Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1969 г. выпуск 2.
УДК. 519.95.

ОЦЕНКА ПЛАТЫ В ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

В.Н.Лагунов

0. В предлагаемой статье конструкции и приемы, примененные ранее автором для изучения некоторых игр качества /см.например [2] /, употреблены для получения оценки снизу некоторой платы в одной дифференциальной игре степени, протекающей на бесконечном полуинтервале времени $0 \leq t < \infty$. А именно: пусть на евклидовой плоскости E^2 равномерно со скоростями, модули которых равны соответственно константам V_1, V_2, движутся два точечных объекта: преследуемый $\bar{r}_1$ и преследующий $\bar{r}_2$, где $\bar{r}_i$, $i=1,2$, -радиус - вектор i -го объекта относительно некоторой декартовой системы координат Ω в E^2. Допустим управлением i -го объекта называется измеримая вектор-функция $\bar{u}_i(t)$, $t \geq 0$, равная, по определению, нормальному ускорению i -го объекта

$$u_i(t) = \ddot{\bar{r}}_i(t), \quad t \geq 0, \qquad /0.1/$$

и ограниченная по модулю некоторой константой

$$|\bar{u}_i(t)| = u_i(t) \leq W_i, \quad t \geq 0. \qquad /0.2/$$

Предполагается, что игра идет при наличии полной информации и дискриминации, т.е. в каждый момент $t_0 \geq 0$ объектам известны векторы

$$\bar{r}_i(t_0), \ \dot{\bar{r}}_i(t_0), \ \ddot{\bar{r}}_i(t_0), \ i = 1,2, \qquad /0.3/$$

но не известны функции $\bar{r}_i(t)$, $\dot{\bar{r}}_i(t)$, $\ddot{\bar{r}}_i(t)$ для $t > t_0$ /впрочем, дискриминация преследующего объекта не обязательна, если допустить управление "в форме первой производной", как это сделано во введении к работе [2] /. Из сказанного вытекает, что /0.1/ есть дифференциальное уравнение движения i -го объекта при заданных начальных условиях $\bar{r}_i(0)$, $\dot{\bar{r}}_i(0)$, получающихся из /0.3/ при $t_0 = 0$. Введем максимумы W_i угловых скоростей вращений векторов $\dot{\bar{r}}_i$:

$$\omega_i = \frac{W_i}{V_i}, \qquad /0.4/$$

и радиус-вектор

$$\bar{r}(t) = \bar{r}_2(t) - \bar{r}_1(t) \qquad /0.5/$$

преследующего объекта в координатной системе Ω', оси которой параллельны соответствующим координатным осям системы Ω, а начало 0 совпадает с преследуемым объектом. Плата определяется следующей формулой:

$$P = \inf_{0 \leq t < \infty} r(t), \qquad /0.6/$$

где $r(t) = |\bar{r}(t)|$ и $r(0) > 0$. Условимся также в дальнейшем обозначать символом $\measuredangle \bar{a}, \bar{b}$ угол, не бо́льший π и образованный лучами, имеющими направление векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и исходящими из одной точки /т.е. $0 \leq \measuredangle \bar{a}, \bar{b} \leq \pi$/.

В работе [2] показано, что для вышеописанной игры при некоторых дополнительных условиях существует стратегия преследуемого объекта, гарантирующая ему при любом допустимом поведении противника плату, отличную от нуля. В данной статье при несколько более жестких дополнительных условиях та же самая стратегия преследуемого объекта использована для вычисления оценки снизу платы /0.6/. А именно доказана

Т е о р е м а. Пусть для вышеописанной дифференциальной игры выполнены требования:

$$\lambda = \frac{V_2}{V_1} > \frac{5+\sqrt{33}}{2}, \qquad /0.7/$$

$$\mu = \frac{\omega_2}{\omega_1} < \min\left\{ \frac{1}{\lambda}, \frac{\lambda^2-5\lambda-2}{3(\lambda^2+\lambda)}, \frac{\lambda^2-3\lambda-1}{3\lambda^2+1} \right\}, \qquad /0.8/$$

$$r(0) \geq \left(\frac{V_2}{\omega_2}\sin\omega_2 t^* + \frac{V_1}{\omega_1}\sin\omega_1 t^*\right) + (V_1+V_2)\cdot\frac{\measuredangle - \dot{\bar r}_1(0), \dot{\bar r}_2(0)}{\omega_1 - \omega_2}, \qquad /0.9/$$

где t^* однозначно определяется следующими соотношениями:

$$\begin{cases} V_1 \sin\omega_1 t^* = V_2 \sin\omega_2 t^*, \\ 0 < \omega_1 t^* < \frac{\pi}{2}. \end{cases} \qquad /0.10/$$

Тогда, во-первых, существует стратегия $\bar f_1^*$ преследуемого объекта, гарантирующая выполнение следующего неравенства

$$\rho \geq \frac{V_2}{\omega_2}(\cos\omega_2 t^* - 1) - \frac{V_1}{\omega_1}(\cos\omega_1 t^* - 1) = \rho^* \qquad /0.11/$$

при любом допустимом поведении противника;

во-вторых, существует стратегия $\bar f_2^*$ преследующего объекта, для которой в /0.11/ /при $\bar f_1^*$ / достигается равенство;

в-третьих, моменты времени

$$t_k^*, \quad k = 1,2,\ldots, \qquad /0.12/$$

для которых при применении объектами пары стратегий $\bar f_1^*$, $\bar f_2^*$ наступает равенство

$$r(t_k^*) = \rho^*, \qquad /0.13/$$

образуют бесконечную возрастающую последовательность, члены которой отличаются друг от друга не менее чем на величину

$$t^{**} = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(V_2-V_1)^2}{(V_1+V_2)(V_2\omega_2+V_1\omega_1)}. \qquad /0.14/$$

1. Пусть в некоторый момент t_1' выполнены следующие условия:

$$\bar r(t_1') = \bar r\{-d_0, 0\}, \quad \dot{\bar r}(t_1') = \dot{\bar r}\{V_1+V_2, 0\}, \qquad /1.1/$$

где в фигурных скобках стоят проекции вектора на оси $O'X'$, $O'Y'$ координатной системы Ω' /см.рис. 1 /, а d_0 - первое слагаемое в правой части неравенства /0.9/:

$$d_0 = \frac{V_2}{\omega_2}\sin\omega_2 t^* + \frac{V_1'}{\omega_1}\sin\omega_1 t^*. \qquad /1.2/$$

Рассмотрим специальные допустимые управления $\bar u_{i,3}(t)$ объектов $\bar r_i$ на отрезке $[t_1', t_1' + t^*]$, для которых выполнены следующие требования.

1/ Функции $\bar u_{i,3}(t)$ непрерывны;

2/ $u_{i,3}(t) = W_i\,,\quad t \in [t_1',\, t_1' + t^*]$;

3/ $\bar u_{i,3}(t_1') = \bar u\,\{0,\, -W_i\,\}$.

Легко видеть, что при выполнении перечисленных требований имеем на отрезке $t_1' \le t \le t_1' + t^*$ /см. /0.4/, /0.5/ /:

$$\dot{\bar r}(t)=\dot{\bar r}\{V_2\cos\omega_2(t-t_1')+V_1\cos\omega_1(t-t_1'),\,-V_2\sin\omega_2(t-t_1')+V_1\sin\omega_1(t-t_1')\},\qquad /1.3/$$

$$\bar r(t)=\bar r\{[\tfrac{V_2}{\omega_2}\sin\omega_2(t-t_1')+\tfrac{V_1}{\omega_1}\sin\omega_1(t-t_1')]-d_0,\ \tfrac{V_2}{\omega_2}[\cos\omega_2(t-t_1')-1]-\tfrac{V_1}{\omega_1}[\cos\omega_1(t-t_1')-1]\},\qquad /1.4/$$

$$\ddot{\bar r}(t)=\ddot{\bar r}\{-W_2\sin\omega_2(t-t_1')-W_1\sin\omega_1(t_1-t_1'),\,-W_2\cos(t-t_1')+W_1\cos\omega_1(t-t_1')\}\qquad /1.5/$$

/см. /0.4/ /. Поскольку, очевидно,

$$\dot r(t) \ge V_2 - V_1,\quad \ddot r(t) \le W_1 + W_2\,,\qquad /1.6/$$

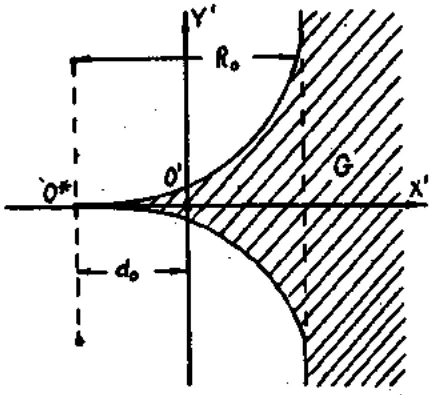

Рис. I

то из соображений, аналогичных приведенным в п. I.9 работы [2], легко вытекает справедливость следующих утверждений.

а/ При выполнении условий/I.I/ все допустимые траектории, описываемые концом радиус-вектора $\bar r(t)$, $t\in[t_1',\, t_1'+t^{**}]$ /см. /0.14/ / при любых допустимых управлениях объектов, расположены в правой замкнутой части G плоскости E^2 ,ограниченной следующими линиями /см. рис. I/:

$$L_1:\quad \begin{cases} (x'+d_0)^2+(y'-R_0)^2 = R_0^2, \\ -d_0 \le x' \le R_0 - d_0, \\ 0 \le y' \le R_0, \end{cases}$$

$$L_2:\quad \begin{cases} x' = R_0 - d_0, \\ y' \ge R_0\ , \end{cases}$$

где

$$R_0 = \frac{(V_2 - V_1)^2}{W_1 + W_2}\qquad /1.7/$$

и линиями L_j', $j = 1, 2$, симметричными линиям L_j относительно оси $O'X'$.

б/ Выполняется неравенство

$$(\dot{\bar r}(t),\, \dot{\bar r}(t_1')) > 0,\ t \in [t_1',\, t_1' + t^{**}].$$

в/ Концы радиус-векторов $\bar r(t^{**})$ при любых допустимых управлениях объектов на $[t_1',\, t_1'+t^{**}]$ лежат в полуплоскости $H:\ x' \ge R_0 - d_0$.

Далее нам понадобится следующее, уточняющее а/ /в частном случае/, утверждение

а/ . Пусть в /I.I/

$$V_1 = 0,\qquad /1.8/$$

/т.е. $\bar r = \bar r_2$ и $\bar r_1 \equiv 0$ /, а $\bar u_2(t)$, $t \in [t_1',\, t_1' + \frac{\pi}{2\omega_2}]$ -любое допустимое управление объекта $\bar r_2$, рассматриваемого в данном случае в единственном числе. Тогда для любого $t_0 \in [\,t_1',\, t_1' + \frac{\pi}{2\omega_2}\,]$ множество концов радиус-

-векторов $\bar{r}_2(t_0)$ заключено в части G' плоскости E^2, изображенной на рис. 2 и ограниченной дугой $\smile AA_x$ эвольвенты окружности $(x'+d_0)^2 + (y'-\frac{V_2}{\omega_2})^2 = (\frac{V_2}{\omega_2})^2$ /начинающейся в точке $A(\frac{V_2}{\omega_2}-\frac{V_2}{\omega_2}\cos\omega_2(t_0-t_1'), -d_0+\frac{V_2}{\omega_2}\sin\omega_2(t_0-t_1'))$ /, а также симметричной ей относительно $O'X'$ дугой $\smile A_x A'$ и отрезком AA'. Причем если ввести обозначения:

$\tilde{\bar{r}}_2(t)$ - траектория, описываемая объектом $\bar{r}_2$ при любом допустимом управлении $\tilde{\bar{u}}_2(t), t\in[t_1', t_1'+\frac{\pi}{2\omega_2}]$,

$\bar{r}_2(t)$ - траектория, описываемая тем же объектом при управлении $\bar{u}_{2,3}(t)$ и подчиняющаяся требованиям 1/, 2/', 3/, где 2/' получается из сформулированного выше требования 2/ заменой отрезка $[t_1', t_1'+t^*]$ отрезком $[t_1', t_1'+\frac{\pi}{2\omega_2}]$,

$$\Delta\bar{r}_2(t_0) = \tilde{\bar{r}}_2(t_0) - \bar{r}_2(t_0),\quad t\in[t_1', t_1'+\frac{\pi}{2\omega_2}], \qquad /1.9/$$

то выполняются соотношения

$$\begin{cases} \frac{\pi}{2} \geq \angle\, \Delta\bar{r}_2(t_0), O'X' \geq \frac{\pi}{2} - \angle\, \dot{\bar{r}}_2(t_0), O'X' = \frac{\pi}{2} - \omega_2(t_0 - t_1'), \\ \text{пр.}_{O'Y'}\, \Delta\bar{r}_2(t_0) \geq 0, \end{cases} \qquad /1.10/$$

/поскольку G', очевидно, принадлежит углу $\angle AA'C$ /.

Доказательство утверждения а/ проводится элементарно.

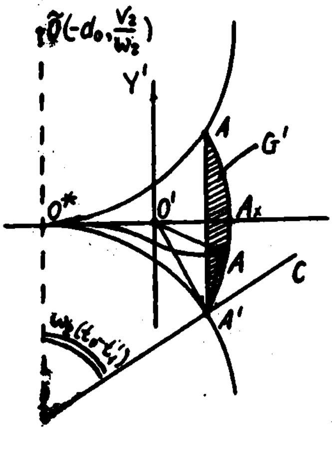

Рис. 2.

Из /0.7/, /0.8/ вытекает неравенство

$$\mu < \frac{1}{2}. \qquad /1.11/$$

Пусть на отрезке $[t_1', t_1'+t^*]$ взяты управления:

$$\bar{u}_1(t) = \bar{u}_{1,3}(t),$$
$$\bar{u}_2(t) = \tilde{\bar{u}}_2(t),$$

/в обозначениях, введенных ранее/. Обозначим получившуюся при этом траекторию объекта $\bar{r}_2$ в системе Ω' через $\tilde{\bar{r}}(t)$. Тогда из /0.5/, /0.10/, /1.9/, /1.10/, /1.11/ получаем для вектора

$$\Delta\bar{r}(t) = \tilde{\bar{r}}(t) - \bar{r}(t) = \tilde{\bar{r}}_2(t) - \bar{r}_2(t) = \Delta\bar{r}_2(t)$$

следующее соотношение

$$\frac{\pi}{2} \geq \angle\, \Delta\bar{r}(t), O'X' > \frac{\pi}{2} - \omega_2(t-t_1') > \frac{\pi}{4},\ t\in[t_1', t_1'+t^*]. \qquad /1.12/$$

Условие

$$(V_1+V_2)\cdot\frac{\pi}{2\omega_1}\cdot\frac{1}{R_0} < \frac{\pi}{6}, \qquad /1.13/$$

как нетрудно показать, эквивалентно следующему требованию /см./0.8//.

$$\mu < \frac{\lambda^2 - 5\lambda - 2}{3(\lambda^2+\lambda)} \equiv \varphi_1(\lambda), \qquad /1.13/$$

где должно выполняться неравенство /см. /0.7//

$$\lambda > \frac{5+\sqrt{33}}{2}, \qquad /I.14/$$

гарантирующие $\varphi_1(\lambda) > 0$. Итак, в силу /0.7/, /0.8/, условие /I.13'/ выполнено.

Из /0.7/, /0.8/, /0.10/, /I.I/ - /I.4/ вытекает, что максимум ординаты точки $\bar r(t)$, $t\in[t_1', t_1'+\frac{\pi}{2\omega_1}]$, достигается при $t=t_1'+t^*$ и равен значению ρ^* в /0.11/, причем абсцисса точки $\bar r(t_1'+t^*)$ равна нулю /см. /I.1/, /I.2/, /I.4//. Следующие неравенства

$$d_0 < \frac{1}{2}R_0, \qquad /I.15/$$

$$\rho^* < \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)R_0 \qquad /I.16/$$

вытекают из /I.7/, /I.13/ и утверждения в/.

Пусть $O'D$ отрезок, реализующий максимум ρ^* /см. рис. 3 /,

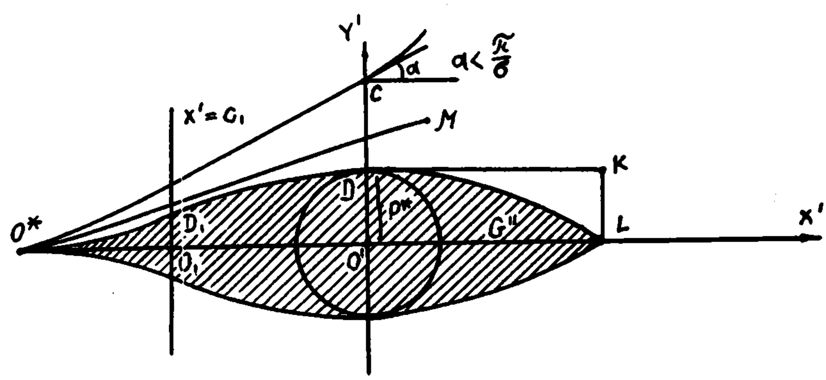

Рис. 3.

$\smile O^*D$ - траектория точки $\bar r(t)$, $t\in[t_1', t_1'+t^*]$, а $\smile DL$ - дуга окружности радиуса R_0, касающаяся горизонтали DK в точке D /$\smile DL$ входит в границу части плоскости E^2, полученной параллельным сдвигом G на вектор O^*D /см. рис. I / /. Часть плоскости, ограниченную дугами $\smile O^*D$, $\smile DL$ и дугами, симметричными только что перечисленным относительно $O'X'$, обозначим через G''. Из построения и /I.16/ вытекает, что центр наибольшего круга, вписанного в G'', есть O', а радиус этого круга равен ρ^*. Неравенство

$$\measuredangle\, \dot{\bar r}(t), O'X' < \frac{\pi}{6}, \quad t\in\left[t_1',\ t_1'+\frac{\pi}{2\omega_1}\right]$$

очевидным образом вытекает из /0.7/, /I.I/ и /I.13/. Следствием последнего неравенства и /I.12/ является такое утверждение.

г/ Кусок $\smile O^*M$ траектории $\tilde r(t)$, $t\in[t_1', t_1'+t^*]$, не заходит внутрь области G'' и лежит выше множества внутренних точек области G''. Кроме того, как сейчас будет показано,

$$\text{пр.}_{O'X'}\,\overline{O'M} \geq 0. \qquad /I.17/$$

В самом деле, из /I.3/ видно, что замена управления $\bar u_{2,3}(t)$ любым другим допустимым управлением преследующего объекта на отрезке $[t_1', t_1'+t^*]$ не уменьшает проекции вектора $\bar r(t)$ на $O'X'$, а следовательно, не уменьшается и проекция вектора $\bar{r}(t)$ на $O'X'$ для $t\in[t_1', t_1'+t^*]$, т.е. пр.$_{O'X'}\tilde{\bar{r}}(t_1'+t^*) \geq$ пр.$_{O'X'}\bar{r}(t_1'+t^*) = 0$. Но та же замена управлений, как следует из /I.3/, не уменьшает и проекции вектора $\dot{\bar{r}}(t)$ на $O'Y'$, следовательно,

$$\text{пр.}_{O'Y'}\dot{\tilde{\bar{r}}}(t) \geq \text{пр}_{O'Y'}\dot{\bar{r}}(t) \geq 0,\ t\in[t_1', t_1'+t^*], \qquad /I.18/$$

$$\text{пр.}_{O'Y'}\dot{\tilde{\bar{r}}}(t^*) \geq \text{пр}_{O'Y'}\dot{\bar{r}}(t^*) = 0.$$

Из /I.17/, /I.18/ и утверждений а/, б/, принимая во внимание способ построения области G'' /см. рис. 3/, приходим к выводу о справедливости следующего утверждения.

д/ Пусть для условий /I.I/ имеем:

$$\bar{u}_1(t) = \begin{cases} \bar{u}_{1,3}(t),\ t\in[t_1', t_1'+t^*], & /I.19/ \\ \bar{u}_1(t) \text{ -любое допустимое для } t\in(t_1'+t^*, t_1'+t^{**}] \end{cases}$$

и управление преследующего объекта на отрезке $[t_1', t_1'+t^{**}]$ любое допустимое; тогда, во-первых, получающаяся при этом траектория $\bar{r}(t)$, $t\in[t_1', t_1'+t^{**}]$, не заходит внутрь области G'', и, во-вторых, при

$$\bar{u}_i(t)=\bar{u}_{i,3}(t),\ t\in[t_1', t_1'+t^*],\ i=1,2, \qquad /I.20/$$

упомянутая траектория проходит через точку D /см. рис. 3/.

В самом деле, кусок траектории $\bar{r}(t)$, соответствующий отрезку времени $[t_1', t_1'+t^*]$, не заходит внутрь G'' в силу утверждения г/; перенося /параллельно/ множество G /см. рис. I/ на вектор $\overline{O^*M}$ и повернув его после переноса вокруг точки M на угол $\measuredangle\dot{\bar{r}}(t^*), O'X'\in[0,\frac{\pi}{2}]$, убеждаемся, что и оставшийся кусок упомянутой траектории не заходит внутрь области G''.

Из сказанного выше ясно, что справедливо и такое утверждение.

е/ Если на отрезке $[t_1', t_1'+t^*]$ $\bar{u}_1(t)=\bar{u}_{1,3}(t)$, а $\bar{u}_2(t)$ отличается от $\bar{u}_{2,3}(t)$ на множестве значений t положительной меры, то траектория, получающаяся при этом, пересекает ось $O'Y'$ выше точки D.

Совершенно также можно убедиться и в справедливости следующего утверждения.

ж/ Если на отрезке $[t_1', t_1'+t^*]$, $\bar{u}_2(t)=\bar{u}_{2,3}(t)$, а $\bar{u}_1(t)$ отличается от $\bar{u}_{1,3}(t)$ на множестве значений t положительной меры, то траектория, получающаяся при этом, пересекает ось $O'Y'$ ниже точки D.

Утверждения, аналогичные е/, ж/, можно получить и для любого сечения области G'' прямою $x'=c_1, -d_0<c_1<0$, взяв при этом вместо отрезка $O'D$ отрезок O_1D_1 /см. рис. 3/, а вместо отрезка $[t_1', t_1'+t^*]$ отрезок времени, соответствующий прохождению дуги $\smile O^*D_1 \subset \smile O^*D$.

Из сказанного и утверждений е/, ж/ видно, что дуга $\smile O^*D$ является некоторым аналогом полупроницаемой поверхности в смысле Р.Айзекса /см. [I], п. 4.3/.

Определим следующим образом специальное допустимое управление $\bar{u}_{1,1}(t)$ преследуемого объекта:

I'/ $\bar{u}_{1,1}(t)$ непрерывна, $t_0 \leq t \leq t_0'$;

2'/ $u_{1,1}(t)=w_1$, $t_0 \leq t \leq t_0'$;

3'/ $(-\dot{\bar{r}}_2(t_0), \bar{u}_{1,1}(t_0)) \geq 0.$

В последнем условии, в случае строгого равенства, в качестве $\bar{u}_{1,1}(t_0)$ можно брать любой из двух векторов противоположного направления.

Смысл введенного управления $\bar{u}_{1,1}(t)$ очевиден: применяя такое управление, объект $\bar{r}_1$ с максимальной скоростью /не меньшей $(\omega_1-\omega_2)$ / уменьшает угол $\measuredangle\, \dot{\bar{r}}_1(t_0), -\dot{\bar{r}}_2(t_0)$.

Условие

$$(\omega_1+\omega_2)\frac{\pi}{2\omega_1} < (\omega_1-\omega_2)(t^{**}-\frac{\pi}{2\omega_1}) \qquad /1.21/$$

эквивалентно, как нетрудно установить, таким требованиям:

$$\begin{cases} \mu < \dfrac{\lambda^2-3\lambda-1}{3\lambda^2+1} \equiv \varphi_2(\lambda), \\ \lambda > 2+\sqrt{5} = \lambda_2 \end{cases} \qquad /1.21'/$$

/$\varphi_2(\lambda)>0$ при $\lambda>\lambda_2$ / и выполнено ввиду /0.7/, /0.8/. Легко видеть, что, применяя для $t_0=t^*$ управление $\bar{u}_{1,1}(t)$ /см. 1'/ - 3'/ /, преследуемый объект в некоторый момент $t_2 \le t_1'+t^{**}$ добьется совпадения направлений векторов $-\dot{\bar{r}}_1(t_2), \dot{\bar{r}}_2(t_2)$.

Определим еще одно специальное допустимое управление преследуемого объекта:

$$\bar{u}_{1,2}(t) = -\frac{W_1}{W_2}\bar{u}_2(t), \quad t_0 \le t \le t_0', \qquad /1.22/$$

где $\bar{u}_2(t)$ -любое допустимое управление преследующего объекта.

Смысл управления $\bar{u}_{1,2}(t)$ ясен: если в момент t_0 направления векторов $-\dot{\bar{r}}(t_0)$, $\dot{\bar{r}}_2(t_0)$ совпадали, то эти векторы будут иметь одинаковое направление на всем отрезке $[t_0, t_0']$, если на нем действует управление $\bar{u}_{1,2}(t)$.

2. Теперь мы в состоянии сконструировать стратегии $\bar{f}_i^*$, упомянутые в теореме.

Покажем, что мы вправе положить:

$$\bar{f}_1^* = \begin{cases} \bar{u}_{1,1}(t), & t\in[0,t_1], \\ \bar{u}_{1,2}(t), & t\in[t_1,t_1'], \\ \bar{u}_{1,3}(t), & t\in[t_1',t_1'+t^*], \\ \bar{u}_{1,1}(t), & t\in[t_1'+t^*,t_2], \\ \bar{u}_{1,2}(t), & t\in[t_2,t_1'+t^{**}], \\ \dots\dots\dots \end{cases} \qquad /2.1/$$

где смысл чисел t_k, $k=1,2,\dots$, и функций $\bar{u}_{1,j}(t)$, $j=1,2,3$, ясен из предыдущего пункта, а величины t_k' , $k=1,2,\dots$, будут сейчас определены. На отрезке $[0,t_1]$ преследуемый объект с максимальной скоростью уменьшает угол между векторами $-\dot{\bar{r}}_1(t), \dot{\bar{r}}_2(t)$, а t_1 -первый момент, когда направления этих векторов совпадают. Поскольку

$$t_1 < \frac{\measuredangle -\dot{\bar{r}}_1(0), \dot{\bar{r}}_2(0)}{\omega_1-\omega_2},$$

то из /0.9/ видно, что первоначальное расстояние $r(0)$ между объектами к моменту t_1 , уменьшится не больше, чем на величину второго слагаемого в /0.9/, и, следовательно,

$$r(t_1) \geq d_0. \qquad /2.1'/$$

Далее, на отрезке времени $[t_1, t_1']$ стратегия $\bar{f}_1^*$ сохраняет совпадение направлений векторов $-\dot{\bar{r}}_1(t)$, $\dot{\bar{r}}_2(t)$. Момент t_1' - первый, когда наступает равенство

$$r(t_1') = d_0. \qquad /2.2/$$

В этот момент /см. рис. 4/ создаются условия, отличающиеся от/1.1/ лишь тем, что вместо вектора $\bar{r}\{-d_0, 0\} = \overline{OO^*}$ нужно будет взять вектор $\overline{O'O_2}$, что приведет к смещению любой траектории типа $\tilde{\bar{r}}(t)$, рассматриваемой на отрезке $[t_1', t_1' + t^{**}]$, вектором $\overline{O^*O_2}$. Ясно также, что точка O_2 может оказаться лишь в полуплоскости $x' \leq 0$ на окружности радиуса d_0 с центром в точке O', причем если O_2 лежит не ниже оси $O'X'$, $\bar{u}_{1,3}(t)$ определяется так же, как и в предыдущем пункте; если же O_2 лежит ниже оси $O'X'$, требование 3/ /предыдущего пункта/ следует заменить таким: $\bar{u}_{1,3}(t_1') = \bar{u}\{0, W_1\}$. Поскольку, далее,

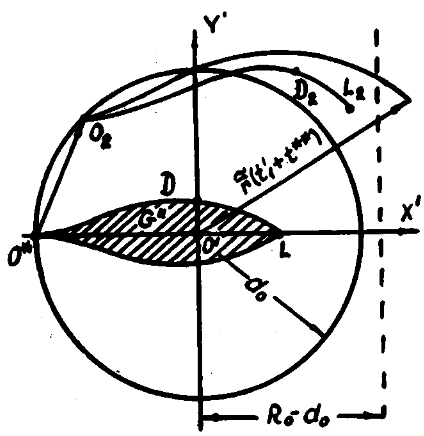

Рис. 4.

$$\frac{\pi}{2} \geq \measuredangle \overline{O^*O_2},\ O'X' \geq \frac{\pi}{4}, \qquad /2.3/$$

/ср. с /1.12/ /, можно утверждать, что ни кусок $\tilde{\bar{r}}(t)$, $t \in [t_1', t_1' + t^*]$ траектории, ни его продолжение до момента $(t_1' + t^{**})$ любым допустимым образом не пересекутся с множеством внутренних точек области G'', причем, в силу /2.3/ и утверждения в/, конец радиуса-вектора $\tilde{\tilde{\bar{r}}}(t_1' + t^{**})$ принадлежит полуплоскости H : $x' \geq R_0 - d_0$. Заметим, что $O'L < d_0$ /это легко вытекает из сравнения криволинейных треугольников $O^*O'C$, DKL на рис. 3, где $\smile OC^*$, $\smile ML$ - дуги окружностей одинакового радиуса R_0/; но тогда, в силу /1.15/, приходим к выводу что полуплоскость H и множество G'' не пересекаются. Применение стратегии $\bar{f}_1^*$ на отрезке $[t_1', t_1' + t^{**}]$ приводит, как ясно из сказанного выше, к тому, что в момент $(t_1' + t^{**})$ снова выполняется требование /0.9/ и преследуемый объект может снова повторить рассмотренный цикл действий; /в /2.1/ фигурной пунктирной скобкой выделена группа специальных управлений, которая будет, вообще говоря, периодически повторяться/.

Из рассмотренного вытекает справедливость первого утверждения теоремы.

Стратегия $\bar{f}_2^*$ строится следующим образом. Пусть

$$\bar{u}_{2,1}(t), \quad t_0 \leq t \leq t_0', \qquad /2.4/$$

-управление преследующего объекта, определяемое следующими условиями:

1/'' $\bar{u}_{2,1}(t)$ -непрерывная вектор-функция;

2/'' $u_{2,1}(t) = W_2$;

3/$''(\bar r(t_0), \bar u_{2,1}(t_0)) < 0$ /где в случае равенства берется любое из двух возможных направлений $\bar u_{2,1}(t_0)$ /.

Тогда, как нетрудно показать, можно положить

$$\bar f_2^* = \begin{cases} 0, & t\in[0,\tau], \\ \bar u_{2,1}(t), & t\in[\tau,\tau_1''], \\ 0, & t\in[\tau_1'', t_1'], \\ \bar u_{2,3}(t), & t\in[t_1', t_1'+t^*], \\ 0, & t\in[t_1'+t^*, t'+t^*+\tau], \\ \dots\dots\dots & \end{cases} \qquad /2.5/$$

где τ достаточно велико, τ_1'' -первый момент, когда направления векторов $-\bar r(\tau_1'')$, $\dot{\bar r}_2(\tau_1'')$ совпадут; t_1' -первый момент наступления равенства /2.2/, а $\bar u_{2,3}(t)$ -ранее описанное управление; фигурная пунктирная скобка в /2.5/ выделяет группу специальных управлений преследующего объекта /легко убедиться в том, что эти управления допустимы/, которая будет периодически повторяться. При этом предполагается, как указывалось в условии теоремы, что стратегия $\bar f_1^*$ преследуемого объекта фиксирована. Опишем кратко поведение преследующего объекта, соответствующее стратегии $\bar f_2^*$. На отрезке времени $[0,\tau]$ объект $\bar r_2$, прямолинейно перемещаясь, уходит достаточно далеко от преследуемого объекта /т.е. от $0'$ /. На отрезке $[\tau, \tau_1'']$ преследующий объект поворачивает вектор-скорость $\dot{\bar r}_2(t)$ с максимальной угловой скоростью до совпадения его направления /в момент τ_1'' / с направлением вектора $-\bar r(\tau_1'')$. Поскольку τ достаточно велико и действует стратегия $\bar f_1^*$, то, в силу /0.7/, /0.8/, можно считать, что в момент τ_1'' совпадают и направления векторов $-\dot{\bar r}_2(\tau_1'')$, $\dot{\bar r}_1(\tau_1'')$. На отрезке времени $[\tau_1'', t_1']$ объекты сближаются до расстояния d_0 /см./2.2//. Далее на отрезке $[t_1', t_1'+t^*]$ действует пара управлений $\bar u_{i,3}(t)$, $i=1,2$, вследствие чего в момент времени $t=(t_1'+t^*)$ расстояние $r(t)$ между объектами проходит через минимум, равный ρ^*. Затем описанная только что последовательность действий преследующего объекта периодически повторяется. Второе утверждение теоремы доказано.

Справедливость третьего утверждения теоремы вытекает из смысла величин t^*, t^{**} /см. /0.10/, /0.14// и из того, что они зависят лишь от параметров V_i, ω_i.

Относительно дискриминации преследующего объекта и потока информации, необходимого для построения стратегии f_1^*, справедливы те же замечания, которые сделаны к теореме C работы [2] /в конце введения/.

Поступила в редакцию 24.3.1969г

Л и т е р а т у р а

1. Р.Айзекс, Дифференциальные игры, Москва, 1967.

2. В.Н.Лагунов, Об условиях существования преследующего управления, Дискретный анализ, Новосибирск, 1967, II.