Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 2.
УДК.512.25.

О СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО РАЗМЕЩЕНИЯ ТОЧЕК НА ОТРЕЗКЕ

Э.Х.Гимадутдинов

Введение

В задачах математического программирования отыскиваются значения k переменных /или параметров/ $x_1, x_2, \ldots, x_k$, которые удовлетворяют определенным ограничениям и минимизируют целевую функцию

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_k). \qquad /1/$$

Решение таких задач простым перебором по всевозможным допустимым значениям параметров практически не реализуемо. Построение экономных алгоритмов для решения поставленных задач зависит обычно от того, насколько глубоко использованы внутренние свойства, присущие оптимизируемой функции и ограничениям, накладываемым на переменные.

В ряде задач нелинейного программирования, в частности в задачах динамического программирования, отыскание оптимального значения функции /1/ производится при переменном числе параметров. При этом в некоторых случаях показано [1] - [5], что получаемая в процессе решения последовательность $\{S_k\}$ оптимальных значений функции /1/ оказывается выпуклой. Подобные этому факты часто удается использовать для существенного уменьшения трудоемкости вычислительного алгоритма.

Так, например, В.Т.Дементьевым [1] для целевой функции вида

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i=0}^{k} c(x_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} dF(x) \qquad /2/$$

$(a=x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant x_{k+1}=b)$ доказано, что если $c(x)$ и $F(x)$ - неубывающие функции, то последовательность минимумов $\{S_k\}$ выпукла. Там же показан пример использования выпуклости $\{S_k\}$ для получения менее трудоемкого способа решения по сравнению с методом динамического программирования .

Н.И.Глебовым [2] для задачи минимизации функции более общего вида

$$S(x_1, x_2, \ldots, x_k) = \sum_{i=0}^{k} f(x_i, x_{i+1})$$

$(a=x_0 \leqslant x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_k \leqslant x_{k+1}=b)$ сформулировано достаточное условие выпуклости последовательности $\{S_k\}$, а именно: выпуклость имеет место, если для любых u_1, v_1, u_2, v_2 $(a \leqslant u_1 \leqslant v_1 < u_2 < v_2 < b)$ выполняется неравенство:

$$f(u_1, v_1) + f(u_2, v_2) - f(u_1, v_2) - f(u_2, v_1) \leqslant 0$$

или /при наличии смешанной производной от $f(u,v)$ /:

$$f''_{u,v}(u,v) \leqslant 0.$$

Этому условию, в частности, удовлетворяет и функция /2/.

В настоящей статье рассматривается задача минимизации целевой функции вида

$$S(\bar{x}^k) = S(x_1, x_2, \dots, x_k) = \int_a^b G(\bar{x}^k, z)\,dF(z) + \sum_{i=1}^{k} \rho(x_i). \qquad /3/$$

где $\bar{x}^k = (x_1, x_2, \dots, x_k)$, $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_k \leqslant b$,

$G(\bar{x}^k, z)$ – миноранта семейства функций $\{g(x_i, z),\ i = 1, 2, \dots, k\}$;

$g(x, z)$ – кусочно-непрерывная однозначная функция от x и z,

$\rho(x)$ – произвольная положительная функция,

$F(x)$ – неубывающая функция.

Для целевой функции /3/ отыскиваются условия, при которых возможно решение задачи на минимум методом динамического программирования, а именно условия связности функции $g(x,z)$. Устанавливаются некоторые свойства оптимальных решений, позволяющие существенно повысить эффективность алгоритма, минимизирующего функцию /3/. Показывается, в частности, что если функция $g(x,z)$ удовлетворяет свойству связности и $\rho(x) \equiv const$, то последовательность минимумов $\{S_k\}$ выпукла. Выпуклость $\{S_k\}$ показывается также для случая произвольной функции $\rho(x) \geqslant 0$ при выполнении дополнительного условия на функцию $g(x,z)$, а именно: каждому параметру x_i найдется непустая область применения. При этом имеет место эффект чередования размещаемых на отрезке оптимальных точек, при которых достигается минимум функций $S(\bar{x}^k)$ и $S(\bar{x}^{k+1})$. Устанавливаются также некоторые другие свойства оптимальных решений.

I. Постановка задачи и связь с методом динамического программирования

Рассматривается следующая общая задача:

$$\hat{S}(a,b,K) = \min_{k=1,2,\dots,K} S_k(a,b), \qquad /4/$$

где

$$S_k(a,b) = \min_{a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \dots \leqslant x_k \leqslant b} \left[\int_a^b G(\bar{x}^k, z)\,dF(z) + \sum_{i=1}^{k} \rho(x_i) \right]. \qquad /5/$$

Минимальное число параметров $N (N < K)$, при котором достигается оптимум задачи /4/, назовем оптимальным.

Набор $\bar{x}_k$, для которого имеет место решение задачи /5/, назовем k-оптимальным.

Для параметров $x_i \in \bar{x}^k$ определим множества $\{B_{x_i}(\bar{x}^k), i = 1, 2, \dots, K\}$ на отрезке $[a,b]$:

$$B_{x_i}(\bar{x}^k) = \{z : g(x_i, z) < G(\bar{x}^k \setminus x_i, z)\}.$$

Произведем разбиение отрезка $[a,b]$ на k взаимно не пересекающихся подмножеств

$$Z_{x_i}(\bar{x}^k) \supseteq B_{x_i}(\bar{x}^k), \quad i=1,2,\ldots,k,$$

таким образом чтобы для $z \in Z_{x_i}(\bar{x}^k)$ выполнялось равенство:

$$g(x_i,z) = G(\bar{x}^k, z),$$

при этом

$$\bigcup_{i=1}^{k} Z_{x_i}(\bar{x}^k) = [a,b].$$

Назовем $Z_{x_i}(\bar{x}^k)$ областью применения параметра x_i. Смысл такого определения станет понятным, если записать целевую функцию /3/ в виде:

$$S(\bar{x}^k) = \sum_{i=1}^{k} \Big[\rho(x_i) + \int\limits_{Z_{x_i}(\bar{x}^k)} g(x_i,z)\,dF(z)\Big]. \qquad /6/$$

Разбиение $[a, b]$ на совокупность областей применения параметров $x_i \in \bar{x}^k$ возможно, например, следующим рекуррентным способом:

$$Z_{x_1}(\bar{x}^k) = \{z : g(x_1,z) = G(\bar{x}^k,z),\ z \in [a,b]\},$$

$$\cdots$$

$$Z_{x_i}(\bar{x}^k) = \{z : g(x_i,z) = G(\bar{x}^k,z),\ z \in [a,b] \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} Z_{x_j}(\bar{x}^k)\},$$

$$\cdots$$

$$Z_{x_k}(\bar{x}^k) = [a,b] \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} Z_{x_i}(\bar{x}^k),$$

Непосредственное применение метода динамического программирования для минимизации функции вида /3/ или /6/ не представляется возможным, так как в общем случае области применения параметров $Z_{x_i}(\bar{x}^k)$ в оптимальном решении не являются связными и нельзя воспользоваться принципом оптимальности Беллмана. Поэтому представляет интерес изучение условий, при которых связность областей $\{Z_{x_i}(\bar{x}^k)\}$ может иметь место.

2. Условия связности областей применения для случая двух параметров

Область применения параметра x связна, если ее нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся множеств, каждое из которых не содержит предельных точек другого. Связность областей применения $Z_{x_1}(\bar{x}^2)$ и $Z_{x_2}(\bar{x}^2)$ для двух параметров $(x_1, x_2) = \bar{x}^2$ /если обе области непусты/ означает, что существует единственная точка z^*, которая является граничной одновременно для обеих областей применения. Пусть, например, $Z_{x_1}(\bar{x}^2) = [a, z^*]$. Тогда в случае связности обеих областей применения $Z_{x_2}(\bar{x}^2) = (z^*, b]$, причем

$$\left.\begin{aligned} g(x_1,z) &< g(x_2,z) \text{ при } z < z^*, \\ g(x_1,z) &> g(x_2,z) \text{ при } z > z^*. \end{aligned}\right\}$$

Определим для параметров x_1 и x_2 $(a < x_1 < x_2 < b)$ следующие разностные функции от z:

$$\Delta(x_1, x_2; z) = g(x_2, z) - g(x_1, z), \qquad /7/$$

$$\Delta f(x_1, x_2; z) = f(g(x_2, z)) - f(g(x_1, z)). \qquad /8/$$

где f - некоторая непрерывная возрастающая функция своего аргумента.

Справедливы следующие очевидные леммы:

Л е м м а I. Для существования разбиения отрезка $[a,b]$ на связные области применения двух параметров x_1 и x_2 необходимо и достаточно, чтобы функция $g(x,z)$ была такова; что при ее изменении разность $\Delta(x_1,x_2;z)$ меняла знак не более чем один раз.

Л е м м а 2. Количества перемен знака разностных функций /7/ и /8/ совпадают.

Далее мы будем говорить, что функция $g(x,z)$ удовлетворяет свойству связности, если для произвольных параметров x_1, x_2 разность /7/ меняет знак при изменении z не более одного раза.

Из лемм I и 2 следует

Т е о р е м а I. Для того, чтобы функция $g(x,z)$ удовлетворяла свойству связности, необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая возрастающая функция f, для которой разность $\Delta f(x_1,x_2;z)$ при изменении z меняла знак не более одного раза.

Т е о р е м а 2. Для того, чтобы функция $g(x,z)$ удовлетворяла свойству связности, достаточно существование возрастающей функции f такой, что при произвольных x_1, x_2 $(x_1 \leqslant x_2)$ и z_1, z_2 $(z_1 \leqslant z_2)$ неположительно /либо неотрицательно/ выражение

$$f(g(x_1,z_1)) + f(g(x_2,z_2)) - f(g(x_1,z_2)) - f(g(x_2,z_1)). \qquad /9/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выражение /9/ есть разность значений функции $\Delta f(x_1,x_2;z)$ в точках z_2 и z_1. Если при всех x_1, x_2, z_1, z_2 выражение /9/ неположительно /либо неотрицательно/, то разностная функция $\Delta f(x_1,x_2;z)$ монотонна по z и, следовательно, при изменении z меняет знак не более одного раза, а в этом случае, согласно теореме I, функция $g(x,z)$ удовлетворяет свойству связности. Теорема доказана.

Заметим, что если существует смешанная производная по x и по z от функции $f(g(x,z))$, то требование, например, неположительности /9/ эквивалентно следующему условию:

$$f''_{xz}(g(x,z)) \leqslant 0.$$

Т е о р е м а 3. Пусть для функции $g(x,z)$ выполняются условия:

1° $g(x,z)$ не возрастает по z при $z \leqslant x$;

2° $g(x,z)$ не убывает по z при $z \geqslant x$;

3° $g(x,z)$ не убывает по x при $x \geqslant z$.

Тогда для того, чтобы $g(x,z)$ удовлетворяла свойству связности, достаточно существование такой возрастающей функции f, что при произвольных x_1, x_2 и z $(x_1 \leqslant x_2 < z)$ разность $\Delta f(x_1,x_2;z)$ не возрастает по z.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу условия 3°

$g(x_2,z)-g(x_1,z)\geq 0$ /при $z\leq x_1\leq x_2$ /, следовательно, при всех $z\leq x_1$ разность /7/ знака не меняет.

Пусть существует возрастающая по своему аргументу функция f такая, что при $x_1\leq x_2\leq z$ разность /8/ не возрастает по z. Покажем, что эта разность не возрастает по z также на отрезке $[x_1, x_2]$. Действительно,

$$\Delta f(x_1, x_2; z) = f(g(x_2,z)) + [-f(g(x_1,z))].$$

Здесь первое слагаемое не возрастает по z, так как в силу свойства 1^0 не возрастает по z при $z\leq x_2$ функция $g(x_2,z)$. Второе слагаемое, заключенное в квадратные скобки, не возрастает по z, так как в силу 2^0 при $z\geq x_1$ не убывает по z функция $g(x_1,z)$. Отсюда следует, что разность /8/ не возрастает по z на отрезке $[x_1, x_2]$ и, следовательно, при всех $z\geq x_1$.

Таким образом, функция $g(x,z)$ меняет знак не более одного раза и удовлетворяет свойству связности. Теорема доказана.

Если существует $f''_{xz}(g(x,z))$, то теорема 3 может быть сформулирована следующим образом:

Т е о р е м а 3'. Если для $g(x,z)$ выполнены условия 1^0- 3^0 и при всех $z\geq x$

$$f''_{xz}(g(x,z))\leq 0,$$

то функция $g(x,z)$ удовлетворяет свойству связности.

Заметим, что условия 1^0- 2^0 означают унимодальность по z взятой с обратным знаком функции $g(x,z)$, причем минимум $g(x,z)$ достигается в точке $z = x$.

Приведем некоторые примеры функций $g(x,z)$, удовлетворяющих свойству связности:

1/
$$g(x,z)=\begin{cases} c(x) & \text{при } z\leq x, \\ C_\infty & \text{при } z > x, \end{cases} \qquad /10/$$

где $c(x)$ - неубывающая функция, C_∞ - достаточно большая положительная константа.

Функция /10/ соответствует случаю, рассмотренному в работе [1]. Разностная функция /7/ здесь может менять знак только один раз при $c(x_1) < c(x_2)$ в точке $z = x_1$. Следовательно, функция /10/ удовлетворяет свойству связности.

2/
$$g(x,z)=\begin{cases} C_\infty & \text{при } z < y(x), \\ c(x), & y(x)\leq z\leq x, \\ C_\infty, & z > x, \end{cases} \qquad /11/$$

где $y(x)$ - неубывающая функция, а $c(x)$ и C_∞ -те же, что и для /10/.

Функция /11/ также удовлетворяет свойству связности, так как разность значений функции /11/ $\Delta(x_1,x_2;z)$ меняет знак только в случае $y(x_2)< x_1 < x_2$ при $z = x_1$.

3/ Пусть

$$g(x,z)=\begin{cases} c(x) & \text{при } z\leqslant x, \\ c(x)+p(x,z) & \text{при } z>x, \end{cases} \qquad /12/$$

где $p(x,z)$ - функция штрафа, выплачиваемого, если z превышает значение параметра x.

Положив $f(y)=y$, по теореме 2 получим условие связности функции /12/:

$$p(x_2,z_2)+p(x_1,z_1)-p(x_1,z_2)-p(x_2,z_1)\leqslant 0, \qquad /13/$$

где $x_1\leqslant x_2\leqslant z_2$, $x_1\leqslant z_1\leqslant z_2$, или, если существует смешанная производная от $p(x,z)$ по x и z:

$$p''_{xz}(x,z)\leqslant 0 \quad (z>x). \qquad /14/$$

4/ Рассмотрим функцию вида

$$g(x,z)=\begin{cases} c(x), & z\leqslant x, \\ c(x)e^{p(x,z)}, & z>x, \end{cases} \qquad /15/$$

где $p(x,z)$ - штрафная функция.

Положив $f(y)=\ln y$:

$$f(g(x,z))=\ln c(x)+p(x,z)$$

и следуя теореме 2, получим условия связности функции /15/, совпадающие с /13/ - /14/. Этим условиям, в частности, удовлетворяет штрафная функция вида:

$$p(x,z)=\varphi\left(\frac{z-x}{\sigma(x)}\right), \qquad /16/$$

где $\varphi'_t(t)$, $\varphi''_t(t)$ и $\sigma'_x(x)$ - неотрицательны.

Примеры функций φ для /16/:

$$\varphi(t)=t^r \quad \text{при } r\geqslant 1,$$

или

$$\varphi(t)=\exp(t^r) \quad \text{при } r\geqslant 0.$$

3. Связность областей применения параметров в оптимальных решениях

Лемма 3. Для оптимального N

1/ все параметры $x_i\in\bar{x}^N$ отличны друг от друга,

2/ множества $B_{x_i}(\bar{x}^N)$ непусты для всех $x_i\in\bar{x}^N$.

Доказательство. 1/ Допустив противное, мы найдем одинаковые параметры x_i и x_{i+1}. Тогда $G(\bar{x}^N,z)\equiv G(\bar{x}^N\setminus x_{i+1},z)$.

Для N - оптимального набора $\bar{x}^N$ имеем:

$$\hat{S}(a,b,K)=S_N(a,b)=\sum_{i=1}^{N}\rho(x_i)+\int_a^b G(\bar{x}^N,z)\,dF(z).$$

С другой стороны, ввиду того, что $\rho(x)\geqslant 0$

$$S_N(a,b)\geqslant S_N(a,b)-\rho(x_{i+1})\geqslant \min_{a\leqslant x_1\leqslant\ldots\leqslant x_{N-1}\leqslant b}\left[\sum_{i=1}^{N-1}\rho(x_i)+\int_a^b G(\bar{x}^{N-1},z)\,dF(z)\right]=S_{N-1}(a,b).$$

Мы получили, что $\tilde{S}(a,b,K) = S_N(a,b) \geq S_{N-1}(a,b)$. Это противоречит тому, что оптимальное количество параметров N минимально. Следовательно, в N - оптимальном решении все параметры отличны друг от друга

2/ Аналогично предыдущему доказательству при допущении, что найдется параметр $x_i \in \bar{x}^N$, для которого $B_{x_i}(\bar{x}^k) = \emptyset$, мы получим противоречие: при меньшем количестве параметров найдется значение оптимизируемой функции, не превышающее оптимум $\tilde{S}(a,b,K)$. Лемма доказана полностью.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\mu_{x_i}(\bar{x}^k) = \inf B_{x_i}(\bar{x}^k),$$
$$\nu_{x_i}(\bar{x}^k) = \sup B_{x_i}(\bar{x}^k).$$

Т е о р е м а 4. Если функция $g(x,z)$ удовлетворяет свойству связности, то для N - оптимального решения существует совокупность связных областей применения параметров $x_i \in \bar{x}^N$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно лемме 3, все $B_{x_i}(\bar{x}^N)$ непусты. Упорядочим x_i согласно возрастанию величины $\mu_{x_i}(\bar{x}^N)$.

Тогда из очевидных неравенств:

$$\left.\begin{aligned} &\mu_{x_i}(\bar{x}^k) < \nu_{x_i}(\bar{x}^k), \\ &\mu_{x_i}(x_{i-1},x_i) < \mu_{x_i}(\bar{x}^k), \\ &\nu_{x_i}(\bar{x}^k) < \nu_{x_i}(x_i,x_{i+1}), \\ &\nu_{x_i}(x_i,x_{i+1}) \leq \mu_{x_{i+1}}(x_i,x_{i+1}) \end{aligned}\right\} \quad (i=1,2,\dots,k) \qquad /17/$$

и свойства связности функции $g(x,z)$ следует, что интервалы

$$(\mu_{x_i}(x_{i-1},x_i),\ \nu_{x_i}(x_i,x_{i+1})) \qquad /18/$$

попарно не пересекаются. Следовательно, имеет место следующее упорядочение интервалов /18/:

$$\left.\begin{aligned} &a \leq \nu_{x_1}(x_1,x_2) < \mu_{x_2}(x_1,x_2) \leq \nu_{x_2}(x_2,x_3) \leq \dots \\ &\dots \nu_{x_{i-1}}(x_{i-1},x_i) \leq \mu_{x_i}(x_{i-1},x_i) \leq \nu_{x_i}(x_i,x_{i+1}) \leq \\ &\leq \mu_{x_{i+1}}(x_i,x_{i+1}) \leq \dots \leq \nu_{x_{N-1}}(x_{N-1},x_N) \leq \mu_{x_N}(x_{N-1},x_N) \leq b \end{aligned}\right\} \qquad /19/$$

Теперь нетрудно убедиться, что последовательность граничных точек $z_1, z_2, \dots, z_{N-1}$, где $\nu_{x_i}(x_i,x_{i+1}) \leq z_i \leq \mu_{x_{i+1}}(x_i,x_{i+1})$, дает нам разбиение отрезка $[a,b]$ на совокупность связных областей применения оптимальных параметров $\{Z_{x_i}(\bar{x}^N),\ i=1,2,\dots,N\}$. При этом интервал $(z_{i-1},z_i) \subseteq Z_{x_i}(\bar{x}^N),\ (z_0=a, z_N=b)$, и для всех $z \in Z_{x_i}(\bar{x}^N)$

$$g(x_i,z) < G(\bar{x}^N \setminus x_i, z).$$

Граничную точку z_i $(i=1,2,\dots,N-1)$ в случае выполнения условий

$$F(z_i+) > F(z_i-),$$
$$g(x_i,z_i-) > g(x_{i+1},z_{i+1})$$

относим к области применения параметра x_{i+1}, в остальных случаях - к области $Z_{x_i}(\bar{x}^N)$.

Пусть, далее,

$$\rho(x^0) = \min_{x\in[a,b]} \rho(x),$$
$$H(\bar{x}^k) = \{x_i : \rho(x_i) > \rho(x^0),\ x_i \in \bar{x}^k\}.$$

Л е м м а 4. В k - оптимальном решении
1/ Все параметры $x_i \in H(\bar{x}^k)$ отличны друг от друга;
2/ множества $B_{x_i}(\bar{x}^k)$, где $x_i \in H(\bar{x}^k)$, непусты.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично доказательству леммы 3: если либо 1/, либо 2/ не выполняются, то один из параметров $x_i \in H(\bar{x}^k)$ можно заменить на параметр x^0, в результате чего значение $S_k(a,b)$ уменьшается на величину $\rho(x_i) - \rho(x^0) > 0$.

Отсюда следует возможность построения совокупности связных областей применения в k - оптимальном решении:

Т е о р е м а 4$'$. Если функция $\rho(x,z)$ удовлетворяет свойству связности, то для k - оптимального решения существует совокупность связных областей применения оптимальных параметров $x_i \in \bar{x}^k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала по способу, изложенному при доказательстве теоремы 4, строится совокупность связных областей применения для отличных друг от друга параметров. Затем область $Z_{x_i}(\bar{x}^k)$, если существует в $\bar{x}^k$ параметры, совпадающие с x_i, разбивается произвольно на соответствующее количество связных же подобластей.

4. О некоторых свойствах оптимального решения и выпуклости последовательности $\{S_k(a,b)\}, (k=1,2,3,\dots)$.

Пусть $\bar{x}^k$ и $\bar{y}^{(k+m)}(m=0,1,2,\dots)$ - упорядоченные наборы оптимальных параметров соответственно для $S_k(a,b)$ и $S_{k+m}(a,b)$ $(a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_k \leq b,\ a \leq y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_{k+m} \leq b)$,

$\bar{W}^{(2k+m)}$ - объединение наборов $\bar{x}^k$ и $\bar{y}^{(k+m)}$:

$$a \leq w_1 \leq w_2 \leq \quad \leq w_{2k+m-1} \leq w_{2k+m} \leq b.$$

Выделим из $\bar{W}^{(2k+m)}$ два непересекающихся упорядоченных набора $\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)}, \bar{W}_\beta^{(k+l''m)}$, где $l'_m =]\frac{m}{2}[,\ l''_m = [\frac{m}{2}]$ *).

Л е м м а 5. Если объединение оптимальных наборов $\bar{x}^k$ и $\bar{y}^{(k+m)}$ можно разбить на два непересекающихся упорядоченных набора $\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)}$ и $\bar{W}_\beta^{(k+l''m)}$ таких, что для всех $z \in [a,b]$ имеет место соотношение

$$\max(G(\bar{x}^k,z), G(\bar{y}^{(k+m)},z)) \geq \max(G(\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)},z), G(\bar{W}_\beta^{(k+l''m)},z)), \qquad /20/$$

то справедливо следующее неравенство:

$$S_k(a,b) + S_{k+m}(a,b) \geq S_{k+l'm}(a,b) + S_{k+l''m}(a,b) \qquad /21/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Образуем следующие выражения:

$$S(\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)}) = \int_a^b G(\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)},z)\,dF(z) + \sum_{w_t \in \bar{W}_\alpha^{(k+l'm)}} \rho(w_t),$$

$$S(\bar{W}_\beta^{(k+l''m)}) = \int_a^b G(\bar{W}_\beta^{(k+l''m)},z)\,dF(z) + \sum_{w_t \in \bar{W}_\beta^{(k+l''m)}} \rho(w_t).$$

Выпишем сумму

*) $]\rho[$ - ближайшее целое, не меньшее ρ, $[\rho]$ -целая часть ρ.

$$S(\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)}) + S(\bar{W}_\beta^{(k+l''m)}) = \sum_{W_t \in (\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)} \vee \bar{W}_\beta^{(k+l''m)})} \rho(W_t) +$$
$$+ \int_a^b [G(\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)}, z) + G(\bar{W}_\beta^{(k+l''m)}, z)] dF(z) = \sum_{W_t \in \bar{W}^{(2k+m)}} \rho(W_t) +$$
$$+ \int_a^b \{ \min [G(\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)}, z), G(\bar{W}_\beta^{(k+l''m)}, z)] + \max [G(\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)}, z), G(\bar{W}_\beta^{(k+l''m)}, z)] \} dF(z) =$$
$$= \sum_{t=1}^{2k+m} \rho(W_t) + \int_a^b \{ G(\bar{W}^{(2k+m)}, z) + \max [G(\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)}, z), G(\bar{W}_\beta^{(k+l''m)}, z)] \} dF(z). \qquad /22/$$

Аналогично выписываем сумму для оптимумов

$$S_k(a,b) + S_{k+m}(a,b) = \sum_{t=1}^{2k+m} \rho(W_t) + \int_a^b \{ G(\bar{W}^{(2k+m)}, z) + \max [G(\bar{x}^k, z), G(\bar{y}^{k+m}, z)] \} dF(z) \qquad /23/$$

Используя условие /20/ и сравнивая /22/ и /23/, получим:

$$S_k(a,b) + S_{k+m}(a,b) \geqslant S(\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)}) + S(\bar{W}_\beta^{(k+l''m)}) \qquad /24/$$

Из последнего неравенства и очевидных соотношений

$$S(\bar{W}^{(k+l)}) \geqslant S_{k+l}(a,b)$$

следует, что неравенство /21/ справедливо. Лемма 5 доказана.

Далее мы будем рассматривать только наборы $\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)}$, $\bar{W}_\beta^{(k+l''m)}$, состоящие из компонент упорядоченного объединения $\bar{W}^{(2k+m)}$ соответственно с нечетными и четными номерами.

Л е м м а 6. Если для оптимальных наборов $\bar{x}^k$ и $\bar{y}^{(k+m)}$ и производных от них наборов $\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)}$, $\bar{W}_\beta^{(k+l''m)}$ неравенство /20/ не выполняется, то найдутся параметры $(\underline{u}, W_{t*}, \bar{u}) \subseteq \bar{W}^{(2k+m)}$ и точка $z^0 \in [a,b]$, удовлетворяющие соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} g(\bar{u}, z^0) &< g(W_{t*}, z^0), \\ g(\underline{u}, z^0) &< g(W_{t*}, z^0), \end{aligned} \right\} \qquad /25/$$

причем:

а/ точка z^0 принадлежит областям применения параметров $\underline{u}$ и $\bar{u}$, относящимся к разным исходным оптимальным наборам;

в/ параметры $\underline{u}$ и $\bar{u}$, отличны друг от друга и от остальных параметров $W_t \in W^{(2k+m)}$;

с/ значение параметра W_{t*} находится строго между значениями параметров $\underline{u}$ и $\bar{u}$:

$$\underline{u} < W_{t*} < \bar{u}. \qquad /26/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку неравенство /20/ не выполняется, то найдется точка z^0 такая, что

$$\max[G(\bar{x}^k, z^0), G(\bar{y}^{(k+m)}, z^0)] < \max[G(\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)}, z^0), G(\bar{W}_\beta^{(k+l''m)}, z^0)] \qquad /27/$$

Пусть правая часть /27/ достигает максимума для миноранты, определяемой набором $\bar{W}^*$, где $\bar{W}^*$ - либо $\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)}$, либо $\bar{W}_\beta^{(k+l''m)}$, т.е.:

$$\max[G(\bar{x}^k, z^0), G(\bar{y}^{(k+m)}, z^0)] < G(\bar{W}^*, z^0) = \min_{W_t \in \bar{W}^*} \{ g(W_t, z^0) \}. \qquad /28/$$

Пусть, далее, W_{t_x} - значение того параметра из k -оптимального набора $\bar{x}^k$, в область применения $Z_{W_{t_x}}(\bar{x}^k)$ которого входит точка z^0.

Аналогично, $W_{t_y} \in \bar{y}^{(k+m)}$, $z^0 \in Z_{W_{t_y}}(\bar{y}^{(k+m)})$. При этом, очевидно:

$$g(W_{t_x}, z^0) = G(\bar{x}^k, z^0),$$
$$g(W_{t_y}, z^0) = G(\bar{y}^{(k+m)}, z^0).$$

Тогда из /27/ - /28/ следуют неравенства

$$\left.\begin{matrix} g(W_{t_x}, z^0) < g(W_t, z^0) \\ g(W_{t_y}, z^0) < g(W_t, z^0) \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{для всех} \\ W_t \in \bar{W}^*. \end{matrix} \qquad /29/$$

Обозначим

$$\bar{u} = max(W_{t_x}, W_{t_y}),$$
$$\underline{u} = min(W_{t_x}, W_{t_y}).$$

Неравенства /29/ справедливы, очевидно, только тогда, когда параметры W_{t_x}, W_{t_y} и, следовательно, параметры $\underline{u}$, $\bar{u}$ не принадлежат набору $\bar{W}^*$. Отсюда же следует справедливость утверждения с/ настоящей леммы. Допустив противное, мы получим, что существует совпадающий по величине, например с $\bar{u}$, параметр, относящийся в силу конструкции производных наборов к набору $\bar{W}^*$, в то время как $\bar{u} \notin \bar{W}^*$. Но тогда, ввиду однозначности функции $g(x, z)$, одно из строгих неравенств в /29/ обратится в равенство, что противоречит исходным предположениям относительно точки z^0.

Далее, так как параметры $\underline{u}$, $\bar{u}$ одновременно принадлежат либо к нечетному, либо к четному наборам $\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)}$, $\bar{W}_\beta^{(k+l''m)}$, то между ними должен находиться параметр $W_{t^*} \in \bar{W}^*$, причем в силу доказанного утверждения в/ этот параметр находится строго внутри интервала /$\underline{u}$, $\bar{u}$/.

Из /29/ для тройки $(\underline{u}, W_{t^*}, \bar{u})$ следует справедливость соотношений /25/. Все утверждения леммы доказаны.

Л е м м а 7. Если функция $g(x, z)$ удовлетворяет свойству связности и для $x_1 \leq x_2$

$$\mu_{x_1}(x_1, x_2) \leq \mu_{x_2}(x_1, x_2),$$

и если в некоторой точке z^0 выполнены условия:

$$\begin{matrix} g(\bar{u}, z^0) < g(W, z^0) \\ g(\underline{u}, z^0) < g(W, z^0) \end{matrix} \qquad (\underline{u} < W < \bar{u})$$

то множество $B_W(\bar{W}^3) = \phi$, где $\bar{W}^3 = (\underline{u}, W, \bar{u})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множество $B_W(W^3) = \phi$, так как выполняются неравенства:

$$g(\underline{u}, z) \leq g(W, z) \quad \text{при всех } z < z^0, \qquad /30/$$
$$g(\bar{u}, z) \leq g(W, z) \quad \text{при всех } z > z^0. \qquad /30/$$

Докажем первое неравенство. При $B_{x^2}(x_1, x_2) = \phi$ справедливы очевидные неравенства:

$$a \leq \mu_{x_1}(x_1, x_2) \leq \nu_{x_1}(x_1, x_2) \leq \mu_{x_2}(x_1, x_2) \leq \nu_{x_2}(x_1, x_2) \leq b, \qquad /31/$$
$$g(x_1, z) < g(x_2, z) \quad \text{при всех } z < \mu_{x_2}(x_1, x_2), \qquad /32/$$
$$g(x_2, z) \leq g(x_1, z) \quad \text{при всех } z > \nu_{x_1}(x_1, x_2). \qquad /33/$$

Из /31/ следует, что для $\underline{u} < W$

$$g(\underline{u}, z) \leq g(W, z) \quad \text{при всех } z < \mu_W(\underline{u}, W). \qquad /34/$$

Так как $z^0 \in B_y(\underline{u}, W)$, то
$$z^0 \leqslant \nu_{\underline{u}}(\underline{u}, W) < \mu_W(\underline{u}, W). \qquad /35/$$
Из /34/-/35/ тем более следует справедливость неравенства /30/ .

Аналогично показывается справедливость неравенства /30/ .

Т е о р е м а 5. Если функция $q(x,z)$ удовлетворяет свойству связности, $\mu_{x_1}(x_1, x_2) < \mu_{x_2}(x_1, x_2)$ при $x_1 < x_2$, $p(x) \equiv const$, то последовательность минимумов $\{S_k(a,b)\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ выпукла.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\bar{W}_\alpha^{(k+1)}$ и $\bar{W}_\beta^{(k+1)}$ - наборы соответственно из нечетных и четных компонентов упорядоченного объединения оптимальных наборов $\bar{X}^k$ и $\bar{y}^{(k+2)}$. Покажем, что с помощью описанной ниже процедуры мы из исходных произвольных оптимальных наборов $\bar{x}^k$ и $\bar{y}^{(k+2)}$ за конечное число шагов получим такие оптимальные наборы, что неравенство /20/ будет выполнено для всех точек $z \in [a, b]$.

Обозначим через $\bar{W}_\gamma$ - множество отличных друг от друга параметров $W_t \in \bar{W}^{(2k+2)}$. Очевидно, множество $\bar{W}_\gamma \subseteq \bar{W}^{(2k+2)}$ содержит не более $2k+2$ параметров.

Пусть, далее, на первом шаге неравенство /20/ для указанных исходных наборов выполняется не на всем отрезке $[a, b]$. Тогда, согласно лемме 6, найдутся отличные друг от друга параметры $(W_{t_x}, W_{t^*}, W_{t_y}) \subseteq W_\gamma \subseteq \bar{W}^{(2k+2)}$ и точка z^0 , $z^0 \in Z_{W_{t_x}}(\bar{x}^k), z^0 \in Z_{W_{t_y}}(\bar{y}^{(k+2)})$, для которых справедливы неравенства /25/-/26/. Отсюда следует, что область применения параметра W_{t^*} относительно исходного набора параметров /$\bar{X}^k$ или $\bar{y}^{(k+2)}$/ находится целиком либо левее точки z^0 , либо правее. Из леммы 7 следует, что в первом случае замена параметра W_{t^*} на параметр $\underline{u} = min(W_{t_x}, W_{t_y})$, во втором - на параметр $\bar{u} = max(W_{t_x}, W_{t_y})$ не увеличивает значения суммы /23/ при $m=2$. Значит, наборы $\bar{X}^k$ и $\bar{y}^{(k+2)}$ с замененным параметром W_{t^*} также оптимальны. Аналогично поступаем с параметрами, совпадающими с W_{t^*} . При этой операции мощность множества отличных друг от друга параметров $|\bar{W}_\gamma|$ уменьшается по крайней мере на единицу.

Если теперь нет более точек, в которых не выполняется /20/, то по лемме 5 следует выпуклость последовательности $\{S_k(a, b)\}$, так как при $m=2$
$$S_k(a,b) + S_{k+2}(a,b) \geqslant 2S_{k+1}(a,b).$$

В противном случае делается новый шаг согласно описанной процедуре. При этом на каждом шаге параметры W_{t_x}, W_{t_y} выбираются из множества $\bar{W}_\gamma$. Поэтому через конечное число шагов, не превышающее $2k+2$, мы получим оптимальные наборы $\bar{X}^k$, $\bar{y}^{(k+2)}$, для которых неравенство /20/ выполнено во всех точках отрезка $[a,b]$. Следовательно, по лемме 5, последовательность $\{S_k(a, b)\}$ выпукла.

Т е о р е м а 6. Если выполнены следующие условия:

а/ функция $q(x, z)$ удовлетворяет свойству связности;

в/ $\mu_{x_1}(\bar{x}^2) < \mu_{x_2}(\bar{x}^2)$, где $\bar{x}^2 = (x_1, x_2), x_1 < x_2$;

c/ для отличных друг от друга параметров $x_i \in \bar{x}^3 = (x_1, x_2, x_3)$ найдутся непустые области $B_{x_i}(\bar{x}^3)$, то для произвольной положительной функции $\rho(x)$

I/ последовательность минимумов $\{S_k(a,b)\}$ выпукла,

2/ для k - оптимального набора $\bar{x}^k$ существует такой $(k+1)$ - оптимальный набор $\bar{x}^{(k+1)}$, что параметры $x_i^{k+1} \in \bar{x}^{k+1}$ чередуются с параметрами $x_i^k \in \bar{x}^k$:

$$x_{i-1}^k \leqslant x_i^{k+1} \leqslant x_i^k \quad (i = 1,2,\ldots,k+1\ ;\ x_0^k = a\ ;\ x_{k+1}^k = b);$$

3/ для граничных точек z_i^k связных областей применения $Z_{x_i^k}(\bar{x}^k)$ k - оптимального решения найдутся чередующиеся с ними граничные точки z_i^{k+1} связных областей применения $Z_{x_i^{k+1}}(\bar{x}^{k+1})$ $k+1$ - оптимального решения:

$$z_{i-1}^k \leqslant z_i^{k+1} \leqslant z_i^k \quad (i = 1,2,\ldots,k+1;\ z_0^k = z_0^{k+1} = a;\ z_{k+1}^k = z_{k+1}^{k+1} = b)$$

Доказательство. Из оптимальных наборов $\bar{x}^k$ и $\bar{x}^{(k+m)}$ образуем наборы $\bar{W}_\alpha^{(k+l'm)}$ и $\bar{W}_\beta^{(k+l''m)}$, состоящие из компонентов упорядоченного объединения $\bar{W}^{(2k+m)}$ соответственно с нечетными и четными номерами. Тогда для всех $z \in [a,b]$ справедливо неравенство /20/.

Допустив обратное, мы согласно лемме 6 найдем точку $z^0 \in [a,b]$ и параметры $(\underline{u}, w, \bar{u}) \subseteq \bar{W}^{(2k+m)}$, $\underline{u} < w < \bar{u}$, такие, что выполняются неравенства:

$$\left.\begin{aligned} g(\bar{u}, z^0) &< g(w, z^0), \\ g(\underline{u}, z^0) &< g(w, z^0). \end{aligned}\right\}$$

Тогда из леммы 7 следует, что множество $B_w(\underline{u}, w, \bar{u})$ пусто. Это противоречит условию c/ настоящей теоремы, и, следовательно, неравенство /20/ справедливо. Но тогда по лемме 5 справедливо неравенство /21/, откуда при $m = 2$ мы получим соотношение

$$S_k(a,b) + S_{k+2}(a,b) \geqslant 2S_{k+1}(a,b).$$

т.е. последовательность $\{S_k(a,b)\}$ выпукла. Утверждение I/ теоремы доказано.

При $m = 1$ из /21/ мы получим соотношение

$$S_k(a,b) + S_{k+1}(a,b) \geqslant S(\bar{W}_\alpha^{(k+1)}) + S(\bar{W}_\beta^k) \geqslant S_{k+1}(a,b) + S_k(a,b)$$

откуда следует, что компоненты с нечетными номерами упорядоченного объединения k - оптимального $\bar{x}^k$ и $(k+1)$ - оптимального $\bar{y}^{(k+1)}$ наборов образуют также $(k+1)$ - оптимальный набор $\bar{W}_\alpha^{(k+1)}$.

Определим для известного k - оптимального набора $\bar{x}^k$ и произвольного $(k+1)$ - оптимального набора $\bar{y}^{(k+1)}$ такое максимально возможное число $n = n(\bar{y}^{k+1})$, что

$$a \leqslant y_1 \leqslant x_1^k \leqslant \ldots \leqslant y_n \leqslant x_n^k \leqslant y_{n+1}\ ; \quad y_i \in \bar{y}^{k+1},$$

а также такое минимально возможное число $l = l(\bar{y}^{k+1})$, что

$$y_{n+1} \leqslant y_{n+2} \leqslant \ldots \leqslant y_{n+l} \leqslant x_{n+1}^k.$$

Среди всех $(k+1)$ - оптимальных наборов $\bar{y}^{k+1}$ с

$$n^0 = \max_{(\bar{y}^{k+1}\text{- оптим})} n(\bar{y}^{k+1})$$

выберем наборы с

$$l^0 = \min l(\bar{y}^{k+1}),$$
$$\{\bar{y}^{k+1} : n(\bar{y}^{k+1}) = n^0, \bar{y}^{k+1}\text{- оптим}\}.$$

При этом всегда найдется $(k+1)$ - оптимальный набор $\bar{x}^{k+1}$ с $n^0 = k$. Допустим противное, т.е. $n^0 < k$. Очевидно, в этом случае $l^0 \neq 1$. Тогда, если $l^0 = 0$, либо 2, мы получим для набора $\bar{w}_\alpha^{(k+1)}$ значение числа $n(\bar{w}_\alpha^{(k+1)})$, превышающее n^0, что противоречит максимальности числа n^0. При $l_0 > 2$ мы получим значение числа $n(\bar{w}_\alpha^{(k+1)}) = n^0$, но при этом

$$l(\bar{w}_\alpha^{(k+1)}) = \left[\frac{l^0 + 1}{2}\right] < l^0,$$

что противоречит минимальности числа l^0. Отсюда следует, что всегда найдется $(k+1)$ - оптимальный набор $\bar{x}^{k+1}$, параметры которого чередуются с параметрами $x_i \in \bar{x}^k$ согласно утверждению 2/ настоящей теоремы.

Пусть, далее, $\bar{x}^k$ и $\bar{y}^{k+1}$ - соответственно k - и $(k+1)$ - оптимальные наборы параметров. Для доказательства утверждения 3/ настоящей теоремы достаточно показать, что для чередующихся x_i и y_i найдутся такие граничные точки z_i^{k+1}, что

$$z_{i-1}^k \leqslant z_i^{k+1} \leqslant z_i^k \quad (i = 1, 2, \ldots, k+1). \qquad /36/$$

Для этого нам понадобится доказать следующие соотношения:

$$z_{i-1}^k \leqslant \mu_{x_i}(x_{i-1}, x_i) \leqslant \nu_{x_i}(x_i, x_{i+1}) \leqslant z_i^k, \qquad /38/$$

$$\nu_{y_i}(y_i, y_{i+1}) \leqslant z_i^{k+1} \leqslant \mu_{y_{i+1}}(y_i, y_{i+1}), \qquad /37/$$

$$\mu_{x_i}(x_{i-1}, x_i) \leqslant \mu_{y_{i+1}}(y_i, y_{i+1}), \qquad /39/$$

$$\nu_{y_i}(y_i, y_{i+1}) \leqslant \nu_{x_i}(x_i, x_{i+1}). \qquad /40/$$

Соотношение /37/ и крайние неравенства в соотношении /38/ следуют из того факта, что граничная точка z_j^r для набора $\bar{x}^r$ находится между областями применения параметров x_j^r и x_{j+1}^r. Неравенство $\mu_{x_i}(x_{i-1}, x_i) \leqslant \nu_{x_i}(x_i, x_{i+1})$ справедливо, так как в противном случае нашлась бы такая точка z^0, что

$$\nu_{x_i}(x_i, x_{i+1}) < z^0 < \mu_{x_i}(x_{i-1}, x_i),$$

откуда следуют неравенства

$$g(x_i, z) \geqslant g(x_{i+1}, z) \quad \text{при } z \geqslant z^0,$$
$$g(x_i, z) \geqslant g(x_{i-1}, z) \quad \text{при } z \leqslant z^0$$

и $B_{x_i}(x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) = \phi$, что противоречит условию с/.

Докажем неравенство /39/. Справедливость его следует из соотношений:

$$\mu_{x_i}(x_{i-1}, x_i) \leqslant \mu_{x_i}(y_i, x_i), \qquad /39'/$$

$$\mu_{x_i}(y_i, x_i) \leqslant \mu_{y_{i+1}}(y_i, y_{i+1}). \qquad /39''/$$

Действительно, допустим, что /39'/ не имеет место. Тогда найдется такая точка z^0, что

$$\mu_{x_i}(y_i, x_i) < z^0 < \mu_{x_i}(x_{i-1}, x_i) \qquad /41/$$

и

$$g(x_i, z^0) < g(y_i, z^0). \qquad /42/$$

Из правой части неравенства /41/ следует, что

$$g(x_{i-1}, z^0) \leqslant g(x_i, z^0). \qquad /43/$$

Из последних двух соотношений получим неравенство

$$g(x_{i-1}, z^0) < g(y_i, z^0). \qquad /44/$$

Так как $x_{i-1} \leqslant y_i \leqslant x_i$, то в силу условия в/ и неравенств /42/, /44/ из леммы 7 следует, что $B_{y_i}(x_{i-1}, y_i, x_i) = \phi$, что противоречит условию с/ настоящей теоремы. Таким образом, неравенство /39'/ доказано. Аналогично доказывается неравенство /39''/. Из /39'/ и /39''/ следует справедливость неравенства /39/.

Точно так же доказывается справедливость неравенства /40/.

Далее, из соотношений /39/-/40/ следует, что множество допустимых граничных точек, определяемое соотношением /37/:

$$[\nu_{y_i}(y_i, y_{i+1}), \mu_{y_{i+1}}(y_i, y_{i+1})],$$

пересекается с отрезком

$$[\mu_{x_i}(x_{i-1}, x_i), \nu_{x_i}(x_i, x_{i+1})] \subseteq [z_{i-1}^k, z_i^k].$$

Отсюда следует, что точка z_i^{k+1}, удовлетворяющая соотношению /36/, существует. Теорема доказана полностью.

5. Замечание об алгоритме решения задачи /4/

Вычисление $\{S_k(a,b)\}$ в случае функции $g(x,z)$, удовлетворяющий свойству связности, может быть произведено методом динамического программирования. Для этого, в отличие от /5/, рассмотрим эквивалентную задачу, фиксируя не число параметров $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а количество последовательно расположенных на $[a,b]$ интервалов (z_{i-1}, z_i), в каждом из которых применяется один параметр, зависящий только от концов указанных интервалов. Таким образом, рассматриваем задачу минимизации функции вида /6/:

$$S_k(a,b) = \min_{a = z_0 \leqslant z_1 \leqslant \ldots \leqslant z_k = b} \sum_{i=1}^{k} \min_{x \in [a,b]} \varphi(z_{i-1}, z_i, x), \qquad /5/$$

где

$$\varphi(u, v, x) = \rho(x) + \int_u^v g(x,z)\,dF(z).$$

Обозначим через $x(u,v)$ - значение параметра, минимизирующего $\varphi(u, v, x)$.

Для /5/ имеет место рекуррентное соотношение Беллмана:

$$S_i(a,z) = \min_{a \leqslant z' \leqslant z} [S_{i-1}(a,z') + \varphi(z', z, x(z', z))]. \qquad /45/$$

Поэтому на первом шаге алгоритма вычисляем для всех значений z в узлах ε - сети величины $S_1(a,z)$, $x_1'(a,z)$, $z_0'(a,z)$, $z_1'(a,z)$:

$$S_1(a,z) = \min_{x \in [a,b]} \varphi(a,z,x) = \varphi(a,z,x(a,z)),$$
$$x_1^1(a,z) = x(a,z),$$
$$z_0^1(a,z) = a,$$
$$z_1^1(a,z) = z.$$

На k -м шаге алгоритма $(k = 2,3,\dots,K)$ вычисляем по формуле /45/ для z в узлах ε - сети величины:

$$S_k(a,z) = S_{k-1}(a,\tilde{z}) + \varphi(\tilde{z}, z, x(\tilde{z},z)),$$

$z_{k-1}^k(a,z) = \tilde{z}$, где $\tilde{z}$ - значение z' , минимизирующее выражение в квадратных скобках в /45/,

$$z_k^k(a,z) = z,$$
$$x_k^k(a,z) = x(\tilde{z},z).$$

Пусть n - мощность ε -сети, C - трудоемкость одной операции.

На проведение вычислений по методу динамического программирования требуется в общем случае $\simeq Cn^2K$ операций, если в памяти хранить все K таблиц $\{S_k(a,z), z_{k-1}^k(a,z), x_k^k(a,z)\}$ для всех значений z в узлах ε -сети, либо $\simeq Cn^2KN$ операций, если хранить указанные таблицы только на предыдущем и последующем шагах.

Если имеет место свойство выпуклости последовательности $\{S_k(a,b)\}$ то вместо значения K следует взять величину $\min(K,N-1)$, так как счет $S_k(a,b)$ следует продолжить до тех пор, пока $S_k(a,b)$ превышает $S_{k+1}(a,b)$. Если, кроме того, имеет место эффект чередования точек x_i^k с x_i^{k+1} , а также z_i^k с z_i^{k+1} , то для счета $S_k(a,b)$ в памяти необходимо хранить значения $S_{k-1}(a,z)$ только для $z \in$ $\in [z_{k-2}^{k-1}(a,b), z_{k-1}^{k-1}(a,b)]$. Отсюда следует возможность организации вычислительного алгоритма с памятью порядка мощности ε - сети с выдачей оптимальных решений без пересчета заново промежуточных решений. Более подробно описание алгоритма решения рассмотренной здесь задачи будет приведено в следующей статье.

Поступила в редакцию 7.4.1969 г.

Л и т е р а т у р а

1. В.Т.Дементьев. Об одной задаче оптимального размещения точек на отрезке. - Дискретный анализ, Новосибирск, 1965, вып.4, стр.23-- 27.

2. Н.И.Глебов. О выпуклых последовательностях. Там же, стр.10-22.

3. Young, A.Henry. On the optimum location of checing station. Oper. Res.,.vII,N5, 1963, 721-731.

4. C.H.Dowker. On minimum circumscribed polygons. Bull.Amer. Soc., 50, 120-122, /1944/.

5. Л.Тот. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. Физматгиз, 1958.