Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1979 г., выпуск 19.
УДК 519.854.3

О ПОСТРОЕНИИ ПРАВИЛЬНЫХ ОТСЕЧЕНИЙ В ВЫПУКЛОМ ЦЕЛОЧИСЛЕННОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

А.В.Потемкина (Горький)

В ряде алгоритмов для решения задач целочисленного линейного программирования в качестве начального приближения используется оптимальная точка соответствующей непрерывной задачи [1, 4]. В случае выпуклых целочисленных задач реализация такого подхода связана с вопросом о построении системы правильных отсечений крайней точки выпуклого замкнутого множества, направляющие векторы которых образуют базис исходного пространства. В данной работе устанавливается возможность построения указанной системы (теорема 1).

1. Пусть $\mathcal{D}$ – поле вещественных чисел; $[\alpha]$ – наибольшее целое число, не превосходящее $\alpha\in\mathcal{D}$; Z – кольцо целых чисел; $\mathcal{D}^m$ – m-мерное евклидово пространство над $\mathcal{D}$, Z^m – подмножество векторов из $\mathcal{D}^m$ с целочисленными компонентами; (b,u) – скалярное произведение векторов b и u из $\mathcal{D}^m$; l_i – вектор из $\mathcal{D}^m$, i-я компонента которого равна 1 $(i=1,2,\dots,m)$, а остальные – 0; S – замкнутое выпуклое множество в $\mathcal{D}^m$, содержащее крайнюю точку; $\dim S$ – линейная размерность множества S, $\operatorname{int} S$ – внутренность множества S; для крайней точки v множества S через K_v обозначим множество $\{b\in\mathcal{D}^m / (b,u)\leq (b,v)$ для всех $u\in S\}$.

Определение. Неравенство $(c,u)\leq\gamma$ назовем правильным отсечением точки v от множества $S\cap Z^m$, если

$$(c,v)>\gamma, \qquad /1/$$

$$(c,u)\leq\gamma \text{ для всех } u\in S\cap Z^m. \qquad /2/$$

Сформулируем и докажем сначала ряд вспомогательных утверждений. Для $x\in\mathcal{D}^m$ и $\delta\in\mathcal{D}$ обозначим через $S_x(\delta)$ множество $\{u\in S/(x,u)=\delta\}$, а через $TS_x(\delta)$ – множество $\{u\in S/(x,u)\leq\delta\}$. Из теоремы Страшевича [2, с.184] следуют

Лемма 1. Если v – крайняя точка множества S, то существует такой базис $c_1,\dots,c_m$ в $\mathcal{D}^m$, что

$$\sup_{u\in S}(c_i,u)<\infty \qquad (i=1,\dots,m), \qquad /3/$$

множество $S_{c_i}((c_i,v))$ ограничено $(i=1,\dots,m)$. /4/

Лемма 2 (ср.[2, с.81]). Если для некоторого $\delta\in\mathcal{D}$ множество $S_x(\delta)$ непусто и ограничено, то для любого $\lambda\in\mathcal{D}$ множество $S_x(\lambda)$ ограничено.

Л е м м а 3. Если для некоторого $\delta\in\mathcal{D}$ множество $S_x(\delta)$ непусто и ограничено, то для любых α_1 и α_2 из $\mathcal{D}$ множество $\bigcup\limits_{\lambda\in[\alpha_1;\alpha_2]} S_x(\lambda)$ ограничено.

Доказательство следует из леммы 2 и теоремы Тихонова [3, с. I6].

Л е м м а 4. Если для некоторого $\delta\in\mathcal{D}$ имеет место $S_x(\delta)\neq\varnothing$ и $\sup\limits_{u\in S_x(\delta)}(a,u)<\infty$, то для любого $\lambda\in\mathcal{D}$ из условия $S_x(\lambda)\neq\varnothing$ следует, что $\sup\limits_{u\in S_x(\lambda)}(a,u)<\infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, т.е. что существует такая последовательность точек $v_1, v_2,\dots,v_n,\dots$ из $S_x(\lambda)$, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a,v_n)=\infty$. Так как $S_x(\delta)\neq\varnothing$ и $\sup\limits_{u\in S_x(\delta)}(a,u)<\infty$, то существует такая точка $w\in S_x(\delta)$, что $(a,w)=\sup\limits_{u\in S_x(\delta)}(a,u)$. Так как $\lim\limits_{n\to\infty}(a,v_n)=\infty$, то найдется такой номер N, что при $n>N$ имеет место $(a,v_n)>|(a,w)|+1$.

При $n>N$ рассмотрим последовательность точек

$$t_n=\frac{|(a,w)|+1}{(a,v_n)}v_n+\frac{(a,v_n)-|(a,w)|-1}{(a,v_n)}w .$$

Очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty}t_n=w$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(a,t_n)=|(a,w)|+1+(a,w)\neq(a,w)$. Это противоречит непрерывности функции (a,u). Лемма 4 доказана.

Л е м м а 5. Если а) S - выпуклое замкнутое множество, $\sup\limits_{u\in S_x(\delta)}(y,u)=\mu<\infty$ и б) существует такая точка $w\in S$, что $(x,w)\geq\delta$, то для всех $u\in TS_x(\delta)$ и всех $\varrho>\max\{0;(y,w)-\mu\}$ верно неравенство

$$((x,w)-\delta)(y,u)+(\mu+\varrho-(y,w))(x,u)\leqslant$$
$$\leqslant((x,w)-\delta)((y,w)-\varrho)+(\mu+\varrho-(y,w))(x,w). \qquad /5/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим сначала такие $u\in S$, чтобы $(x,u)=\delta$. Тогда $((x,w)-\delta)(y,u)+(\mu+\varrho-(y,w))(x,u)\leqslant$
$\leqslant((x,w)-\delta)\mu+(\mu+\varrho-(y,w))\delta=(x,w)\mu-\delta\mu+\mu\delta+\varrho\delta-(y,w)\delta+$
$+\varrho(x,w)-\varrho(x,w)-(y,w)(x,w)+(y,w)(x,w)=$
$=(\mu+\varrho-(y,w))(x,w)+((x,w)-\delta)((y,w)-\varrho)$.

Пусть теперь $u\in S$ и $(x,u)<\delta$. Предположим, что нашлась такая точка $v\in S$, что $(x,v)<\delta$, а неравенство /5/ не выполнено. Положим $\lambda=\dfrac{(x,w)-\delta}{(x,w-v)}$ и $t=(1-\lambda)w+\lambda v$. Нетрудно проверить, что $0<\lambda<1$, $(x,t)=\delta$ и t не удовлетворяет неравенству /5/. Так как $(x,t)=\delta$, то по доказанному ранее t должно удовлетворять неравенству /5/. Лемма 5 доказана.

Л е м м а 6. а) Если v - крайняя точка множества S и для некоторых c и γ выполнены /1/ и /2/, то существует такой базис $c_1, c_2, \ldots, c_m$ и такие числа $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m$, что для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ вектор c_i и число γ_i удовлетворяют условиям /1/ и /2/.

б) Если, кроме того, $\sup\limits_{u \in S}(c, u) < \infty$, то $c_1, \ldots, c_m$ удовлетворяют еще и условиям /3/ и /4/.

Доказательство. Выберем базис $a_1, \ldots, a_m$, удовлетворяющий условиям /3/ и /4/. Пусть $c = \sum\limits_{j=1}^{m} \varepsilon_j a_j$ - разложение вектора c по этому базису. Для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ положим $\mu_i = \sup\limits_{u \in S_{a_i}(\gamma)} (a_i, u)$, выберем η_i так, чтобы $\eta_i > \max\{0; (a_i, v) - \mu_i\}$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} \varepsilon_j (\mu_j + \eta_j - (a_j, v)) \neq \gamma - (c, v)$, и обозначим $c_i = ((c, v) - \gamma) a_i + (\mu_i + \eta_i - (a_i, v)) c$,

$$\gamma_i = ((c, v) - \gamma)((a_i, v) - \eta_i) + (\mu_i + \eta_i - (a_i, v))(c, v).$$

Докажем, что $c_1, \ldots, c_m$ - базис в $\mathcal{D}^m$. Нетрудно проверить, что элементы t_{ij} матрицы T перехода от системы векторов $a_1, \ldots, a_m$ к системе векторов $c_1, \ldots, c_m$ суть

$$t_{ij} = \begin{cases} \varepsilon_j (\mu_i + \eta_i - (a_i, v)), & i \neq j, \\ \varepsilon_i (\mu_i + \eta_i - (a_i, v)) + (c, v) - \gamma, & i = j, \end{cases}$$

и что $\det T \neq 0$. Так как $a_1, \ldots, a_m$ - базис в $\mathcal{D}^m$, то $c_1, \ldots, c_m$ - базис в $\mathcal{D}^m$. Очевидно, что $(c_i, v) > \gamma_i$ для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$. Так как $S \cap Z^m \subset TS_c(\gamma)$, то для доказательства утверждения а) леммы достаточно показать, что $(c_i, u) \leqslant \gamma_i$ для всех $u \in TS_c(\gamma)$ $(i = 1, \ldots, m)$. Последнее следует из леммы 5 при $y = a_i$, $\mu = \mu_i$, $\eta = \eta_i$ и $\delta = \gamma$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Доказательство утверждения б). Очевидно, что для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$

$$\sup_{u \in S}(c_i, u) = ((c, v) - \gamma) \sup_{u \in S}(a_i, u) + \sup_{u \in S}(c, u)(\mu_i + \eta_i - (a_i, v)),$$

Докажем ограниченность множества $S_{c_i}((c_i, v))$ $(i = 1, \ldots, m)$. Действительно, для любого $i \in \{1, \ldots, m\}$ и всех $u \in S_{c_i}((c_i, v))$ верно равенство

$$(a_i, u) = (a_i, v) + \frac{\mu_i + \eta_i - (a_i, v)}{(c, v) - \gamma}((c, v) - (c, u)). \qquad /6/$$

Из /6/ следует, что для каждого $i \in \{1, \ldots, m\}$ и любого $u \in S_{c_i}((c_i, v)) \cap S_c(\gamma)$ верно равенство $(a_i, u) = \mu_i + \eta_i$. Но это невозможно, так как $\eta_i > 0$, а $\mu_i = \sup\limits_{u \in S_c(\gamma)} (a_i, u)$ $(i = 1, \ldots, m)$.

Следовательно, $S_{c_i}((c_i, v)) \cap S_c(\gamma) = \varnothing$ $(i = 1, \ldots, m)$. Отсюда и из выпуклости множества S следует, что $S_{c_i}((c_i, v)) \cap S_c(\lambda) = \varnothing$ для всех $\lambda \leqslant \gamma$ и $i \in \{1, \ldots, m\}$. Следовательно, $S_{c_i}((c_i, v)) \subset \bigcup\limits_{\lambda \geqslant \gamma} S_c(\lambda)$, а поэтому для всех $i\in\{1,2,\dots,m\}$ и всех $u\in S_{c_i}((c_i,v))$ верно неравенство

$$(a_i,v)-\frac{\mu_i+l_i-(a_i,v)}{(c,v)-\gamma}(\sup_{u\in S}(c,u)-(c,v))\leqslant(a_i,v)\leqslant\mu_i+l_i. \qquad /7/$$

Из /7/, ограниченности множества $S_{a_i}((a_i,v))$ $(i=1,\dots,m)$ и лемм 2-4 вытекает ограниченность множества $S_{c_i}((c_i,v))$ $(i=1,\dots,m)$.

Следствие. Если выполнены посылки пункта б) леммы 6, то существует такой базис $d_1,\dots,d_m$ в Z^m и такие целые числа $\delta_1,\dots,\delta_m$, что выполнены условия /I/ - /4/.

Действительно, пусть $c_1,\dots,c_m$ получены по лемме 6. Положим $d_i=\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ji}c_j$, где $\lambda_{ji}\geqslant 0$ $(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,m)$, определитель матрицы с элементами λ_{ji} не равен 0 и $d_i\in Z^m$ $(i=1,\dots,m)$. Возможность такого выбора очевидна. Положим $\delta_i=[\sum_{j=1}^{m}\lambda_{ji}\gamma_j]$ $(i=1,\dots,m)$. Нетрудно проверить теперь, что векторы $d_1,\dots,d_m$ и числа $\delta_1,\dots,\delta_m$ удовлетворяют условиям /I/ - /4/.

Лемма 7. Пусть

а) v - крайняя точка множества S, $b\neq 0$, $b\in K_v$;

б) $c\in Z^m$, $\tilde\gamma\in Z$ и $(c,u)\leqslant\tilde\gamma$ - правильное отсечение точки v от множества $S_b((b,v))\cap Z^m$;

в) $\sup\limits_{u\in S_b((b,v))}(c,u)<\infty$ и множество $S_b((b,v))\cap S_c((c,v))$ ограничено, тогда существуют такие $d\in\mathcal{D}^m$ и $\delta\in\mathcal{D}$, что $(d,u)\leqslant\delta$ - правильное отсечение точки v от множества $S\cap Z^m$ и $\sup\limits_{u\in S}(d,u)<\infty$.

Доказательство. Очевидно, достаточно рассмотреть лишь случай, когда $S\neq S_b((b,v))$. В этом случае существует такая точка $y\in S$, что $(b,y)<(b,v)$. Если $\tilde\gamma\geqslant(c,v)-1$, то положим $\gamma=\tilde\gamma$, если же $\tilde\gamma<(c,v)-1$, то положим $\gamma=[(c,v)]$ при $(c,v)\notin Z$ и $\gamma=(c,v)-1$ при $(c,v)\in Z$. Пусть $0<\beta<1$. Рассмотрим множество $P=\{u\in S\,|\,(b,u)\geqslant(b,y),(c,u)\geqslant\gamma+\beta\}$. Из посылок лемм 7 и 2-4 следует ограниченность множества P. Так как $(c,u)\leqslant\tilde\gamma$ - правильное отсечение точки v от множества $S_b((b,v))\cap Z^m$, то для любой точки $x\in P\cap Z^m$ выполнено неравенство $(b,x)<(b,v)$. Если для некоторого $\lambda>0$ имеет место $\lambda b\in Z^m$, то для всех $x\in P\cap Z^m$ выполнение неравенства $(\lambda b,x)\leqslant(\lambda b,v)-1=\lambda\alpha$ очевидно. Пусть теперь $\nu b\notin Z^m$ для всех $\nu>0$. Построим многогранник L, содержащий все точки множества $P\cap Z^m$. Положим

$$\mu_m=\sup_{\lambda\in[(b,y);(b,v)]}\ \sup_{u\in P_b(\lambda)}(c,u),\quad \nu_m=\sup_{u\in P_b((b,v))}(c,u),\quad l_m>0,$$

и получим $c_m = ((b,v)-(b,y))c + (\mu_m - \nu_m + q_m)b$, $\gamma_m = ((b,v)-(b,y))\mu_m + (\mu_m + q_m - \nu_m)(b,v)$. Очевидно, что $(c_m,u) \leqslant \gamma_m$ для всех $u \in P \cap Z^m$. Если $m=2$, то положим $L = \{u \in \mathcal{D}^m / (c_m,u) \leqslant \gamma_m,\ (c,u) \geqslant \gamma+1,\ (b,u) \leqslant (b,v),\ (b,u) \geqslant (b,y)\}$.
Если $m \geqslant 3$, то рассмотрим линейнозависимую систему векторов $c_m, c, l_1, \ldots, l_m$ и найдем такие числа k и r из множества $\{1,\ldots,m\}$, чтобы система векторов $c_m, c, l_1, \ldots, l_{k-1}, l_{k+1}, \ldots, l_{r-1}, l_{r+1}, \ldots, l_m$ являлась линейно-независимой. Положим

$$f_i = \begin{cases} l_i & \text{,если } i \in \{k-1,\ldots,1\}; \\ l_{i+1} & \text{,если } i \in \{k,\ldots,r-2\}; \\ l_{i+2} & \text{,если } i \in \{r-1,\ldots,m-2\}, \end{cases}$$

и $f_m = -\sum_{i=1}^{m-2} f_i$. Пусть w - крайняя точка множества $P_c(\gamma+\beta) \cap P_b((b,v))$. Положив $\mu_i = \sup_{u \in P_c(\gamma+1)} (f_i,u)$ и взяв $q_i > \max\{0; (f_i,w)-\mu_i\}$ $(i=1,\ldots,m)$, получим $d_i = ((-c,w)-\gamma-1)f_i + (\mu_i + q_i - (f_i,w))(-c)$ и $\delta_i = ((-c,w)-\gamma-1)((f_i,w)-q_i) + (\mu_i + q_i - (f_i,w))(-\gamma-1)$ для каждого $i \in \{1,\ldots,m\}$.

Рассмотрим многогранник

$$L = \{u \in \mathcal{D}^m / (b,u) \leqslant (b,v),\ (-b,u) \leqslant (-b,y),\ (d_i,u) \leqslant \delta_i\ (i=1,\ldots,m)\}.$$

Легко видеть (см.лемму 6), что $P \cap Z^m \subseteq L \cap Z^m$ и $b \in \operatorname{int} K(d_1,\ldots,d_m)$, где $K(d_1,\ldots,d_m) = \{g \in \mathcal{D}^m / g = \sum_{i=1}^m \lambda_i d_i,\ \lambda_i \geqslant 0\ (i=1,\ldots,m)\}$.

С помощью методов целочисленного линейного программирования проводим отсечения, начиная с вершины, принадлежащей гиперплоскости $(b,u)=(b,v)$, до тех пор, пока максимум линейной формы (b,u) на полученном множестве не станет меньше (b,v). Положим α равным полученному максимуму.

Теперь строим правильное отсечение точки v от множества $S \cap Z^m$. Возьмем $\mu = \{\sup_{u \in S_b(\alpha)} (c,u); \gamma\}$, $d = (\mu-\gamma)b + c((b,v)-\alpha)$, $\delta = (\mu-\gamma)(b,v) + ((b,v)-\alpha)\gamma$. Легко видеть, что $(d,v) > \delta$. Так как $S \cap Z^m \subseteq TS_c(\gamma) \cup TS_b(\alpha)$, то, по лемме 5, $(d,u) \leqslant \delta$ для всех $u \in S \cap Z^m$, а, следовательно, $(d,u) \leqslant \delta$ - правильное отсечение точки v от множества $S \cap Z^m$. Отсюда и из ограниченности множества $\{u \in S / (b,u) \geqslant \alpha,\ (c,u) \geqslant \gamma\}$ следует, что $\sup_{u \in S} (d,u) < \infty$.

Лемма 7 доказана.

Т е о р е м а I. Если v - крайняя точка замкнутого выпуклого множества S из $\mathcal{D}^m$, $v \notin Z^m$, то можно построить такой базис $c_1,\ldots,c_m$ в Z^m и такие целые числа $\gamma_1,\ldots,\gamma_m$, что $(c_i,u) \leqslant \gamma_i$ $(i=1,\ldots,m)$ - правильное отсечение точки v от множества $S \cap Z^m$ и выполнены условия /3/, /4/.

Доказательство проведем индукцией по $k = \dim S$. Если $k = 0$, то утверждения теоремы очевидны. Пусть теорема верна для $k = m-1$, докажем ее справедливость при $k = m$. Из [2,с.116] следует, что существует такой вектор $b \neq 0$, что $b \in K_v$ и $\dim S_b((b,v)) \leq m-1$. Очевидно, v - крайняя точка множества $S_b((b,v))$. Из предположения индукции следует, что существуют такой базис $\tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_m$ в Z^m и целые числа $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_m$, что выполнены утверждения теоремы для множества $S_b((b,v))$. Из леммы 7 и следствия вытекает существование требуемых c_i и γ_i $(i = 1, \dots, m)$. Теорема доказана.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В.Н.Шевченко за постоянное внимание к работе.

Поступила в ред.-изд.отдел
25 ноября 1977 г.

Литература

1. Корбут А.А.,Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование.-М.:Наука, 1969.- 368 с.

2. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ.-М.: Мир, 1973,-350 с.

3. Иосида К. Функциональный анализ.-М.: Мир.1967.-624 с.

4. Шевченко В.Н. Об одной модификации третьего алгоритма Гомори.-Тез.докл. III Всесоюз. конф. по теоретической кибернетике. Новосибирск, 1974, с.97-99.