1}(t) = 0$, $\psi_{-2}(t) = -1$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, вспомогательной сопряженной системы и решение $\psi_1(t) = 0$, $\psi_2(t) = -1$, $1 < t \leqslant 2$, системы /23/, /2I/. Условие /I3/ здесь не выполнено: $\psi'_-(t_0)\,\delta^2 x_0 + \psi'_-(\theta)\,\Delta_v f\big|_\theta = -v_2 \leqslant 0$, поэтому не выполняется и условие /3I/: $\psi'(1+)\nabla\dot{x}(1) = (0,-1)\binom{1}{1} = -1 < 0$.

Пример 2. $\Phi = x_2$; $\dot{x}_1 = u_1$, $\dot{x}_2 = u_2$,

$$p = x_2 - (x_1 - 1)^2 < 0 ; \ \dot{x}_1 = 0 , \ \dot{x}_2 = 1, \ p > 0; \ h_1^0 = x_1(0) = 0,$$

$$h_2^0 = x_2(0) = 0 ; \ h^1 = t_1 - 2 = 0 ; \ u_1^2 + u_2^2 = 1 , \ 0 \leqslant u_1 , u_2 \leqslant 1 .$$

В данном примере вдоль управления, рассмотренного в предыдущем примере, условие /I3/ выполнено: $\psi'_-(t_0)\,\delta^2 x_0 + \psi'_-(\theta)\,\Delta_v f\big|_\theta = v_2 > 0 \quad (0 < v_1 < 1)$. Условие /3I/ свидетельствует о возможной оптимальности управления: $\psi'(1+)\nabla\dot{x}(1) = 1 > 0$. Простой анализ условий задачи показывает, что управление действительно оптимально.

Пример 3. В условиях примера 2 возьмем $h^1 = x_2 - (x_1 - 1)^2 - 1 = 0$, $U = \{(u_1 u_2) : u_2 = (u_1 - 1)^2, \ 0 \leqslant u_1 \leqslant 1\}$. Тогда управление примера I будет по-прежнему оптимальным. Условия /I3/, /3I/ для него выполнены, причем второе - тривиально: $0 \geqslant 0$. Проверка условия максимума $\Delta_v H\big|_\theta = 0$, $1 \leqslant \theta \leqslant 2$; $\Delta_v H\big|_\theta = \mu v_2 \leqslant 0 \ (0 \leqslant v_2 \leqslant 1, 0 \geqslant \mu \geqslant \mu_+ = -2)$ подтверждает оптимальность данного управления.

В теореме 2 при определенных допущениях установлен аналог условий трансверсальности в случае касания оптимальной траектории терминального многообразия. В частности, условия трансверсальности будут иметь место и в особых точках терминального многообразия, которые из рассмотрения обычно исключаются (см. [2, с.53]). Как показывают формулы /21/, /36/, множитель Лагранжа λ^1, λ в условиях трансверсальности принимает, вообще говоря, разные значения в зависимости от того, реализуется или нет случай касания.

Отметим еще одну характерную особенность случая касания. Если опорная траектория "протыкает" поверхность разрыва, то отклонение варьированной траектории от опорной после импульсного возмущения управления имеет один и тот же порядок малости на всем оставшемся интервале времени [7,8]. В случае касания картина меняется: отклонения траекторий до и после поверхности разрыва становятся разного порядка малости. Именно это обстоятельство вынуждает разлагать приращение траектории не только по степеням ε, но и по степеням $\Delta\tau$ (формула /15/). Оно же обусловливает появление дополнительного необходимого условия оптимальности /31/, предшествующего принципу максимума. Уместно заметить, что исключение из /15/ величины $\Delta\tau$ посредством /11/ сделало бы вывод П неправомочным.

В заключение в качестве гипотезы выскажем еще одну мысль. Если условию /13/ можно удовлетворить малыми по норме допустимыми $\delta^2 x_0$, $\Delta_v f|_\theta$ так, чтобы $\Delta\tau$ и ε^2 были одного порядка малости, т.е. $\Delta\tau/\varepsilon^2 \to c/2$, $\varepsilon \to 0$ $(c - const \neq 0)$, то из формулы приращения /20/ на особой экстремали будет следовать $\psi'(t_1)[c\cdot \delta x(t_1) + \delta^2 x_2(t_1)] \leqslant 0$, что эквивалентно принципу максимума. Таким образом, есть основание полагать, что по крайней мере для некоторых разрывных задач управления особые экстремали удовлетворяют принципу максимума вне связи с условием /31/. Частично классы таких задач описаны в работе [3].

Поступила в ред.-изд.отдел
17 сентября 1979 г.

Л и т е р а т у р а

1. Ащепков Л.Т. Особые экстремали разрывных систем управления. I.-Настоящий сборник, с.3.

2. Математическая теория оптимальных процессов/ Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В. - М.: Наука, 1969. -384с.

3. Хоанг Хыу Дыонг. Условие скачка в одной задаче оптимального управления. - Дифференц. уравнения, 1966, т.2, № 5, с.619-627.

4. Филиппов А.Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. - Мат. сб., 1960, т.51, № 1, с.99-128.

5. Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии. - М.: ГИТТЛ, 1956. -420с.

6. Васильев В.П. Лекции по методам решения экстремальных задач.- М.: Изд. МГУ, 1974. -375с.

7. Величенко В.В. О задачах оптимального управления для уравнений с разрывными правыми частями. - Автоматика и телемеханика, 1966, № 7, с.20-30.

8. Розов Н.Х. Метод локальных сечений для систем с преломлением траекторий. - Докл. АН СССР, 1972, т.202, № 3, с.535-538.