Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1979 г., выпуск 18.
УДК 519.3:62-50

МЕТОД ПОЛНЫХ СИСТЕМ В ЗАДАЧАХ АГРЕГИРОВАНИЯ

В.И.Ёлкин, Ю.Н.Павловский, Т.Г.Смирнова (г.Москва)

Введение

При изучении моделей сложных управляемых процессов бывает полезно наряду с исходной рассматривать "агрегированную модель", т.е. такую, в которой фигурирует меньшее число переменных, чем в исходной, причем все они являются функциями исходных переменных, а сама агрегированная модель описывает тот же процесс, что и исходная модель, и в некотором смысле является ее следствием. Именно таким образом ставится задача об агрегировании управляемых динамических систем в [1-3], где вводится строгое понятие агрегирования, и указываются необходимые и достаточные условия агрегирования, пригодные для практического анализа этого вопроса.

Теория, развиваемая в [1-3], основана на методах группового анализа: с динамической системой связывается группа преобразований, обладающая по отношению к этой системе некоторым свойством инвариантности. Подходящим образом подобранная группа является удобным инструментом для изучения способности динамической системы к агрегированию.

В настоящей работе приводятся некоторые результаты, полученные при дальнейшем изучении агрегирования динамических систем. Оказалось, что значительную часть результатов, касающихся агрегирования динамических систем, полученных в [2,3] исследованием так называемой группы G в некотором смысле "допускаемой" динамической системой, можно получить без непосредственного использования групповой терминологии, а с помощью лишь теории полных систем операторов. Выяснилось, далее, что имеется глубокая взаимосвязь между агрегированием недифференциальных моделей, где полные системы операторов являются естественным аппаратом агрегирования, и агрегированием динамических систем. Отсюда естественно назвать метод анализа вопроса об агрегировании "методом полных систем в задачах агрегирования". Суть его состоит в том, что при решении задачи агрегирования отыскиваются не сами агрегаты, т.е. функции исходных переменных, участвующие в агрегированной модели, а те полные системы операторов, корнями которых эти агрегаты являются. Отметим, что при изложении используются некоторые сведения из теории групп Ли [4,5].

§ I. Агрегирование управляемых систем

Рассмотрим систему функций

$$y^i = g^i(t^1,\dots,t^m, x^1,\dots,x^n, z^1,\dots,z^r),\quad i=1,2,\dots,q, \qquad /I.I/$$

достаточно гладких по совокупности переменных. Будем говорить, что система функций /I.I/ допускает агрегирование порядка $r-s$ по совокупности переменных z^α с агрегатами, зависящими от t^κ, z^α, если существуют функции, называемые агрегатами,

$$\vartheta^\beta = \varphi^\beta(t,z),\quad \beta=1,2,\dots,s<r, \qquad /I.2/$$

и функции $\bar g^i(t,x,\vartheta)$ такие, что

$$g^i(t,x,z) = \bar g^i(t,x,\varphi(t,z)),\quad i=1,2,\dots,q.$$

Очевидно, что сформулированная в таком виде задача об агрегировании сводится к известной задаче о существенных параметрах системы функций [5]. Отсюда следует, что необходимым и достаточным условием агрегирования порядка $r-s$ является существование полной системы операторов вида

$$A_\alpha = a_\alpha^\beta(t,z)\frac{\partial}{\partial z^\beta},\quad \alpha=1,2,\dots,r-s, \qquad /I.3/$$

такой, что

$$A_\alpha g^i = 0,\ \alpha=1,2,\dots,r-s;\quad i=1,2,\dots,q. \qquad /I.4/$$

В качестве агрегатов /I.2/ можно взять полный набор функционально независимых корней системы /I.3/. Наибольший порядок агрегирования и система /I.3/ определяются лишь с помощью конечного числа алгебраических операций и операций дифференцирования. Для определения агрегатов /I.2/ требуется нахождение корней полной системы /I.3/, т.е. интегрирование некоторой последовательности систем обыкновенных дифференциальных уравнений.

Пусть система функций

$$y^i = g^i(t, x^1,\dots,x^n, u^1,\dots,u^r),\quad i=1,2,\dots,q, \qquad /I.5/$$

определяет модель некоторого процесса. Причем считаем y^i фазовыми (эндогенными) переменными, x^j — неуправляемыми (экзогенными) факторами, влияющими на значения y^i, u^α - управлениями, t - временем. Если система /I.5/ допускает агрегирование по совокупности переменных u^α с агрегатами, зависящими от t, u^α, то будем говорить, что система /I.5/ допускает агрегирование по управлениям.

Рассмотрим управляемую динамическую систему

$$\frac{dy^i}{dt} = f^i(t, y^1,\dots,y^n, u^1,\dots,u^r),\quad i=1,2,\dots,n,\quad u\in\mathcal{U}\subset R^r. \qquad /I.6/$$

Здесь y^i - фазовые переменные, u^α - управления. Функции f^i предполагаются достаточное число раз непрерывно дифференцируемыми по t, y^i в некоторой области R^{n+1} и непрерывными по u^α.

Дадим определение агрегирования динамической системы. Система /I.6/ допускает агрегирование порядка $n-m$ по фазовым переменным и агрегирование порядка $r-s$ по управлениям, если существуют функции

$$z^k=I^k(t,y),\ k=1,2,\ldots,m<n;\ \operatorname{rank}\left\|\frac{\partial I^k}{\partial y^i}\right\|_{i=1,2,\ldots,n}^{k=1,2,\ldots,m}=m, \qquad /I.7/$$

$$v^\alpha=V^\alpha(t,u),\ \alpha=1,2,\ldots,s<r;\ \operatorname{rank}\left\|\frac{\partial V^\alpha}{\partial u^\beta}\right\|_{\beta=1,2,\ldots,r}^{\alpha=1,2,\ldots,s}=s, \qquad /I.8/$$

и функции $\varphi^k(t,z^1,\ldots,z^m,v^1,\ldots,v^s)$ такие, что в силу /I.6/-/I.8/ выполняются соотношения

$$\frac{dz^k}{dt}=\varphi^k(t,z^1,\ldots,z^m,v^1,\ldots,v^s),\quad k=1,2,\ldots,m. \qquad /I.9/$$

Это означает, что как только некоторые функции $\bar{y}^i(t)$, $\bar{u}^\beta(t)$ удовлетворяют /I.6/, то функции $\bar{z}^k=I^k(t,\bar{y}(t))$, $\bar{v}^\alpha=V^\alpha(t,\bar{u}(t))$ удовлетворяют /I.9/. Функции /I.7/ будем называть агрегатами фазовых переменных, функции /I.8/ - агрегатами управлений, а систему /I.9/ - агрегированной системой.

Для исследования вопроса об агрегировании,не ограничивая общности,можно считать u^α постоянными параметрами,что мы и будем делать в дальнейшем.Введем еще,опуская детали,понятия об агрегировании только по фазовым переменным и только по управлениям.

Система /I.6/ называется допускающей агрегирование порядка $n-m$ по фазовым переменным, если существуют функции /I.7/ такие, что из /I.6/ следует

$$\frac{dz^k}{dt}=\varphi^k(t,z^1,\ldots,z^m,u^1,\ldots,u^r),\quad k=1,2,\ldots,m. \qquad /I.10/$$

Система /I.6/ называется допускающей агрегирование по управлениям порядка $r-s$, если система функций $f^i(t,y,u)$, $i=1,2,\ldots,n$, допускает агрегирование порядка $r-s$ по управлениям. Очевидно, чтобы система /I.6/ допускала агрегирование порядка $n-m$ по фазовым переменным и агрегирование порядка $r-s$ по управлениям, необходимо и достаточно, чтобы она допускала такое агрегирование порядка $n-m$ по фазовым переменным, что агрегированная система /I.10/ допускает агрегирование порядка $r-s$ по управлениям.Таким образом, задачу об агрегировании динамической системы по фазовым переменным и управлениям можно решать в два этапа. Наибольшую трудность представляет агрегирование динамической системы по фазовым переменным. Задача об агрегировании по управлениям, как уже отмечалось, сводится к хорошо изученной задаче о существенных параметрах системы функций, т.е. к агрегированию конечных (недифференциальных) связей.

Оказывается, что задача об агрегировании системы /I.6/ по фазовым переменным также тесно связана с агрегированием систем функций. Установим эту связь. Пусть $c^i=\varphi^i(t,y^1,\dots,y^n,u^1,\dots,u^r)$, $i=1,2,\dots,n$, – полный набор функционально независимых интегралов системы /I.6/, которая рассматривается как система обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящая от параметров u^α.

Т е о р е м а I. Для того чтобы система /I.6/ допускала агрегирование порядка $n-m$ по фазовым переменным, необходимо и достаточно, чтобы нашлись функции

$$d^k=\Phi^k(\varphi^1,\dots,\varphi^n,u^1,\dots,u^r),\quad k=1,2,\dots,m, \qquad /I.11/$$

причем

$$\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial\Phi^k}{\partial\varphi^i}\right\|_{i=1,2,\dots,n}^{k=1,2,\dots,m}=m, \qquad /I.12/$$

такие, что функции $\tilde\Phi^k(t,y,u)=\Phi^k(\varphi(t,y,u),u)$ допускают агрегирование по совокупности переменных $y^1,\dots,y^n$ порядка $n-m$ с агрегатами, зависящими от t и y^i.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть /I.6/ допускает агрегирование порядка $n-m$ по фазовым переменным. Тогда существуют функции /I.7/ такие, что из /I.6/ вытекает /I.10/. Рассмотрим некоторый полный набор функционально независимых интегралов системы /I.10/

$$d^k=\bar\Phi^k(t,z,u),\quad k=1,2,\dots,m. \qquad /I.13/$$

Подставляя /I.7/ в /I.13/, получаем

$$d^k=\bar\Phi^k(t,I(t,y),u)=\tilde\Phi^k(t,y,u),\quad k=1,2,\dots,m.$$

По построению, функции $\tilde\Phi^k(t,y,u)$ допускают агрегирование порядка $n-m$ по $y^1,\dots,y^n$ с агрегатами $z^k=I^k(t,y)$, $k=1,2,\dots,m$. Покажем, что

$$\tilde\Phi^k(t,y,u)=\Phi^k(\varphi(t,y,u),u),\quad k=1,2,\dots,m.$$

В /I.6/ сделаем замену переменных

$$z^k=I^k(t,y),\ k=1,2,\dots,m;\quad z^j=I^j(t,y),\ j=m+1,m+2,\dots,n,$$

где $I^j(t,y)$, $j=m+1,m+2,\dots,n$, выбраны произвольно, но так, чтобы обеспечить невырожденность преобразования. В новых переменных /I.6/ примет вид

$$\frac{dz^k}{dt}=\varphi^k(t,z^1,\dots,z^n,u^1,\dots,u^r),\quad k=1,2,\dots,m, \qquad /I.14/$$

$$\frac{dz^j}{dt}=\varphi^j(t,z^1,\dots,z^n,u^1,\dots,u^r),\quad j=m+1,m+2,\dots,n.$$

Функции /I.13/ являются интегралами /I.14/. Следовательно, функ-

ции $\tilde{\Phi}^k(t,y,u)$, $k=1,2,\dots,m$, являются интегралами /I.6/ и поэтому функционально выражаются через φ^i и u^α, т.е.
$\overline{\Phi}^k(t,I,u)=\tilde{\Phi}^k(t,y,u)=\Phi^k(\varphi(t,y,u),u)$, $k=1,2,\dots,m$.

Докажем теперь, что имеет место /I.12/. Обозначим

$$A=\left\|\frac{\partial\tilde{\Phi}^k}{\partial y^i}\right\|^{k=1,2,\dots,m}_{i=1,2,\dots,n},\quad B=\left\|\frac{\partial\overline{\Phi}^k}{\partial I^e}\right\|^{k=1,2,\dots,m}_{e=1,2,\dots,m},$$

$$C=\left\|\frac{\partial I^e}{\partial y^i}\right\|^{e=1,2,\dots,m,}_{i=1,2,\dots,n,}\quad \mathcal{D}=\left\|\frac{\partial\Phi^k}{\partial\varphi^j}\right\|^{k=1,2,\dots,m}_{j=1,2,\dots,n},\quad E=\left\|\frac{\partial\varphi^j}{\partial y^i}\right\|^{j=1,2,\dots,n}_{i=1,2,\dots,n}.$$

Очевидно, $A=B\times C$, $A=\mathcal{D}\times E$. По построению, B и E - невырожденные квадратные матрицы, а в силу определения агрегирования $\operatorname{rank} C=m$. Поэтому

$$\operatorname{rank}\mathcal{D}=\operatorname{rank} B\times C\times E^{-1}=m.$$

<u>Достаточность.</u> Пусть существуют функции /I.II/, удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда найдутся функции

$$z^k=I^k(t,y),\quad k=1,2,\dots,m,$$

причем $\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial I^k}{\partial y^i}\right\|^{k=1,2,\dots,m}_{i=1,2,\dots,n}=m$, такие,

что

$$\Phi^k(\varphi,u)=\tilde{\Phi}^k(t,y,u)=\overline{\Phi}^k(t,I,u),\quad k=1,2,\dots,m.$$

Так как $\operatorname{rank}\mathcal{D}=m$, $\operatorname{rank}\left\|\frac{\partial I^k}{\partial y^i}\right\|^{k=1,2,\dots,m}_{i=1,2,\dots,n}=m$

и E - невырожденная матрица, то

$$\det\left\|\frac{\partial\overline{\Phi}^k}{\partial I^e}\right\|^{k=1,2,\dots,m}_{e=1,2,\dots,m}\neq 0. \qquad /I.15/$$

Функции $\Phi^k(\varphi,u)$ являются интегралами /I.6/, и поэтому

$$\frac{d\Phi^k}{dt}=\frac{\partial\overline{\Phi}^k}{\partial I^e}\frac{dI^e}{dt}+\frac{\partial\overline{\Phi}^k}{\partial t}=0. \qquad /I.16/$$

Учитывая /I.15/, получаем из /I.16/

$$\frac{dI^e}{dt}=\varphi^e(t,I^1,\dots,I^m,u^1,\dots,u^r),\quad e=1,2,\dots,m, \qquad /I.17/$$

что подтверждает агрегирование исходной системы. С помощью теоремы I доказывается следующая

Т е о р е м а 2. Для того чтобы /I.6/ допускала агрегирование порядка $n-m$ по фазовым переменным, необходимо и достаточно, чтобы нашлась такая полная система операторов вида

$$z_a=b^i_a(t,y)\frac{\partial}{\partial y_i},\quad a=1,2,\dots,n-m, \qquad /I.18/$$

что

$$(X_0, Z_a) = h_a^c(t, y, u) Z_c\,, \qquad /I.19/$$

где

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + f^i(t, y, u)\frac{\partial}{\partial y^i}\,. \qquad /I.20/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Необходимость. Пусть /I.6/ допускает агрегирование порядка $n-m$ по фазовым переменным. Тогда существуют функции /I.II/ со свойствами, указанными в теореме I. Так как $\Phi^k(t, y, u)$, $k=1,2,\ldots,m$, допускает агрегирование порядка $n-m$ по $y^1,\ldots,y^n$ с агрегатами, зависящими от t, y^i, то существует полная система вида /I.18/, для которой $\tilde{\Phi}^k(t, y, u)$, $k=1,2,\ldots,m$, являются ее полным набором независимых корней. Поскольку $\tilde{\Phi}^k$ являются в то же время интегралами /I.6/, то они являются также корнями оператора X_0. Рассмотрим теперь систему операторов

$$X_0, Z_1, \ldots, Z_{n-m}\,. \qquad /I.21/$$

Эта система полна, так как операторы ее линейно не связаны, и, кроме того, она имеет m функционально независимых корней. Соотношения /I.19/ представляют собой как раз условие полноты системы операторов /I.21/.

Достаточность. Пусть существует полная система вида /I.18/, обладающая свойством /I.19/. Это свойство означает, что система операторов /I.21/ полна. Значит, существует m функций $\tilde{\Phi}^k(t, y, u)$, $k=1,2,\ldots,m$, таких, что

$$X_0\tilde{\Phi}^k = 0, \quad k = 1,2,\ldots,m, \qquad /I.22/$$

$$Z_a\tilde{\Phi}^k = 0, \quad k=1,2,\ldots,m; \; a=1,2,\ldots,n-m. \qquad /I.23/$$

Из /I.22/ следует, что функции $\tilde{\Phi}^k$ являются интегралами /I.6/:

$$\tilde{\Phi}^k(t, y, u) = \Phi^k(\varphi^1,\ldots,\varphi^n, u^1,\ldots,u^r), \quad k=1,2,\ldots,m.$$

Из /I.23/ следует, что функции $\tilde{\Phi}^k(t, y, u)$ допускают агрегирование порядка $n-m$ по y^i с агрегатами вида $Z^k = I^k(t, y)$, $k=1,2,\ldots,m$:

$$\tilde{\Phi}^k(t, y, u) = \bar{\Phi}^k(t, I(t, y), u), \quad k=1,2,\ldots,m.$$

Соотношение $\operatorname{rank}\left\|\partial\Phi^k/\partial\varphi^i\right\|_{i=1,2,\ldots,n}^{k=1,2,\ldots,m} = m$ вытекает из равенства

$$\left\|\frac{\partial\Phi^k}{\partial\varphi^i}\right\| \times \left\|\frac{\partial\varphi^i}{\partial y^j}\right\| = \left\|\frac{\partial\tilde{\Phi}^k}{\partial y^j}\right\|\,.$$

Теорему 2 можно также доказать, не опираясь на теорему I. Приведем это доказательство.

Необходимость. Пусть /I.6/ допускает агрегирование порядка

$n-m$. Тогда существуют независимые функции $z^k=I^k(t,y)$, $k=1,2,\dots,m$, такие, что из /I.6/ вытекает /I.10/. Заметим, что для правых частей φ^k системы /I.10/ справедливы соотношения $\varphi^k = X_0 I^k$. По функциям $I^k(t,y)$, $k=1,2,\dots,m$, построим полную систему операторов вида /I.18/, для которой они являются полным набором функционально независимых корней.

Имеем

$$(X_0, Z_a) I^k = X_0 Z_a I^k - Z_a X_0 I^k = X_0 Z_a I^k - Z_a \varphi^k = 0,$$
$$k=1,2,\dots,m; \quad a=1,2,\dots,n-m.$$

Таким образом, функции I^k являются корнями операторов (X_0, Z_a). Свойство /I.19/ вытекает теперь из полноты системы /I.18/.

Достаточность. Пусть существует полная система вида /I.18/, обладающая свойством /I.19/. Система /I.18/ имеет m функционально независимых корней $z^k=I^k(t,y)$, $k=1,2,\dots,m$. Вычисляя полную производную по времени от функций z^k, в силу уравнений /I.6/ получим

$$\frac{dz^k}{dt} = X_0 I^k, \quad k=1,2,\dots,m.$$

Правые части этих уравнений вследствие того, что

$$Z_a X_0 I^k = X_0 Z_a I^k - (X_0, Z_a) I^k = X_0 Z_a I^k - h_a^c Z_c I^k = 0,$$
$$a=1,2,\dots,n-m; \quad k=1,2,\dots,m,$$

зависят лишь от $t, z^1,\dots,z^m, u^1,\dots,u^r$, откуда и следует факт агрегирования /I.6/ по фазовым переменным с порядком $n-m$.

§ 2. Примеры динамических систем, допускающих агрегирование

Прежде чем перейти к рассмотрению агрегирования частных динамических систем, представим условия агрегирования, выражаемые теоремой 2, в форме, более удобной для практического анализа. Заметим, что в условиях теоремы 2 система операторов /I.18/ определена с точностью до эквивалентной. Так как любая полная система эквивалентна некоторой якобиевой, то можно считать, что система /I.18/ якобиева. Пусть /I.6/ допускает агрегирование порядка $n-m$ с агрегатами $I^1(t,y),\dots,I^m(t,y)$ и неравный нулю минор матрицы

$$\left\| \frac{\partial I^k}{\partial y^i} \right\|_{i=1,2,\dots,n}^{k=1,2,\dots,m} \qquad /2.1/$$

образован последними m столбцами, т.е.

$$\left\| \frac{\partial I^k}{\partial y^i} \right\|_{i=p+1,p+2,\dots,n}^{k=1,2,\dots,m} \neq 0, \quad p=n-m. \qquad /2.2/$$

Тогда якобиева система, фигурирующая в теореме 2, представима в виде

$$Z_a = \frac{\partial}{\partial y^a} + b_a^l(t,y)\frac{\partial}{\partial y^l}, \quad a=1,\dots,p; \quad l=p+1,p+2,\dots,n. \qquad /2.3/$$

Запишем теперь /I.19/ в координатной форме, считая, что операторы Z_a в /I.19/ имеют вид /2.3/. Получим

$$X_o\delta_a^j - Z_a f^j = h_a^c\delta_c^j, \qquad /2.4/$$

$$X_o b_a^l - Z_a f^l = h_a^c b_c^l, \quad j,a,c=1,\dots,p; \quad l=p+1,p+2,\dots,n, \qquad /2.5/$$

здесь δ_a^j - символ Кронекера.

Из /2.4/ имеем

$$h_a^j = -Z_a f^j, \quad a,j=1,2,\dots,p. \qquad /2.6/$$

Подставляя /2.6/ в /2.5/, получаем

$$X_o b_a^l + b_c^l Z_a f^c - Z_a f^l = 0, \quad a,c=1,2,\dots,p; \quad l=p+1,p+2,\dots,n. \qquad /2.7/$$

Условие якобиевости системы операторов /2.3/ в координатной форме выглядит следующим образом:

$$Z_a b_c^l - Z_c b_a^l = 0, \quad a,c=1,2,\dots,p; \quad l=p+1,\dots,n. \qquad /2.8/$$

Соотношения /2.7/, /2.8/ являются системой дифференциальных уравнений относительно искомых функций $b_a^l(t,y)$:

$$\frac{\partial b_a^l}{\partial t} + f^j\frac{\partial b_a^l}{\partial y^j} + b_c^l\frac{\partial f^c}{\partial y^a} + b_c^l b_a^k\frac{\partial f^c}{\partial y^k} - \frac{\partial f^l}{\partial y^a} - b_a^k\frac{\partial f^l}{\partial y^k} = 0, \qquad /2.9/$$

$$\frac{\partial b_a^l}{\partial y^c} + b_c^k\frac{\partial b_a^l}{\partial y^k} - \frac{\partial b_c^l}{\partial y^a} - b_a^k\frac{\partial b_c^l}{\partial y^k} = 0, \quad a,c=1,\dots,p; \quad l,k=p+1,\dots,n, \quad j=1,\dots,n. \qquad /2.10/$$

Если минор, отличный от нуля, расположен в матрице /2.I/ иначе, то уравнения /2.9/, /2.10/ сохраняют свой вид, однако индексы a,c,l,k будут пробегать другие значения. Именно если через S обозначить множество номеров столбцов матрицы /2.I/, образующих неравный нулю минор, а через $\bar S$ – множество номеров всех других столбцов, то в /2.9/ и /2.10/

$$a,c\in\bar S; \quad l,k\in S. \qquad /2.11/$$

Ясно, что система /I.6/ допускает агрегирование порядка $n-m$ тогда и только тогда, когда хотя бы для одного множества S (а таких множеств всего C_n^m) найдутся функции b_a^l, $l\in S$, $a\in\bar S$, которые удовлетворяют /2.9/, /2.10/. Предположим, что множество U является областью в R^z, а функции f^l, $\partial f^l/\partial y^k$ голоморфны по u^α в U. Напишем разложения в ряды Тейлора функций f^i в окрестности некоторой точки U, которую без ограничения общности считаем нулевой,

$$f^i(t,y,u)=f^i_0(t,y)+f^i_\alpha(t,y)u^\alpha+f^i_{\beta\gamma}(t,y)u^\beta u^\gamma+\dots, \quad /2.12/$$
$$i=1,2,\dots,n; \quad \alpha,\beta,\gamma=1,2,\dots,r.$$

Введем операторы

$$\bar{X}_0=\frac{\partial}{\partial t}+f^i_0\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad /2.13/$$

$$A_\alpha=f^i_\alpha\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \alpha=1,2,\dots,r,$$
$$A_{\beta\gamma}=f^i_{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad \beta,\gamma=1,2,\dots,r. \quad /2.14/$$

Подставляя /2.12/ в /2.9/ и на основании теоремы единственности для голоморфных функций приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях $u^1,\dots,u^r$, получаем условия агрегирования в новой форме:

$$\bar{X}_0 b^l_a+b^l_c z_{a} f^c_0-z_a f^l_0=0, \quad /2.15/$$

$$A_\alpha b^l_a+b^l_c z_a f^c_\alpha-z_a f^l_\alpha=0,$$
$$A_{\beta\gamma}b^l_a+b^l_c z_a f^c_{\beta\gamma}-z_a f^l_{\beta\gamma}=0, \quad /2.16/$$
$$\dots\dots\dots\dots$$

$$z_a b^l_c-z_c b^l_a=0, \quad /2.17/$$
$$a,c\in S; \quad l\in\bar{S}; \quad \alpha,\beta,\gamma=1,2,\dots,r.$$

Система /2.15/ - /2.17/ уже не содержит величин $u^1,\dots,u^r$, но в общем случае состоит из бесконечного числа уравнений. Тем не менее во многих практических задачах число уравнений в /2.15/-/2.17/ конечно.

Перейдем к рассмотрению некоторых примеров.

I. $$\frac{dy^i}{dt}=f^i_0(t,y)+f^i_\alpha(t,y)u^\alpha, \quad i=1,2,\dots,n; \quad \alpha=1,\dots,r. \quad /2.18/$$

Условия /2.15/-/2.17/ для /2.18/ имеют вид

$$\bar{X}_0 b^l_a+b^l_c z_a f^c_0-z_a f^l_0=0, \quad /2.19/$$

$$A_\alpha b^l_a+b^l_c z_a f^c_\alpha-z_a f^l_\alpha=0, \quad /2.20/$$

$$z_a b^l_c-z_c b^l_a=0, \quad a,c\in S; \quad l\in\bar{S}; \quad \alpha=1,\dots,r. \quad /2.21/$$

Рассмотрим частный случай системы /2.18/:

$$\frac{dy^i}{dt}=f^i_0(t,y)+f^i_\alpha(t)u^\alpha, \quad i=1,2,\dots,n; \quad \alpha=1,\dots,r. \quad /2.22/$$

Естественно считать, что $\operatorname{rank}\|f^i_\alpha\|^{\,i=1,\dots,n}_{\,\alpha=1,\dots,r}=r$. В противном случае система /2.22/ допускала бы агрегирование по управлениям. Для /2.22/ условия /2.20/ имеют вид

$$A_\alpha b_a^l = 0, \quad \alpha = 1,2,\dots,r; \quad a=1,\dots,p; \quad l=p+1,\dots,n. \qquad /2.23/$$

В рассматриваемом случае система операторов A_α, $\alpha=1,\dots,r$, полна и поэтому имеет $n-r$ функционально независимых корней $g^1(t,y),\dots,g^{n-r}(t,y)$, в качестве которых можно выбрать некоторые линейные комбинации переменных $y^1,\dots,y^n$ с коэффициентами, зависящими от t. Общее решение системы /2.23/ имеет вид

$$b_a^l = \varphi_a^l(t, g^1,\dots,g^{n-r}), \quad l=p+1,p+2,\dots,n; \quad a=1,\dots,p,$$

где φ_a^l - произвольные функции. Если в /2.22/ $r=n$, то, очевидно,

$$b_a^l = \varphi_a^l(t), \quad l=p+1,\dots,n; \quad a=1,2,\dots,p. \qquad /2.24/$$

В этом случае соотношения /2.21/ выполняются тождественно. Подставляя /2.24/ в /2.19/, получаем для $\varphi_a^l(t)$ систему уравнений

$$\frac{d\varphi_a^l(t)}{dt} + \varphi_c^l(t)\frac{\partial f_0^c(t,y)}{\partial y^a} + \varphi_c^l(t)\varphi_a^k(t)\frac{\partial f_0^c(t,y)}{\partial y^k} -$$

$$-\varphi_a^k(t)\frac{\partial f_0^l}{\partial y^k}(t,y) - \frac{\partial f_0^l(t,y)}{\partial y^a} = 0, \quad \begin{matrix} a,c=1,\dots,p; \\ l,k=p+1,\dots,n. \end{matrix} \qquad /2.25/$$

§ 3. Интегралы управляемых динамических систем

Функция $\varphi(t,y)$ называется интегралом динамической системы /I.6/, если она является корнем оператора X_0 (см. [6]). Нетрудно видеть, что интеграл динамической системы /I.6/ является интегралом любой системы дифференциальных уравнений, которая получается из динамической системы /I.6/, если управления рассматривать как функции времени. Предположим, что множество U является областью в R^r, а функции f^i достаточное число раз непрерывно дифференцируемы по u^α в этой области. Интегралы динамической системы, если они существуют, являются корнями системы операторов

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial t} + f^i\frac{\partial}{\partial y^i}, \qquad /3.1/$$

$$U_\alpha = \frac{\partial}{\partial u^\alpha}, \quad \alpha = 1,2,\dots,r. \qquad /3.2/$$

Пополним эту систему. В результате к ней добавятся операторы вида

$$Y_j = g_j^i(t,y,u)\frac{\partial}{\partial y^i}, \quad j=1,2,\dots,p. \qquad /3.3/$$

Пусть

$$I^k(t,y), \quad k=1,2,\dots,m=n-p, \qquad /3.4/$$

есть полный набор функционально независимых корней полной системы /3.1/-/3.3/. Тогда система /3.3/ полна и функции /3.4/ являются полным набором функционально независимых корней этой системы. Система /3.3/ эквивалентна полной системе вида /I.18/. Из полноты /3.1/-/3.3/ вытекает /I.19/. В силу теоремы 2 отсюда следует факт агрегирования /I.6/ с агрегатами /3.4/. Агрегированная система имеет вид

$$\frac{dz^k}{dt}=\tilde{f}^k(t,z^1,\dots,z^m),\quad k=1,2,\dots,m. \qquad /3.5/$$

Действительно, функции /3.4/ являются корнями операторов (X_0,U_α), и поэтому $\frac{\partial}{\partial u^\alpha}(X_0 I^k)=0$.

Система дифференциальных уравнений /3.5/ имеет m функционально независимых интегралов. Найдя их и заменяя z^k на $I^k(t,y)$, получаем m функционально независимых интегралов системы /I.6/

Выведем некоторые необходимые и достаточные условия существования интегралов. Вывод не связан с дифференцируемостью по u^α, поэтому множество U может быть дискретным. Представим условия агрегирования /2.7/, /2.8/ в несколько иной форме. Обозначим

$$g^\ell(t,y,u)=f^\ell(t,y,u)-b_c^\ell(t,y)f^c(t,y,u),\quad \ell=p+1,\dots,n;\quad c=1,\dots,p, \qquad /3.6/$$

и введем оператор

$$Z_0=\frac{\partial}{\partial t}+g^\ell\frac{\partial}{\partial y^\ell},\quad \ell=p+1,\dots,n. \qquad /3.7/$$

Очевидно,

$$Z_0=X_0-f^c Z_c,\quad c=1,2,\dots,p. \qquad /3.8/$$

Равенства /2.7/, /2.8/ можно теперь переписать в виде

$$(Z_a,Z_c)=0,\quad a,c=0,1,\dots,p. \qquad /3.9/$$

Таким образом, динамическая система допускает агрегирование порядка $n-m$, характеризующееся соотношением /2.2/, тогда и только тогда, когда m функций f^ℓ, $\ell=p+1,\dots,n$, линейно выражаются через остальные $n-m$ функций f^c, $c=1,\dots,p$, по формулам /3.6/, причем функции b_c^ℓ и g^ℓ таковы, что система операторов /2.3/,/3.7/ якобиева. Если в сформулированном утверждении потребовать дополнительно, чтобы и функции g^ℓ, $\ell=p+1,\dots,n$, не зависели от u^α, то это условие будет необходимым и достаточным для существования у системы /I.6/ интегралов

$$\varphi^k(t,y),\quad k=1,\dots,m, \qquad /3.10/$$

обладающих свойством

$$\left|\frac{\partial\varphi^k}{\partial y^i}\right|_{i=p+1,\dots,n}^{k=1,\dots,m}\neq 0. \qquad /3.11/$$

В самом деле, пусть g^ℓ не зависят от u^α. Тогда якобиева система Z_a, $a=0,1,\dots,p$, имеет полный набор корней /3.10/ со свойством /3.II/. В силу /3.8/ функции /3.IO/ являются интегралами /I.6/. Обратно, пусть у /I.6/ есть m функционально независимых интегралов, обладающих свойством /3.II/. Тогда существует якобиева система /2.3/, для которой функции /3.IO/ являются полным набором функционально независимых корней. Очевидно, что функции /3.IO/ являются также корнями оператора /3.8/, а следовательно, и набором независимых корней системы операторов Z_a, $a=0,1,\dots,p$. Поэтому эта система полна, а значит, как следует из ее вида, якобиева. Отсюда вытекает, что функции g^l в /3.7/ не зависят от u^a. Действительно, координаты якобиевой системы операторов Z_a, $a=0,1,\dots,p$, являются решением невырожденной системы линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой определяются корнями /3.IO/ (см. [5]).

Обозначив, как в § 2, через S некоторое множество, состоящее из m попарно различных номеров в пределах от 1 до n, а через $\bar{S}$ – дополнительное множество номеров, получим необходимое и достаточное условие существования у динамической системы m интегралов в следующей форме. Для того чтобы система /I.6/ имела m независимых интегралов, необходимо и достаточно, чтобы нашлись m функций f^l, $l\in S$, которые по формулам

$$f^l = b^l_c f^c + g^l, \quad l\in S, \quad c\in\bar{S},$$

выражаются через остальные $n-m$ функций f^c, $c\in\bar{S}$, причем b^l_c, g^l не зависят от управлений и образуют якобиеву систему вида /2.3/,/3.7/.

Если у динамической системы /I.6/ имеются интегралы /3.IO/, то они порождают в пространстве t, y^i семейство многообразий

$$\varphi^k(t,y) = c^k, \quad k=1,2,\dots,m, \qquad /3.I2/$$

"инвариантных по управлениям". Именно любое многообразие семейства /3.I2/ обладает тем свойством, что всякая траектория, вычисленная по /I.6/ и начинающаяся на этом многообразии, принадлежит ему. Согласно терминологии теории управляемости динамическая система в этом случае не является вполне управляемой [7]. Таким образом, отсутствие интегралов является необходимым условием управляемости.

Поступила в ред.-изд.отдел
13 июля 1977 г.

Л и т е р а т у р а

I. Павловский Ю.Н. К вопросу об агрегировании и построении иерархических управляющих структур для одного класса сложных систем.- Журнал вычислительной математики и математической физики , 1971, т.II, № 6, с. 1510-1520.

2. Павловский Ю.Н. Групповые свойства управляемых динамических систем и фазовые организационные структуры. I.Групповые свойства управляемых динамических систем.- Журнал вычислительной математики и математической физики , 1974, т.14, № 4, с. 862-872.

3. Павловский Ю.Н. Групповые свойства управляемых динамических систем и фазовые организационные структуры. II. Фазовые организационные структуры.- Журнал вычислительной математики и математической физики , 1974, т.14, № 5, с. 1093-1103.

4. Овсянников Л.В. Лекции по теории групповых свойств дифференциальных уравнений. Изд-во Новосибирского государственного университета, 1966.

5. Чеботарев Н.Г. Теория групп Ли. ГИТТЛ, М.-Л., 1940.

6. Яковенко Г.Н. L - системы и их исследование: Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук,-М.,1973,-Вычислительный центр АН СССР.

7. Ли Э.Б., Маркус Л. Основы теории оптимального управления. М.: Наука , 1972.