Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 2.
УДК.62.501.

ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ СИСТЕМ С КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ, СОДЕРЖАЩИМИ НЕРАВЕНСТВА

Ю.М.Волин, Г.М.Островский /Москва/

Дается вывод принципа максимума для систем, описываемых конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений с краевыми условиями, содержащими неравенства. Полученные результаты используются для исследования задачи нахождения оптимального температурного режима в реакторе с ограничением на избирательность процесса.

В [I] были получены необходимые условия оптимальности для объектов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями с условиями для концов в виде равенств. Тем не менее многие оптимальные задачи, возникающие в приложениях, приводят к рассмотрению систем, в которых на краевые условия могут быть наложены ограничения типа неравенств. В [2] приводится результаты для оптимальной задачи, в которой правый конец траектории принадлежит замкнутому выпуклому множеству, имеющему внутреннюю точку. Однако последним обстоятельством исключаются из рассмотрения оптимальные задачи, в которых краевые условия задаются одновременно равенствами и неравенствами, так как в этом случае множество допустимых концевых значений не имеет внутренних точек /кроме того, множество концевых значений, задаваемое неравенствами, может не быть выпуклым/. В данной статье рассматривается именно этот случай совместного задания краевых условий в виде равенств и неравенств.

Пусть закон движения объекта определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x, u), \quad i = 1, \ldots, n \;; \; t_0 \leqslant t \leqslant t_1, \qquad /1/$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$ - точка фазового пространства X, а $u = (u_1, \ldots, u_m)$ - точка пространства управлений. Моменты времени t_0, t_1 считаем фиксированными. Пусть U - множество допустимых значений управления, а в качестве класса допустимых управлений взят класс кусочно-непрерывных управлений, что обычно является достаточным для приложений.

Фазовая траектория $x(t)$ должна удовлетворять следующим краевым условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_\ell(x^0, x^1) = 0, \quad \ell = 1, \ldots, p^1, \\ &\Phi_\ell(x^0, x^1) \geqslant 0, \quad \ell = p^1 + 1, \ldots, p, \end{aligned}\right\} \qquad /2/$$

где $x^0 = x(t_0)$, $x^1 = x(t_1)$.

Относительно функций f_i предполагается, что они сами и функции $\partial f_i / \partial x_j$ определены и непрерывны на прямом произведении $X \times \bar{U}$, где

$\bar{U}$ - замыкание множества U. Функции Φ_ℓ предполагаются непрерывно дифференцируемыми.

Требуется найти допустимое управление $u(t)$, для которого решение $x(t)$ уравнения /1/ удовлетворяет краевым условиям /2/ и обращает в максимум величину

$$I = \Phi(x^0, x^1). \qquad /3/$$

Формулировка принципа максимума

Для задачи /1/ - /3/ необходимые условия оптимальности управления $u(t)$ формулируются в виде следующей теоремы.

Теорема. Если $u(t)$ является управлением, то существуют числовой параметр

$$\lambda_0 \geq 0, \qquad /4/$$

вектор-функция $\lambda(t)=(\lambda_1(t),\ldots,\lambda_n(t))$, удовлетворяющая сопряженной системе уравнений

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_s \frac{\partial f_s}{\partial x_i}, \quad i=1,\ldots,n, \qquad /5/$$

и числовые параметры d_ℓ, $\ell=1,\ldots,p$, для которых выполняется

$$H(\lambda(t),x(t),u(t)) = \max_{u\in U} H(\lambda(t),x(t),u), \qquad /6/$$

где

$$H=\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(x,u); \qquad /7/$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_i(t_1) &= \lambda_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i^1} + \sum_{\ell=1}^{p} d_\ell \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial x_i^1}, \quad i=1,\ldots,n \\ \lambda_i(t_0) &= -\left(\lambda_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x_i^0} + \sum_{\ell=1}^{p} d_\ell \frac{\partial \Phi_\ell}{\partial x_i^0}\right); \end{aligned}\right\} \qquad /8/$$

$$d_\ell \geq 0, \quad d_\ell \Phi_\ell = 0, \quad \ell = p^1+1,\ldots,p. \qquad /9/$$

Условия /8/ являются спецефическими для данной задачи, отражающими факт наличия ограничений

$$\Phi_\ell(x^0, x^1) \geq 0 \quad (\ell = p^1+1,\ldots,p).$$

При этом $(\lambda_0, \lambda(t)) \neq 0$ ни для какого $t \in [t_0, t_1]$. Сокращенное доказательство теоремы дано в приложении.

Пример. В качестве примера рассмотрим задачу нахождения оптимального температурного режима в реакторе для получения окиси этилена [3] при ограничении на избирательность процесса. Задача состоит в отыскании распределения температур в реакторе, обеспечивающем максимальное превращение исходного вещества /этилена/ в целевой продукт /окись этилена/. При этом вводится ограничение на избирательность процесса /избирательность - доля исходного вещества, превратившегося в полезный продукт, по отношению к общему количеству прореагировавшего исходного вещества/: избирательность процесса должна быть не меньше некоторой заданной величины. Последнее является ограничением на потери сырья, связанные с наличием побочных реакций в реакторе. Математически задача формулируется следующим образом.

Найти $T(t)$, максимизирующее $z(t_1)$ при условии

$$z(t_1)-\eta_{min}\, x(t_1)\geq 0,\quad 1>\eta_{min}>0, \tag{10}$$

где $z(t), x(t)$ удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dz}{dt}=k_1 f(x),\quad z(0)=0,\\ &\qquad t_0=0\leq t\leq t_1,\\ &\frac{dx}{dt}=(k_1+k_2)f(x),\quad x(0)=0, \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

где

$$f(x)=\frac{1-x}{1+ax},\quad k_i=k_{i0}e^{-\frac{E_i}{RT}},\quad i=1,2,$$

$$a, E_i, k_{i0}, R>0. \tag{12}$$

Физический смысл переменных задачи следующий:

z - степень превращения этилена в окись этилена;

x - общая степень превращения этилена /в окись этилена и побочные продукты/;

$T_{доп}$ - максимально допустимая температура в реакторе;

T - температура, являющаяся параметром управления;

η_{min} - минимально допустимая избирательность процесса;

t - время контакта;

E_i - энергии активации, причем $E_2>E_1$.

На температуру внутри реактора наложено ограничение:

$$0<T\leq T_{доп}, \tag{13}$$

определяющее множество U.

Сопряженная система уравнений в данном случае имеет вид:

$$\frac{d\lambda_1}{dt}=0,\quad \frac{d\lambda_2}{dt}=-f'(x)(k_1(\lambda_1+\lambda_2)+k_2\lambda_2), \tag{14}$$

а условия /4/, /6/, /8/, /9/, как легко видеть, запишутся следующим образом /учитывая, что для любого решения /11/ $0\leq x<1$ и, следовательно, $f(x)>0$ /:

$$\begin{aligned} &k_1(T(t))(\lambda_1+\lambda_2(t))+k_2(T(t))\lambda_2(t)=\\ &=\max_{0<T\leq T_{доп}}[k_1(T)(\lambda_1+\lambda_2(t))+k_2(T)\lambda_2(t)], \end{aligned} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned} &\eta_{min}\lambda_1+\lambda_2(t_1)\geq 0,\ \lambda_2(t_1)\leq 0,\\ &\lambda_2(t_1)=0,\quad \text{если } z(t_1)-\eta_{min}x(t_1)>0. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

При этом $(\lambda_1, \lambda_2(t))\neq 0$.

Покажем, что для данной задачи имеют место следующие качественные результаты:

1° оптимальный температурный режим $T(t)$ является непрерывной и возрастающей функцией t;

2° если для задачи без ограничения /10/ для оптимального решешения имеет место $z(t_1)-\eta_{min}x(t_1)<0$, то в оптимальной задаче с ограничением /10/ $z(t_1)-\eta_{min}x(t_1)=0$, т.е. ограничение /10/ обязательно "работает".

Обозначим:

$$\bar H(T,\lambda_1,\lambda_2)=k_1(T)(\lambda_1+\lambda_2)+k_2(T)\lambda_2. \qquad /17/$$

Легко видеть, что при любых $(\lambda_1,\lambda_2)\neq 0$ $\bar H(T,\lambda_1,\lambda_2)$ как функция T в области $T>0$ может иметь только один экстремум. Отсюда сразу следует непрерывность $T(t)$, так как в случае разрыва $T(t)$ в точке t' $\bar H(T,\lambda_1,\lambda_2(t))$ имела бы два экстремума - при $T=T(t'-0)$ и $T=T(t'+0)$.

Покажем теперь, что $T(t)$ - возрастающая функция. Достаточно рассмотреть участок $T(t)<T_{gon}$. На нем должно выполняться

$$RT^2\frac{\partial\bar H}{\partial T}=E_1k_1(T)(\lambda_1+\lambda_2)+E_2k_2(T)\lambda_2=0. \qquad /18/$$

Дифференцируя /18/, с учетом /14/ получим

$$\frac{dT}{dt}=RT^2\frac{E_1k_1\lambda_1-f'(x)(E_1k_1+E_2k_2)\bar H(T,\lambda_1,\lambda_2)}{E_1k_1(\lambda_1+\lambda_2)+E_2k_2\lambda_2}. \qquad /18'/$$

В силу /16/ $\lambda_1>0$. Учитывая; что $f'(x)<0$, имеем, как легко видеть, $\frac{d\lambda_2}{dt}>0$. Следовательно, $\lambda_2(t)<0$ при $t<t_1$. Легко видеть далее, что $\lambda_1+\lambda_2>0$ /иначе $\bar H(T,\lambda_1,\lambda_2)=\bar H(0,\lambda_1,\lambda_2)=0=\sup\limits_{0<T}\bar H(T,\lambda_1,\lambda_2)$/, а также, что в точке максимума $\bar H(T,\lambda_1,\lambda_2)>0$. Отсюда получаем $\frac{dT}{dt}>0$ при $T(t)<T_{gon}$. Мы заранее предполагали дифференцируемость $T(t)$. Однако этого можно и не делать, а рассмотреть в малой окрестности точки t', в которой $T(t')<T_{gon}$, функцию $T^*(t)$, которая удовлетворяет уравнению /18'/ и начальному условию $T^*(t')=T(t')$. Для $T^*(t)$, очевидно, выполнено /18'/, и, следовательно, $T^*(t)\equiv T(t)$. Покажем теперь справедливость 2°. В задаче без ограничения /10/ $\lambda_2(t_1)=0$.

Пусть в задаче с ограничением /10/ $z(t_1)-\eta_{min}x(t_1)>0$. Тогда для этой задачи /см. /16// также $\lambda_2(t_1)=0$. Покажем, что условием $\lambda_2(t_1)=0$ $T(t)$ определяется однозначно. Отсюда легко вытекает невозможность неравенства $z(t_1)-\eta_{min}x(t_1)>0$. Пусть $\lambda_1=1$ и $T(\lambda_2)$ определяется условием $\bar H(T(\lambda_2),1,\lambda_2)=\max\limits_{0<T\le T_{gon}}\bar H(T,1,\lambda_2)$. Разделив второе из уравнений /11/ на второе из уравнений /14/, после разделения переменных найдем

$$F(x)=\int_0^x\frac{-f'(x)dx}{f(x)}=\int_{\lambda_2(0)}^{\lambda_2}\frac{(k_1(T(\lambda_2))+k_2(T(\lambda_2)))d\lambda_2}{k_1(T(\lambda_2))(\lambda_2+1)+k_2(T(\lambda_2))\lambda_2}=\Phi(\lambda_2(0),\lambda_2), \qquad /19/$$

где $F(x)$ - монотонно возрастающая функция x, а $\Phi(\lambda_2(0),\lambda_2)$ - - монотонно убывающая функция $\lambda_2(0)$ при фиксированном λ_2. /19/ определяет $x=\varphi(\lambda_2(0),\lambda_2)$. При этом $\varphi(\lambda_2(0),\lambda_2)$ - монотонно убывающая функция $\lambda_2(0)$. Далее, с помощью второго из уравнений

/14/ получаем

$$t_1 = \chi(\lambda_2(0)) = \int\limits_{\lambda_2(0)}^{0} -\frac{d\lambda_2}{f'(\varphi(\lambda_2(0),\lambda_2)(k_1(T(\lambda_2))(1+\lambda_2)+k_2(T(\lambda_2))\lambda_2}, \qquad /20/$$

Легко видеть, что $\chi(\lambda_2(0))$ – монотонно убывающая функция. Следовательно, существует единственное $\lambda_2(0)$, при котором выполняется /20/, а значит, $T(t)$ определяется однозначно.

Следовательно, $z(t_1) - \eta_{min}\bar{x}(t_1) = 0$.

П р и л о ж е н и е

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы. Будем рассматривать наборы*/

$$a = \{\tau_i, v_i, \delta t_i \ (i = 1,\dots,s_a), \xi_0\}, \qquad /П.1/$$

где τ_i – точки непрерывности оптимального управления

$$u(t), \quad t_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{s_a} < t_1, \ \delta t_i \geqslant 0,$$

и вызванные ими вариации оптимальной траектории $x(t)$. Проварьированная траектория удовлетворяет уравнению:

$$x^*(t) = x(t) + \varepsilon\Delta x(t) + o(\varepsilon), \qquad /П.2/$$

где для $t \neq \tau_i$

$$\Delta x(t) = A_{tt_0}\xi_0 + \sum_{i=1}^{s} A_{t\tau_i}[f(x(\tau_i),v_i) - f(x(\tau_i), u(\tau_i))]\delta t_i, \qquad /П.3/$$

где s определяется условием $\tau_s < t < \tau_{s+1}$.

$$x^*(t_0) = x(t_0) + \varepsilon\xi_0, \quad \Delta x^0 = \xi_0. \qquad /П.4/$$

N наборов $a_1,\dots,a_N$ определяют N – параметрическое семейство функций $x(t, \varepsilon_1,\dots,\varepsilon_N)$, определенных и, как нетрудно показать, непрерывно дифференцируемых при каждом $t \neq \tau_i$ в области $0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant \varepsilon^0$, где $\varepsilon^0 > 0$ и достаточно мало.

Будем считать, что равенства $\Phi_l(x^0, x^1) = 0$ выполняются для $l = 1,\dots,p''$, где $p' \leqslant p'' \leqslant p$. Обозначим:

$$y_l = \Phi_{lx^0}\Delta x^0 + \Phi_{lx^1}\Delta x^1, \quad l = 0,\dots,p'', \qquad /П.5/$$

где для удобства записи введено $\Phi = \Phi^0$. Обозначим далее через $K_r(r = p',\dots,p'')$ множество в пространстве E_{r+1} точек $(y_0,\dots,y_r)$, определяемых наборами /П.1/, для которых $y_l > 0 (l = r+1,\dots,p'')$

K_r – выпуклый конус.

Л е м м а I. Точка $(\bar{y}_0,\dots,\bar{y}_{p'})$ не является внутренней для $K_{p'}$.

Предположим противное. Так как $(\bar{y}_0,\dots,\bar{y}_{p'})$ – внутрення точка для $K_{p'}$, то можно выбрать точки

$$(y_0^{(0)},\dots,y_{p'}^{(0)}),\dots,(y_0^{(p')},\dots,y_{p'}^{(p')}) \in K_{p'}$$

такие, что $(\bar{y}_0,\dots,\bar{y}_{p'})$ лежит внутри выпуклого конуса К, натянутого на эти точки. Соответствующие наборы $a_0,\dots,a_{p'}$ определяют в

*/Роль этих наборов аналогична роли соответствующих наборов, введенных при доказательстве принципа максимума в [I]. Предполагается, что читатель знаком с этим принципом.

достаточно малой окрестности нуля 0 при неотрицательных значениях аргументов непрерывно дифференцируемые функции:

$$\left.\begin{aligned} &\varrho_0(\varepsilon) = \Phi(x^0(\varepsilon), x^1(\varepsilon)) - \Phi(x^0, x^1), \\ &\varrho_\ell(\varepsilon) = \Phi_\ell(x^0(\varepsilon), x^1(\varepsilon)), \ \ell = 1,\dots,p'', \end{aligned}\right\} \qquad /П.6/$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_0, \dots, \varepsilon_{p'})$. Эти функции могут быть продолжены с сохранением свойства непрерывной дифференцируемости на всю окрестность 0 [3]. Значению $\varepsilon = 0$ отвечает решение оптимальной задачи. Пусть $y_\ell^{(r)}$ $(\ell = p'+1,\dots,p'')$ также определяются набором $a_r (r=0,\dots,p')$, $y_\ell^{(r)} > 0$ /по определению/. Очевидно, что $\partial\varrho_\ell/\partial\varepsilon_r \big|_{\varepsilon=0} = y_r^{(\ell)}$ $(\ell = 0,\dots,p''; r = 0,\dots,p')$. Имеем

$$y_\ell^{(r)} = \sum_{r=0}^{p'} \bar{\varepsilon}_r y_\ell^{(r)}, \qquad /П.7/$$

где $\bar{\varepsilon}_r > 0 (r=0,\dots,p')$, так как $(\bar{y}_0, \dots, \bar{y}_{p'})$ - внутренняя точка конуса К. Очевидно, также

$$\sum_{r=0}^{p'} \bar{\varepsilon}_r y_\ell^{(r)} = \bar{y}_\ell > 0, \qquad \ell = p'+1,\dots,p'' \qquad /П.8/$$

квадратная матрица $\| y_\ell^{(r)} \|$ $(\ell, r = 0,\dots,p')$ является невырожденной, так как конус К имеет внутренние точки в $E_{p'}$. Рассмотрим систему уравнений

$$y_\ell - \varrho_\ell(\varepsilon) = 0, \qquad \ell = 0,\dots,p'. \qquad /П.9/$$

Уравнения /П.19/ удовлетворяются при $\varepsilon = 0$, $y_\ell = 0$, и якобиан $\| \partial\varrho_\ell / \partial\varepsilon_r \|$ не вырожден. Поэтому эти уравнения определяют непрерывно дифференцируемое решение $\varepsilon_r = \varepsilon_r(y_q)$ в окрестности 0, причем $\varepsilon_r(0,\dots,0) = 0$.

Далее по определению

$$\theta\bar{y}_\ell = \varrho_\ell(\varepsilon(\theta y_q)), \qquad \ell = 0,\dots,p'. \qquad /П.10/$$

Дифференцируя это тождество по θ и положив $\theta = 0$, получим

$$\bar{y}_\ell = \sum_{r=0}^{p'} y_\ell^{(r)} \frac{d\varepsilon_r(\theta y_q)}{d\theta}\Big|_{\theta=0}, \quad \ell = 0,\dots,p'. \qquad /П.11/$$

Отсюда в силу невырожденности $\| y_\ell^{(r)} \|$, с учетом /П.7/ следует:

$$\frac{d\varepsilon_r(\theta y_q)}{d\theta}\Big|_{\theta=0} = \varepsilon_r > 0, \ r = 0,\dots,p'. \qquad /П.12/$$

Поэтому для всех малых положительных значений θ $\varepsilon_r(\theta\bar{y}_q)$ положительны и соответствуют траекториям $x(t, \varepsilon(\theta\bar{y}_q))$, лежащим в окрестности оптимальной траектории $x(t)$. При этом имеем

$$\left.\begin{aligned} &\Phi(x^0(\theta\bar{y}_q), x^1(\theta\bar{y}_q)) > \Phi(x^0, x^1), \\ &\Phi_\ell(x^0(\theta\bar{y}_q), x^1(\theta\bar{y}_q)) = 0, \ \ell = 1,\dots,p'. \end{aligned}\right\} \qquad /П.13/$$

Кроме того,

$$\frac{d\varrho_\ell}{d\theta}\Big|_{\theta=0} = \sum_{r=0}^{p'} \frac{\partial\varrho_\ell}{\partial\varepsilon_r}\Big|_{\varepsilon=0} \frac{d\varepsilon_r(\theta\bar{y}_q)}{d\theta}\Big|_{\theta=0} =$$

$$= \sum_{r=0}^{p'} y_\ell^{(r)} \bar{\varepsilon}_r = \bar{y}_\ell > 0, \qquad \ell = p'+1,\dots,p'' \qquad /П.14/$$

Следовательно,

$$\Phi_\ell(x^0(\theta\bar{y}_q), x^1(\theta y_q^1)) > 0, \quad \ell = p^1+1, \dots, p''. \qquad /П.15/$$

Формулы /П.13/, /П.15/ противоречат предположению об оптимальности траектории $x(t)$.

Л е м м а 2. Если $K_r (p' < r < p'')$ не пуст и

$$\lambda_0 y_0 + \sum_{\ell=1}^{r} d_\ell y_\ell \leqslant 0 \text{ для всех } (y_0, \dots, y_r) \in K_r, \qquad /П.16/$$

то существует $d_{r+1} \geqslant 0$ такой, что

$$\lambda_0 y_0 + \sum_{\ell=1}^{r+1} d_r y_r \leqslant 0 \text{ для всех } (y_0, \dots, y_{r+1}) \in K_{r+1}. \qquad /П.17/$$

Пусть d_{r+1} - точная верхняя грань относительно всех таких d, что

$$\lambda_0 y_0 + \sum_{\ell=1}^{r} d_\ell y_\ell + d y_{r+1} < 0 \text{ для всех } (y_0, \dots, y_{r+1}) \in K_{r+1}, y_{r+1} > 0. \qquad /П.18/$$

Очевидно, что $0 \leqslant d_{r+1} < +\infty$. Для d_{r+1}

$$\lambda_0 y_0 + \sum_{\ell=1}^{r+1} d_\ell y_\ell \leqslant 0 \text{ для всех } (y_0, \dots, y_{r+1}) \in K_{r+1}, y_{r+1} > 0. \qquad /П.19/$$

То, что /П.19/ выполняется при $y_{r+1} = 0$, легко вытекает из того, что в силу выпуклости K_{r+1} и непустоты K_r в любой близости от точки $(y_0, \dots, y_{r+1}) \in K_{r+1}, y_{r+1} = 0$ найдется точка $(y_0', \dots, y_{r+1}') \in K_{r+1}$, $y_{r+1}' > 0$. Пусть существует $(y_0^*, \dots, y_{r+1}^*) \in K_{r+1}$ для которого

$$\lambda_0 y_0^* + \sum_{\ell=1}^{r+1} d_\ell y_\ell^* > 0.$$

По доказанному $y_{r+1}^* < 0$. Существует $(y_0', \dots, y_{r+1}') \in K_{r+1}$ такой, что $y_{r+1}' = |y_{r+1}^*|$ и

$$\lambda_0 y_0' + \sum_{\ell=1}^{r+1} d_\ell y_\ell' > -(\lambda_0 y_0^* + \sum_{\ell=1}^{r+1} d_\ell y_\ell^*). \qquad /П.20/$$

В противном случае, очевидно, при

$$d = \frac{\left|\lambda_0 y_0^* + \sum_{\ell=1}^{r+1} d_\ell y_\ell^*\right|}{y_{r+1}^*} + d_{r+1}$$

также выполняется /П.18/. Пусть

$$y_\ell'' = \frac{1}{2}(y_\ell^* + y_\ell'), \quad \ell = 0, \dots, r+1$$

$$(y_0'', \dots, y_{r+1}'') \in K_{r+1}, y_{r+1}'' = 0$$

и

$$\lambda_0 y_0'' + \sum_{\ell=1}^{r+1} d_\ell y_\ell'' > 0,$$

что противоречит /П.21/.

Л е м м а 3. Если $K_r (p' \leqslant r < p'')$ пуст, то $y_{r+1} \leqslant 0$, если $(y_0, \dots, y_{r+1}) \in K_{r+1}$ Утверждение очевидно.

Пусть $K_{p'}$ не пуст. В силу леммы I луч, исходящий из нуля и проходящий через точку /I,0..., 0/, не принадлежит внутренности $K_{p'}$.

Поэтому существует разделяющая их гиперплоскость, т.е. существуют такие числа $\lambda_0, d_1, \ldots, d_{p'}$, $((\lambda_0, d_1, \ldots, d_{p'}) \neq 0)$, что

$$\lambda_0 y_0 + \sum_{l=1}^{p'} d_l y_l \leq 0$$

для всех $(y_0, \ldots, y_{p'}) \in K_{p'}$, а луч L лежит в полупространстве

$$\lambda_0 y_0 + \sum_{l=1}^{p'} d_l y_l \geq 0.$$

Отсюда следует, что $\lambda_0 \geq 0$. Если $K_{p'}$ пуст, то, так как, очевидно, $K_{p''}$ не пуст, существует p''' $(p' \leq p''' < p'')$ такое, что $K_{p'''-1}$ пуст, а $K_{p'''}$ не пуст. В силу леммы 3 для любого $d_{p'''} > 0$ $d_{p'''} y_{p'''} \leq 0$ для всех $(y_0, \ldots, y_{p'''}) \in K_{p'''}$. Применяя теперь лемму 2 в первом случае $p''-p'$ раз, а во втором случае $p''-p'''$ раз, устанавливаем существование $\lambda_0, d_1, \ldots, d_{p''}$ таких, что $(\lambda_0, d_1, \ldots, d_{p''}) \neq 0$, $\lambda_0 \geq 0$, $d_l \geq 0$ $(l = 1, \ldots, p'')$

$$\lambda_0 y_0 + \sum_{l=1}^{p''} d_l y_l \leq 0 \text{ для всех } (y_0, \ldots, y_{p''}) \in K_{p''}. \qquad /П.21/$$

Условие /П.21/ означает, что

$$(\lambda_0 \varphi_{x^0} + \sum_{l=1}^{p''} d_l \varphi_{lx^0}) \Delta x^0 + (\lambda_0 \varphi_{x^1} + \sum_{l=1}^{p''} d_l \varphi_{lx^1}) \Delta x^1 \qquad /П.22/$$

при любых наборах /П.I/.

Пусть $\lambda(t)$ удовлетворяет уравнениям /5/ и условиям на правом конце

$$\lambda(t_1) = \lambda_0 \varphi_{x^1} + \sum_{l=1}^{p''} d_l \varphi_{lx^1}. \qquad /П.23/$$

Пусть $a = \{\tau, v, \delta t, 0\}$. В силу /П.22/, /П.3/, /П.4/, /П.23/ и леммы I гл.2 [1]

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(\tau)[f_i(x(\tau), v) - f_i(x(\tau), u(\tau))] \leq 0.$$

Отсюда вытекает справедливость /6/ для точек непрерывности $u(t)$, а значит, и для любой точки $t \in [t_0, t_1]$.

Наконец, пусть $a = \{\xi_0\}$. В силу /П.22/, /П.23/ и леммы I гл. 2 [1]

$$((\lambda_0 \varphi_{x^0} + \sum_{l=1}^{p''} d_l \varphi_{lx^0}) + \lambda(t_0))\xi_0 \leq 0.$$

В силу произвольности вектора ξ_0 отсюда и из /П.23/ вытекают краевые условия /8/. Наконец, для выполнения условий /9/ достаточно положить $d_{p''+1} = \ldots = d_p = 0$.

Поступила в редакцию 10.4.1969 г.

Литература

I.Л.С.Понтрягин., В.Г.Болтянский., Р.В.Гамкрелидзе., Е.Ф.Мищенко. Математическая теория оптимальных процессов. Физматгиз, 1961.

2.Л.И.Розоноэр. Принцип максимума Л.С.Понтрягина в теории оптимальных систем. I-Ш. Автоматика и телемеханика, т.XX, №№ 10-12,1961.

3.Г.М.Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. I. Физматгиз, 1958.