Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 2.
УДК.512.25.

СТРУКТУРА МНОЖЕСТВ УПРАВЛЯЕМОСТИ И ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ МНОГОШАГОВЫХ ПОЦЕССОВ. I

В.В.Леонов

§ I. Вводные замечания. Основные обозначения и определения.

Часто возникает необходимость перевести с помощью допустимого управления управляемую систему с дискретным управлением из ее начального состояния в другое, наперед заданное, таким образом, чтобы определенный функционал, зависящий от управления, достигал своего наименьшего значения. В частности, к задачам подобного рода относится задача оптимального быстродействия, заключающаяся в отыскании управления, которое переводит систему из одного состояния в другое за минимальное число тактов управления [I].

Трудности, связанные с решением подобных задач, усугубляются в общем случае незнанием того,существует ли само решение задачи. Эти две трудности в значительной мере преодолеваются, если мы умеем строить множества управляемости [2] и достижимости [3] для любой фиксированной точки фазового пространства.

В статье излагаются методы приближенного построения множеств достижимости и управляемости, проводится качественное исследование структуры этих множеств и изучаются свойства оптимального управления, связанные с их топологией. При этом мы предполагаем, что многошаговый процесс описывается системой линейных разностных уравнений вида:

$$\bar{x}(n) = A(n)\bar{x}(n-1) + B(n)\bar{u}(n), \qquad /1.1/$$

где $A(n)$ и $B(n)$ -матричные функции соответственных размерностей $m \times n$ и $m \times s$, $\bar{x}$ - столбцовый m -мерный вектор, описывающий состояние управляемой системы, $\bar{u}$ - столбцовый s -мерный вектор, компоненты которого являются управляющими параметрами, причем для всех $n \geq 1$ $\bar{u}(n) \in U$ / U -замкнутая выпуклая область из E_s /.

В статье приняты следующие обозначения:

$F(\bar{x}^0, U)$ - множество всех начальных состояний /при $n = 0$ / системы $(1, 1)$, из которых система может быть переведена в точку $\bar{x}^0$ с помощью допустимого управления /множество управляемости в $\bar{x}^0$ [2] /;

$F_n(\bar{x}^0, U)$ - множество начальных состояний системы $(1, 1)$, из которых она может быть переведена в $\bar{x}^0$ за n шагов /множество управляемости в $\bar{x}^0$ за n шагов/;

$$O_n(\bar{x}, U) = \{(\bar{x} - A^{-1}(1)\ldots A^{-1}(n)\bar{u}) : \bar{u} \in U\};$$

$$V(\bar{a}, U) = \{(\bar{u} - \bar{a}) : \bar{u} \in U\};$$

$S(\bar{x}^0, U)$ -множество точек из E_m, в которые можно попасть из $\bar{x}^0$ за конечное число шагов допустимого управления /множество достижимости из $\bar{x}^0$ [3]/;

$S_n(\bar{x}^0, U)$-множество точек из E_m, в которые можно попасть из точки $\bar{x}^0$ за n шагов допустимого управления /множество достижимости из $\bar{x}^0$ за n шагов/;

$$A \oplus B = \{(\bar{x} + \bar{y}) : \bar{x} \in A, y \in B\};$$

$$\|\bar{x}\| = \sqrt{\sum x_i^2};$$

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}, \qquad \text{если } A = (a_{ij});$$

$$C(\bar{x}^0, \rho) = \{\bar{x} : \|\bar{x} - \bar{x}^0\| < \rho\};$$

ΓP -граница множества P;

$\dim P$ -размерность множества P /из E_m /;

$\operatorname{rang} A$ и $\det A$ - соответственно ранг и определитель матрицы A;

$\{\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_p\}$ -матрица размерности $m+p$, каждым l -м столбцом которой является соответствующий m -мерный столбцовый вектор $\bar{a}_l$. Считается [3,4], что система /I,I/ управляема в точку $\bar{x}^0$, если $F(\bar{x}^0, U) = E_m$. Если к тому же для всех $\bar{x} \in E_m$

$$F(\bar{x}, U) = E_m,$$

то в этом случае будем называть систему /I.I/ абсолютно управляемой. Все остальные определения и обозначения будут нами вводиться по мере необходимости.

В статье исследуется[ж/], как влияет вид матриц $\{A(n)\}$ и $\{B(n)\}$, а также размерность и расположение в пространстве множества U на топологию и размерность множеств

$$F_n(\bar{x}^0, U),\ F(\bar{x}^0, U),\ S_n(\bar{x}^0, U),\ S(\bar{x}^0, U).$$

Указываются приемы для приближенного построения этих множеств и решения задачи оптимального быстродействия и задач типа задачи Майера. Попутно находятся условия управляемости и абсолютной управляемости, выполнение которых, как нами уже указывалось выше, имеет чрезвычайно большое значение.

Сначала рассматривается самый общий случай задания системы/I.I/. В дальнейшем исследуется влияние различных факторов на топологию $F(\bar{x}^0, U)$ и $S(\bar{x}^0, U)$ в результате более детального рассмотрения свойств матриц $\{A(n)\}$ и $\{B(n)\}$.

§ 2. Общие свойства множеств $\{S_n(\bar{x}^0, U)\}$ и $\{F_n(\bar{x}^0, U)\}$. Размерность множеств $S_n(\bar{x}^0, U)$

Пусть нам задана система /I.I/, которая решается при начальных условиях:

$$\bar{x}(0) = \bar{x}^0, \qquad /2.1/$$

[ж/] Публикуемая часть статьи носит в основном вводный характер. Продолжение статьи будет опубликовано в очередных номерах сборника.

причем $\bar{u}(k)\in U\,(k=1,2,\ldots)$, где U -замкнутая выпуклая область из E_s $(1\le s\le m)$.

Очевидно, что состояние на n -м шаге определяется с помощью формулы:

$$\bar{x}(n)=B(n)\,\bar{u}(n)+\sum_{k=1}^{n-1}A(n)\cdot A(n-1)\ldots A(k+1)B(k)\bar{u}(k)+ + A(n)\cdot A(n-1)\ldots A(1)\bar{x}_0 . \qquad /2.2/$$

Из определения множеств $F_n(\bar{x}^0,U)$, $F(\bar{x}^0,U)$, $S_n(\bar{x}^0,U)$ и $S(\bar{x}^0,U)$ следует, что

$$S_0(\bar{x}^0,\,U)=F_0(\bar{x}^0,\,U)\;\equiv\;\bar{x}^0, \qquad /2.3/$$

а при $n\ge 1$ множества $S_n(\bar{x}^0,U)$ и $F_n(\bar{x}^0,U)$ задаются с помощью равенств:

$$S_n(\bar{x}^0,U)=\Big\{\Big[B(n)\bar{u}(n)+\sum_{k=1}^{n-1}A(n)\ldots A(k+1)\cdot B(k)\bar{u}(k)+ + A(n)\cdot A(n-1)\ldots A(1)\bar{x}_0\Big]:\bar{u}(k)\in U\Big\}, \qquad /2.4/$$

$$F_n(\bar{x}^0,U)=\{\bar{x}:A(n)\cdot A(n-1)\ldots A(1)\bar{x}=\bar{x}^0-\bar{z};\ \bar{z}\in S_n(\bar{o},U)\}, \qquad /2.5/$$

причем

$$F(\bar{x}^0,U)=\bigcup_{k=0}^{\infty}F_k(\bar{x}^0,U), \qquad /2.6/$$

$$S(\bar{x}^0,U)=\bigcup_{k=0}^{\infty}S_k(\bar{x}^0,U). \qquad /2.7/$$

Так как U является замкнутым выпуклым множеством из E_s , то, согласно /2.4/, множество $S_n(\bar{x}^0,U)$ также представляет собой замкнутое выпуклое множество, целиком принадлежащее некоторой гиперплоскости $P_n(\bar{x}^0,U)\subset E_m$, так что

$$\dim P_n(\bar{x}^0,U)=\dim S_n(\bar{x}^0,U), \qquad /2.8/$$

причем

$$\dim S_n(\bar{x}^0,U)=\operatorname{rang}\{\bar{b}_1(n),\ldots,\bar{b}_s(n),A(n)\cdot\bar{b}_1(n-1),\ldots,A(n)\cdot\bar{b}_s(n-1), \ldots,A(n)\ldots A(n-k+1)\bar{b}_1(k),\ldots,A(n)\ldots A(n-k+1)\bar{b}_s(k),\ldots,A(n)\ldots \ldots A(2)\bar{b}_1(1),\ldots,A(n)\ldots A(2)\bar{b}_s(1)\}, \qquad /2.9/$$

где

$$B(k)=\{\bar{b}_1(k),\ldots,\bar{b}_s(k)\}. \qquad /2.10/$$

Из /2.9/ следует, что

$$\operatorname{rang}B(n)\le\dim S_n(\bar{x}^0,U)\le\min\Big[m,\sum_{k=1}^{n}\operatorname{rang}B(k)\Big], \qquad /2.11/$$

$$\dim S_1(\bar{x}^0,U)=\operatorname{rang}B(1), \qquad /2.11'/$$

причем нижняя и верхняя оценки /2.11/ достигаются при любых $n,m\ge 1$. В частности, нижняя оценка /2.11/ реализуется, если

$$B(k)\equiv B=\{\bar{b}_1,\ldots,\bar{b}_s\}\quad(k=1,\ldots,n), \qquad /2.10'/$$

$$A(k)\cdot\bar{b}_j=\sum_{l=1}^{s}t_{j,l}^{(k)}\cdot\bar{b}_l\quad(k=1,\ldots,n;\,j,l=1,\ldots,s). \qquad /2.12/$$

Например, /2.12/ имеет место, если $s=m$, причем

$$A(k)=\sum_{l=0}^{m-1}a_l^{(k)}H^l,\quad B=\sum_{l=0}^{m-1}b_lH^l,$$

где H -первая наддиагональ, $H^0=E$. В данном случае

$$t_{i,l}^{(k)} = \begin{cases} 0 & \text{при } i > l, \\ a_{l-i}^{(k)} & \text{при } i \leq l. \end{cases}$$

Следует отметить, что в общем случае условие /2.12/ не являются необходимыми для выполнения нижней оценки /2.11/. Однако если справедливо /2.10/ и имеет место тождество

$$A(k) \equiv A \qquad (k = 1,\dots,n), \qquad /2.10''/$$

то для выполнения при $n > 1$ равенства

$$\dim S_n(\bar{x}^0, U) = \operatorname{rang} B \qquad /2.11''/$$

необходимо и достаточно наличие равенств

$$A\bar{b}_j = \sum_{l=1}^{s} t_{j,l}\,\bar{b}_l \quad (j, l = 1,\dots,s). \qquad /2.12'/$$

В частности, в случае $A = (\lambda_i \delta_{ij})$ и $s = 2$ условие /2.12 / выполняется:

$$\lambda_{i1} b_{1i} = t_1 \cdot b_{1i} + \tau_1 b_{2i}, \qquad \lambda_i b_{2i} = t_2 b_{1i} + \tau_2 b_{2i},$$

$$(i = 1,\dots,m), \text{ если } a_i \neq 0, \ \lambda_i = t_i + \tau_1 \xi^{(i)} \neq 0, \ b_{2i} = \xi^{(i)} a_i,$$

где $\xi^{(i)} = \dfrac{\tau_2 - \tau_1 + (-1)^{k_i}\sqrt{(t_1 - \tau_2)^2 + 4\tau_1 t_2}}{2\tau_1}$, $k_i \in \{0,1\}$,

причем $(t_1 - \tau_2)^2 > -4\tau_1 t_2$.

Очевидно, что при выполнении /2.10/ и /2.10 / соотношение /2.9/ имеет вид:

$$\dim S_n(\bar{x}^0, U) = \operatorname{rang}\{\bar{b}_1,\dots,\bar{b}_s, A\bar{b}_1,\dots,A\bar{b}_s,\dots,$$
$$A^l\bar{b}_1,\dots, A^l\bar{b}_s,\dots, A^{n-1}\bar{b}_1,\dots, A^{n-1}\bar{b}_s\}. \qquad /2.9'/$$

Докажем, что для любых $m \geq 2$, $s \geq 1$ таких, что m кратно s, существует семейство матриц A и B, удовлетворяющих условиям $\det A \neq 0$, $\operatorname{rang} B = s$, в случае которых для всех $n \geq 1$ справедливо тождество :

$$\dim S_n(\bar{x}^0, U) = \min[m, \sum_{i=1}^{n} \operatorname{rang} B] = \min[m, ns], \qquad /2.13/$$

т.е. в данном случае при любом $n \geq 1$ достигается верхняя оценка /2.11/ для $\dim S_n(\bar{x}^0, U)$.

Пусть матрицы A и B, удовлетворяющие /2.10/ и /2.10 /, заданы следующим образом:

1/ матрица A является диагональной матрицей:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{ps} \end{bmatrix},$$

где

$$\lambda_i = \begin{cases} \alpha_1 & \text{при } 1 \leq i \leq s, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \alpha_p & \text{при } (p-1)s + 1 \leq i \leq ps, \end{cases} \qquad /2.14/$$

причем

$$\alpha_\mu \neq \alpha_\nu \qquad \text{при} \qquad \mu \neq \nu; \qquad /2.15/$$

2/ матрица

$$B = \begin{bmatrix} b_{11}, \dots, b_{s1} \\ \dots\dots\dots \\ b_{1,ps}, \dots, b_{s,ps} \end{bmatrix} = \left\{ \bar{b}_1, \dots, \bar{b}_s \right\},$$

где

$$b_{i,l} = b_{i,l-s} \quad (i = 1,\dots,s;\ l = s+1,\dots,ps), \qquad /2.16/$$
$$\det B^s \neq 0,$$

где

$$B^s = \begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{s1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{s1} \dots b_{ss} \end{vmatrix}.$$

В данном случае

$$C_n = \{\bar b_1,\dots,\bar b_s, A\bar b_1,\dots,A\bar b_s,\dots, A^{n-1}\bar b_1,\dots,A^{n-1}\bar b_s\} =$$
$$= \begin{bmatrix} b_{11},\dots b_{s1}, \lambda_1 b_{11},\dots,\lambda_1 b_{s1},\dots,\lambda_1^{n-1} b_{11},\dots,\lambda_1^{n-1} b_{s1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ b_{1,ps},\dots, b_{s,ps}, \lambda_{ps} b_{1,ps},\dots \lambda_{ps} b_{s,ps}, \lambda_{ps}^{n-1} b_{1,ps},\dots,\lambda_{ps}^{n-1} b_{s,ps} \end{bmatrix}. \qquad /2.17/$$

Из /2.17/ следует, что C_p является квадратной матрицей размерности $ps \times ps = m \times m$. Если будет установлено, что $\det C_p \neq 0$,то тем самым мы докажем, что

$$\operatorname{rang} C_n = \begin{cases} sn & \text{при } 1 \leq n \leq p, \\ m & \text{при } n > p. \end{cases} \qquad /2.18/$$

Но C_p является левым кронекеровским произведением матриц B^s_s и L^p :

$$C_p = B^s \cdot L^p, \qquad /2.19/$$

где B^s имеет смысл, указанный выше, а

$$L^p = \begin{vmatrix} 1, \alpha_1,\dots, \alpha_1^{p-1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1, \alpha_p,\dots, \alpha_p^{p-1} \end{vmatrix}. \qquad /2.20/$$

На основании /2.19/ заключаем, что

$$\det C_p = (\det B^s)^p \cdot (\det L^p)^s \neq 0, \qquad /2.21/$$

так как $\det C_p$ является кронекеровским произведением определителей матриц B^s и L^p , $\det B^s \neq 0$ по определению, причем $\det L^p$ представляет собой не равный нулю определитель Вандермонда /все α_j различны/. Тем самым мы доказали справедливость /2.13/.

Аналогично можно показать, что если $A = (\lambda_i \delta_{ij})$, где $\lambda_\mu \neq \lambda_\nu$ при $\mu \neq \nu$, и существует такой вектор $\bar b^* = \sum_{l=1}^{s} t_l \bar b_s$, все компоненты которого не равны нулю, то при $n \leq m$

$$\dim S_n(\bar x^0, U) \geq \max(n, \operatorname{rang} B), \qquad /2.22/$$
$$\dim S_m(\bar x^0, U) = m. \qquad /2.23/$$

§ 3. Определение $\dim S_n(\bar x^0, U)$. Вид множеств $S_n(\bar x^0, U)$

При выполнении /2.10/ и /2.10 / для точного вычисления $\dim S_n(\bar x^0, U)$ строится следующая последовательность матриц $C^1,\dots,C^n$ и им соответствующие множества индексов $J^1,\dots, J^n$,

где $J_{i+1} \subseteq J_i \subseteq \{1,\dots,s\}$, $J_i = \{j_1^{(i)},\dots,j_{k_i}^{(i)}\}$,
$1 \leq j_1^{(i)} < j_2^{(i)} < \dots < j_{k_i}^{(i)} \leq s$.

Обозначим через $B^{[J]}$ матрицу, составленную из столбцов $\bar b_j$ таких,что $j \in J$. Легко проверить, что каковы бы ни были A и B в /2.10'/ и /2.10''/, имеют место равенства

$$\dim S_n(\bar{x}^0, U) = \operatorname{rang} C^n = \sum_{k=1}^{n} |\mathcal{J}_k|, \qquad /3.1/$$

где при $n \geq 2$

$$C^n = \begin{cases} (C^{n-1} \vdots A^{n-1} B^{[\mathcal{J}]}), & \text{если } \mathcal{J}_n \neq \Lambda, \\ C^{n-1}, & \text{если } \mathcal{J}_n = \Lambda, \end{cases} \qquad /3.2/$$

а $\mathcal{J}_n$ представляет такое множество индексов из $\mathcal{J}_{n-1}$, что

$$j_1^{(n)} = \min\{j : j \in \mathcal{J}_{n-1} ;\ A^{n-1}\bar{b}_j \neq \sum_{l=1}^{\sum_{p=1}^{n-1}|\mathcal{J}_p|} t_l \cdot \bar{c}_l^{(n-1)}\}, \qquad /3.3/$$

$$j_l^{(n)} = \min\{j : j \in \mathcal{J}_{n-1},\ j > j_{l-1}^{(n)} ;\ A^{n-1}\bar{b}_j \neq \sum_{\mu}^{\sum_{p=1}^{n-1}|\mathcal{J}_p|} t_\mu \bar{c}_\mu^{(n-1)} + \sum_{\nu=1}^{b-1} \tau_\nu A^{n-1}\bar{b}_{j_\nu}(n)\}, \qquad /3.4/$$

где предполагается, что

$$C^{n-1} = \left\{\bar{c}_1^{(n-1)}, \dots, \bar{c}_{\sum_{p=1}^{n-1}|\mathcal{J}_p|}^{(n-1)}\right\}.$$

При этом /3.4/ имеет смысл лишь тогда, когда

$$|\mathcal{J}_n| > 1, \quad 1 < s \leq k_n = |\mathcal{J}_n|.$$

Множество $\mathcal{J}_1$ является таким множеством индексов, которые удовлетворяют условиям:

$$j_1^{(1)} = 1, \qquad /3.3'/$$

$$j_l^{(1)} = \min\{j : j_{l-1}^{(1)} < j \leq s ;\ \bar{b}_{j_l}(1) \neq \sum_{\mu=1}^{b-1} t_\mu \bar{b}_{j_\mu}(1)\},\ l = 2, \dots, \operatorname{rang} B, \qquad /3.4'/$$

а

$$C^1 = B^{[\mathcal{J}_1]}. \qquad /3.2'/$$

Так как

$$|\mathcal{J}_1| \geq |\mathcal{J}_2| \geq \dots \geq |\mathcal{J}_n| \qquad /3.5/$$

или, что то же самое,

$$s \geq k_1 \geq \dots \geq k_n \geq 0, \qquad /3.5'/$$

причем

$$\dim S_n(\bar{x}^0, U) = \sum_{i=1}^{n} k_i \leq m, \qquad /3.6/$$

то

$$k_n \begin{cases} \geq 1 & \text{при } 1 \leq n \leq n^*, \\ = 0 & \text{при } n > n^*, \end{cases} \qquad /3.7/$$

где

$$1 \leq n^* < m - \operatorname{rang} B. \qquad /3.8/$$

Следовательно, в случае постоянных $\{A(n)\}$ и $\{B(n)\}$

$$\dim S_{n+1}(\bar{x}^0, U) > \dim S_n(\bar{x}^0, U) \quad \text{при } 1 \leq n \leq n^* - 1, \qquad /3.9/$$

$$\dim S_n(\bar{x}^0, U) \equiv \dim S_{n^*}(\bar{x}^0, U) \quad \text{при } n > n^*, \qquad /3.10/$$

причем, каково бы ни было k,

$$\dim S_{m-\operatorname{rang}B+k}(\bar{x}^0, U) \equiv \max_{n \geq 1} \dim S_n(\bar{x}^0, U). \qquad .10'/$$

Значит, в данном случае

$$dim\, S(\bar{x}^0, U) = \sum_{i=1}^{n^*} k_i \, . \qquad /3.11/$$

Кроме того, в случае постоянных $\{A(n)\}$ и $\{B(n)\}$ каждое множество $S_n(\bar{x}^0, U)$ имеет вид:

$$S_n(\bar{x}^0, U) = \{[A^n_{\bar{x}^0} + (\sum_{l=0}^{n-1} A^l) B\bar{u}^* + \sum_{i=1}^{n} \sum_{l=1}^{k_i} t_{i,l} A^{i-1} \bar{b}_{j_l}^{(i)}] : (t_{1,1}, \ldots$$

$$\ldots, t_{1,k}, \ldots, t_{n,1}, \ldots, t_{n,k_n}) \in \Omega_n(\bar{x}^0, \bar{u}^*, U)\}, \qquad /3.12/$$

где $\bar{u}^* \in U \setminus \Gamma U$, $\Omega_n(\bar{x}^0, \bar{u}^*, U)$ -замкнутая выпуклая область из $E_{\sum_{i=1}^{n} k_i}$, причем $\bar{0} \in \Omega_n \setminus \Gamma\Omega_n$.

Очевидно, что для $n \geq n^*$

$$S_n(\bar{x}^0, U) = \{[A^n_{\bar{x}^0} + (\sum_{l=0}^{n-1} A^l) B\bar{u}^* + \sum_{i=1}^{n^*} \sum_{l=1}^{k_i} t_{i,j} A^{i-1} b_{j_l}^{(i)}] : (t_{1,1}, \ldots$$

$$\ldots, t_{n^*, k^*_n}) \in \Omega_n \, (\bar{x}^0, \bar{u}^*, U), \qquad /3.12'/$$

где $\Omega_n(\bar{x}^0, \bar{u}^*, U)$ являются замкнутыми выпуклыми множествами из $E_{\sum_{i=1}^{n^*} k_i}$.

Обозначим $\bar{t}^n = (t_{1,1}, \ldots, t_{n,k_n})$. Так как при $n+s \leq n^*$, $s \geq 1$,

$$E_{\sum_{i=1}^{n} k_i} = \{\bar{t}^{n+s} : \bar{t}^{n+s} \in E_{\sum_{i=1}^{n+s} k_i} ; \; t_{i,j} = 0$$

$$(i = n+1, \ldots, n+s ; \; j = 1, \ldots, k_i)\},$$

т.е. $E_{\sum_{i=1}^{n} k_i}$ является подпространством размерности $\sum_{i=1}^{n} k_i$ пространства $E_{\sum_{i=1}^{n+s} k_i}$, то нетрудно заметить, что для $n \geq 1$

$$\Omega_n(\bar{x}^0, \bar{u}^*, U) \subseteq \Omega_{n+1} \, (\bar{x}^0, \bar{u}^*, U). \qquad /3.13/$$

В этом случае при $\mu \geq 1$

$$\Omega_{\tilde{n}+\mu}(\bar{x}^0, \bar{u}^*, U) \equiv \Omega_{\tilde{n}}(\bar{x}^0, \bar{u}^*, U) \supset \Omega_{\tilde{n}-1}(\bar{x}^0, \bar{u}^*, U) \qquad /3.13'/$$

тогда и только тогда, когда $\tilde{n}$ является таким минимальным $n \geq \tilde{n}$,при котором

$$A^{\tilde{n}} \bar{b}_j = \bar{0} \qquad (j = 1, \ldots, s). \qquad /3.14/$$

Условие /3.14/, в частности, имеет место при конечном $\tilde{n}$, если существует минимальное $\hat{n} \geq \tilde{n}$ такое, что

$$A^{\hat{n}} = 0. \qquad /3.14'/$$

Известно, что /3.14'/ выполняется лишь в том случае, когда все числа матрицы A равны нулю, причем

$$\hat{n} = \max_{1 \leq i \leq p} n_l \, , \qquad /3.15/$$

где n_l - размерность i -й по счету диагональной клетки Жордана в конической матрице Жордана для A . Легко заметить, что в случае произвольной системы /1.1/

$$S_n(\bar{x}^0, U) = [A(n)A(n-1) \ldots A(1)\bar{x}_0 + \sum_{k=1}^{n-1} A(n) \ldots$$

$$\ldots A(k+1)B(k)\bar{u}^*] \oplus S_n(\bar{0}, V(\bar{u}^*, U)). \qquad /3.16/$$

Из /3.16/ следует, что при постоянных $\{A(n)\}, \{B(n)\}$ для $n \geq \hat{n}$

$$S_n(\bar{x}^0, U) = S_{\hat{n}}(\bar{0}, U), \qquad /3.17/$$

если имеет место /3.14/. Если же справедливо лишь /3.14'/, то для $n \geq \hat{n}$

$$S_n(\bar{x}^0, U) = (A^n \bar{x}^0) \oplus S_{\hat{n}}(\bar{0}, U), \qquad /3.18/$$

т.е. при всех $n > \tilde{n}$ $S_n(\bar{x}^0, U)$ получается из $S_{\tilde{n}}(\bar{0}, U)$ в результате параллельного переноса, причем

$$\lim_{n\to\infty} S_n(\bar{x}^0, U) = S_{\tilde{n}}(\bar{0}, U), \qquad /3.17'/$$

если все собственные числа матрицы A по модулю меньше I. Кроме того, в случае $\bar{x}^0 = \bar{0}$ для $n \geq \tilde{n}$ справедливо точное равенство:

$$S_n(\bar{0}, U) = S_{\tilde{n}}(\bar{0}, U). \qquad /3.17''/$$

В то же время при отсутствии выполнения условия /3.14/ для любых $n \geqslant 2$

$$S_n(\bar{0}, V(\bar{u}^*, U)) \supset S_{n-1}(\bar{0}, V(\bar{u}^*, U)), \qquad /3.19/$$

$$\dim (S_m(\bar{0}, V(\bar{u}^*, U)) \setminus S_{n-1}(\bar{0}, V(\bar{u}^*, U)) > 0, \qquad /3.20/$$

если $\bar{u}^* \in U \setminus \Gamma U$. Следует отметить, что в общем случае при произвольных $\{A(n)\}$ и $\{B(n)\}$ равенства типа /3.17''/, /3.19/ и /3.20/ не имеют места. Например, в случае одномерного процесса

$$x(n) = a(n)x(n-1) + u(n), \qquad /3.21/$$

где

$$a(n) = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 2 \quad \text{и } n = 2s - 1 \; (s = 1, 2, \ldots), \\ 1/3 & \text{при } n = 2s \qquad\qquad (s = 2, 3, \ldots), \end{cases}$$

$$\bar{u} \in U = [-1, 1],$$

множество

$$S_n(0, U) = \begin{cases} [-1, 1] & \text{при } n = 1, \\ [-2, 2] & \text{при } n = 2s \; (s = 1, 2, \ldots), \\ [-3, 3] & \text{при } n = 2s + 1 \; (s = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

В рассмотренном примере множества $S_n(0, U)$ пульсируют, при нечетных n расширяясь, а при четных $n \geq 4$ сжимаясь, т.е. соотношения /3.17''/ и /3.19/ не имеют места для произвольного n.

Поступила в редакцию 25.3.1969 г.

Л и т е р а т у р а

I. А.И.Мороз, К задаче синтеза оптимального по времени управления для дискретных объектов, Автоматика и телемеханика, 1966, № II.

2. Е.Крейндлер, Развитие теории оптимальных по быстродействию процессов управления. Кибернетический сборник, "Мир", 1966. вып. 3, /новая серия/.

3. Е.Ли, Л.Маркус, Оптимальное управление нелинейными процессами, Кибернетический сборник, "Мир", 1966, вып. 2 /новая серия/.

4. P.E. Sarachik, E. Kreindler, Controllability and observability of linear discret - time systems, Internat. J. Control, N5, 1965.