Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1979 г., Выпуск 18.
УДК 519.3

КРАЙНИЕ ТОЧКИ ТРАЕКТОРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

С.И.Суслов (Новосибирск)

Доказывается, что крайние точки замыкания множества траекторий линейной управляемой системы являются ее траекториями.

Работа состоит из 2 частей. В первой - определяются основные понятия и доказывается основная теорема; во второй - полученный результат применяется для доказательства одной теоремы существования оптимального управления.

Обозначения в основном взяты из работы Бридгланда [1]. Для X -линейного топологического пространства и его подмножества A обозначим через clA, coA, exA соответственно замыкание, выпуклую оболочку и множество крайних точек, через 2^X - множество всех непустых подмножеств X. Как обычно, R^n - n-мерное евклидово пространство с нормой $|\cdot|$, $R=R^1$ - числовая прямая и $\emptyset$ - пустое множество.

1°. Определение 1. Пусть $(I,\mathcal{A})$ - компактный отрезок положительной полуоси $R^+=\{t\in R: t\geqslant 0\}$ с лебеговской σ-алгеброй подмножеств. Многозначной функцией $F: I\to R^n$ будем называть отображение из I в 2^{R^n}. Многозначную функцию $F: I\to R^n$ будем называть измеримой, если для любого открытого $A\subset R^n$ имеет место $\{t\in I: F(t)\cap A\neq\emptyset\}\in\mathcal{A}$. Многозначную функцию $F: I\to R^n$ будем называть интегрально-ограниченной, если существует числовая суммируемая на I функция h такая, что если $(t,x)\in(t,F(t))$, то $|x|\leqslant h(t)$.

Определение 2 [1]. Пусть $F: I\to R^n$ - многозначная функция, $\mathcal{F}(F)$ - совокупность суммируемых функций $f: I\to R^n$ таких, что $f(t)\in F(t)$ при $t\in I$. Траекторным интегралом многозначной функции F на I будем называть совокупность $\mathcal{T}(F)$ абсолютно непрерывных функций $\varphi: I\to R^n$, имеющих производные в $\mathcal{F}(F)$ и равных нулю в левом конце отрезка I.

Лемма 1 [2]. Пусть отображение $g: I\times R^n\to R^k$ удовлетворяет условию Каратеодори, $F: I\to R^n$, $G: I\to R^k$ - измеримые многозначные отображения с замкнутыми значениями. Тогда многозначное отображение $H: I\to R^n$, $H(t)=\{x\in F(t): g(t,x)\in G(t)\}$, измеримо.

Лемма 2. Пусть $F: I\to R^n$ - измеримая многозначная функция с выпуклыми замкнутыми значениями и $f\in\mathcal{F}(F)$. Тогда для выполнения $f \in ex\,\mathcal{F}(F)$ необходимо и достаточно, чтобы $f(t) \in$ $\in ex\,F(t)$ при $t \in I$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность очевидна.

Необходимость. Рассмотрим многозначную функцию $H: I \to R^n$, $H(t) = \{x \in F(t): 2f(t) - x \in F(t)\}$. По лемме I эта функция измерима. Следовательно, по теореме 5.6 [2] найдется $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ – счетное подмножество $\mathcal{F}(H)$ такое, что $H(t) = cl\{f_m(t)\}_{m=1}^{\infty}$ при $t \in I$. Предположим, что для некоторого номера m_0 функция $f_{m_0} \neq f$. Тогда, по определению H, имеем

$$f = 1/2 f_{m_0} + 1/2(2f - f_{m_0}),$$

что противоречит условию $f \in ex\,\mathcal{F}(F)$. Следовательно, $H(t) = \{f(t)\}$ при $t \in I$. Но это означает, что $f(t) \in ex\,F(t)$ при $t \in I$.

Т е о р е м а I. Пусть $F: I \to R^n$ – измеримая интегрально-ограниченная многозначная функция с компактными значениями. Тогда $ex\,cl\,\mathcal{T}(F) \subset \mathcal{T}(F)$, где замыкание берется в топологии равномерной сходимости на I.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\varphi \in ex\,cl\,\mathcal{T}(F)$. В силу следствия 5.I. из [I] $cl\,\mathcal{T}(F) = \mathcal{T}(coF)$, где coF – многозначная функция такая, что $(coF)(t) = co\,F(t)$ при $t \in I$. Следовательно, $\varphi \in ex\,\mathcal{T}(coF)$, и найдется $f \in ex\,\mathcal{F}(coF)$ такая, что $\varphi(t) = \int_{[0,t]\cap I} f$. Так как для любого $t \in I$ имеет место $ex\,co\,F(t) \subset F(t)$, то, по лемме 2, $f \in \mathcal{F}(F)$, что означает $\varphi \in \mathcal{T}(F)$.

2^0. Рассмотрим линейную систему на числовом отрезке $I = [0,T]$:

$$\dot{x}(t) \in A(t)x(t) + \mathcal{U}(t), \quad x(0) = 0, \qquad /1/$$

где элементы $(n \times n)$-матричной функции A суммируемы на I, $\mathcal{U}: I \to R^n$ – измеримая, интегрально-ограниченная многозначная функция с компактными значениями. Траекторией системы /I/ будем называть абсолютно непрерывную функцию $x: I \to R^n$ такую, что при некоторой измеримой функции $u: I \to R^n$, $u(t) \in \mathcal{U}(t)$ при $t \in I$ верно соотношение

$$x(0) = 0, \quad \dot{x}(t) = A(t)x(t) + u(t)$$

почти всюду на I.

Пусть $X(t)$ удовлетворяет соотношению

$$X(0) = E, \quad \dot{X}(t) = A(t)X(t)$$

почти всюду на I, где E – единичная матрица. Тогда преобразованием $x = X(t)y$ система /I/ приводится к виду

$$\dot{y}(t) \in X^{-1}(t)\mathcal{U}(t) = \mathcal{W}(t), \quad y(0) = 0, \qquad /2/$$

причем $\mathcal{W}$ – тоже интегрально-ограниченная, измеримая многозначная функция с компактными значениями.

Множество траекторий системы /2/ очевидно совпадает с $\mathcal{T}(\mathcal{W})$, а множество траекторий системы /I/ получается из $\mathcal{T}(\mathcal{W})$ применением взаимно-однозначного линейного непрерывного преобразования $X(\cdot)$.

Таким образом, получаем

Следствие I. Крайние точки замыкания множества траекторий /I/ являются ее траекториями.

Следствие 2. Непрерывная линейная функция достигает экстремума на множестве траекторий системы /I/.

Доказательство следует из того, что замыкание множества траекторий системы /I/ является компактом [3] .

Следствие 3. Квазивыпуклая непрерывная функция достигает максимума на множестве траекторий системы /I/.

Поступила в ред.-изд.отдел
I июня 1977 г.

Литература

I. Bridgland T.F. Trajectory integrals of set-valued functions. - Pacific J. Math., 197o, v. 33, p. 43-68.

2. Himmelberg C.J. Measurable relations.- Fundam. Math., 1975,,v. 87,p. 53-72.

3.Иоффе А.Д..,Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. -М.:Наука, I974. - 479 с.