Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1979 г., выпуск 18.

УДК 62-50

К ТЕОРИИ НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

Р.Габасов, Ф.М.Кириллова (Минск)

Введение

Дискретным принципом максимума в теории оптимального управления дискретными системами называют аналог знаменитого принципа максимума Л.С.Понтрягина [1] из теории оптимальных процессов в непрерывных системах.

Достаточно общая модель задачи оптимального управления дискретными системами имеет следующий вид:

$$\begin{gathered} J(u) = \varphi(x(t_1)) \longrightarrow \min, \\ x(t+1) = f(x(t), u(t), t), \ t \in T = [t_0, t_0+1, \ldots, t_1-1], \\ x(t) \in X(t), \ t \in T^* = T \cup t_1, \ u(t) \in U(t), \ t \in T, \end{gathered} \qquad /1/$$

где $x(t)$ – n - вектор (столбец) состояния дискретной системы в момент t, $u(t)$ – r - вектор (столбец) управления в момент t, T, T^*, $X(t), U(t)$ – заданные множества числовой оси и n-, r-мерных пространств, $\varphi(x)$, $f(x,u,t)$ - скалярная и n -векторная функции, определенные в пространствах своих аргументов и имеющие там достаточное число производных*.

Нетрудно видеть, что /1/ - задача нелинейного программирования в пространстве переменных $u(t)$, $t \in T$, $x(t)$, $t \in T^*$, в которой наряду с общими ограничениями $u(t) \in U(t)$, $x(t) \in X(t)$ имеются специальные ограничения $x(t+1) = f(x(t), u(t), t)$. Хотя в последние годы к приведенной интерпретации апеллируют некоторые исследователи, история развития теории оптимального управления дискретными системами показывает, что принципиальные ее результаты были получены при другой интерпретации, в которой задача /1/ мыслится как дискретный аналог непрерывной задачи

$$\begin{gathered} J(u) = \varphi(x(t_1)) \longrightarrow \min, \quad \dot{x} = f(x,u,t), \\ x(t) \in X, \ u(t) \in U, \ t \in T = [t_0, t_1]. \end{gathered} \qquad /2/$$

Это обстоятельство сказалось как на форме математической модели, так и на виде результатов и их обосновании. Можно сказать, что известные конкретные результаты для /1/ чаще старались трактовать специальными приемами в терминах нелинейного программирования, нежели известные общие результаты из нелинейного программирования использовались для формулировки новых результатов для /1/.

* Степень гладкости зависит от утверждений и будет оговорена в дальнейшем.

Специфика связей $x(t+1)=f(x(t), u(t), t)$ проще учитывалась непосредственно, а не через обращение к общим задачам.

Напомним кратко историю проблемы, приведенную в [2 , 3] . Задача /I/ стала систематически исследоваться после создания модели /2/, что само по себе представляет крупное достижение в теории задач вариационного типа, а главное, в связи с открытием после этого принципа максимума Понтрягина. Надо признать, что задачей /I/ в первую очередь заинтересовались специалисты прикладного профиля, не являющиеся чистыми математиками. Если учесть, что даже принцип максимума для задачи /2/ многими математиками сначала был принят как чисто прикладной результат, не имеющий значительной теоретической ценности, то тем более задача /I/ для них не представляла математического интереса, поскольку, казалось, дело сводится к детализации известных результатов из законченного раздела математического анализа на максимум и минимум функций. Этим можно объяснить то, что первые формулировки дискретного (цифрового) принципа максимума, сделанные в полной аналогии с принципом максимума Понтрягина, были неверными. Исходя из известных результатов в других разделах математики и основываясь только на чисто интуитивном представлении о близости непрерывных и дискретных систем, можно было надеяться, что в задаче

$$x(t+1)=f(x(t), u(t), t),\ x(t_0)=x_0,\ u(t)\in U,\ t\in T, \qquad /3/$$
$$J(u)=\varphi(x(t_1))\longrightarrow \min ,$$

функция[ж] $H(x,\psi,u,t)=\psi' f(x,u,t)$ вдоль оптимального управления $u^\circ(t)$ достигает максимума

$$H(x^\circ(t),\psi^\circ(t),u^\circ(t),t)=\max_{u\in U} H(x^\circ(t),\psi^\circ(t),u(t)). \qquad /4/$$

Здесь $\psi^\circ(t)$ – решение сопряженной системы

$$\psi(t-1)=\frac{\partial H(x^\circ(t),\psi(t),u^\circ(t),t)}{\partial x},\ \psi(t_1-1)=-\frac{\partial\varphi(x^\circ(t_1))}{\partial x} \qquad /5/$$

Этот результат был доказан Л.И.Розоноэром [4] лишь для линейных по состоянию задач: $f(x,u,t)=A(t)x+b(u,t)$, $\varphi(x)=c'x$. А.Г.Бутковский [5] первым показал его ошибочность на примере. Он же выдвинул принцип локального максимума, согласно которому функция $H(x,\psi,u,t)$ достигает не абсолютного /4/ , а локального максимума. Это утверждение представлялось правдоподобным в силу отмеченной близости непрерывной и соответствующей дискретной систем. Казалось, что локальность - плата за дискретность времени, из-за чего знаменитые игольчатые вариации не могли быть использованы полностью.

Нетрудно показать, что при $u^\circ(t)\in \mathrm{int}\, U(t)$ выполняются

[ж] Символ $(')$ означает транспонирование.

условия стационарности $\partial H(x^0(t),\psi^0(t),u^0(t),t)/\partial u=0$. В связи с этим получило распространение предложение А.И. Пропоя [6] :вдоль оптимального управления функция $H(x,\psi,u,t)$ локально максимальна или стационарна. Безусловно, каждый раз вновь вводимому условию оптимальности давалось какое-то обоснование, которое по заявлениям авторов исходило из глубокого понимания существа дискретных систем. Науке известно много случаев, когда инженерная интуиция подтверждалась потом математическими расчетами. К сожалению, дискретным системам оптимального управления в этом отношении не повезло. Были построены контрпримеры [2] по всем высказанным выше условиям оптимальности. Сложившаяся ситуация привлекла внимание математиков, в частности, одного из соавторов принципа максимума - В.Г.Болтянского, который изложил свои результаты в монографии [7] . В нашей работе основное внимание уделяется обзору работ по дискретному принципу максимума, выполненных авторами и их сотрудниками. С результатами других ученых можно ознакомиться по работам [8-13] .

§ 1. Локальные условия оптимальности первого порядка

Рассмотрим сначала простейшую задачу терминального управления /3/. Разнообразные условия существования оптимального управления являются следствиями классической теоремы Вейерштрасса, и их получение не представляет серьезной проблемы.

Для задачи /3/ первая трудность, связанная с оптимальным управлением, относится к получению эффективных необходимых условий оптимальности. Одним из методов исследования условий оптимальности, естественно учитывающим специфику (структуру) задачи /3/, является метод приращения, предложенный Л.И.Розоноэром [14] и развитый впоследствии в других работах.

Для формулировки первого результата введем определение: множество $\mathcal{O}_1(x,X)$ составляет звездную окрестность точки x относительно множества X , если оно состоит из тех и только тех точек $y\in X$, для которых существуют $N<\infty$, $\varepsilon_i\to 0$, $i\to\infty$ $(0\le\varepsilon_i\le 1)$ такие, что $y(\varepsilon_i)=x+\varepsilon_i(y-x)\in X$, $i\ge N$.

<u>Принцип локального максимума</u>: если функции $f(x,u,t)$, $\varphi(x)$, $\partial f/\partial x$, $\partial\varphi/\partial x\in C$, то вдоль оптимального управления гамильтониан $H(x,\psi,u,t)$ достигает локального максимума

$$H(x^0(t),\psi^0(t),u^0(t),t)=\max H(x^0(t),\psi^0(t),u,t), \qquad /6/$$

$$t\in T,\quad f(x^0(t),u,t)\in\mathcal{O}_1(f(x^0(t),u^0(t),t),f(x^0(t),U(t),t)),$$

где $f(x,U,t)=\{y: y=f(x,u,t),\ u\in U\}$.

Если дополнительно $\partial f/\partial u\in C$, то

$$\frac{\partial H(x^\circ(t),\psi^\circ(t),t)}{\partial u}u^\circ(t)=\max_{u\in\mathscr{E}_1(u^\circ(t),U(t))}\frac{\partial H(x^\circ(t),\psi^\circ(t),u^\circ(t),t)}{\partial u}u\,, \qquad /7/$$

Условие /6/ переходит в принцип максимума, если множество $f(x,U,t)$ выпукло при $x\in R_n$, $t\in T$. Этот результат получен в [2]. Из /6/ следуют и результаты работ [6, 15-17].

Принцип локального максимума /6/ допускает усиление за счет расширения множества $\mathscr{E}_1$. В [18] показано, что оно может быть заменено на множество $\bar{\mathscr{E}}_1(x,X)$, состоящее из точек $y\in R_n(R_r)$, для которых для каждого $\delta>0$ найдутся точки $\bar{y}\in R_n(R_r)$ и число $N(\delta)$ такие, что $y(\varepsilon_N)=x+\varepsilon_N(\bar{y}-x)\in X$ при $\|\bar{y}-y\|<\delta$ $(N(\delta)\longrightarrow\infty$ при $\delta\longrightarrow 0)$. Однако, как отмечено выше, в дискретных системах невозможно перейти в /6/ и /7/ к глобальным условиям максимума. Дальнейшее усиление условий /6/, /7/, позволяющее получать глобальные принципы максимума, доказано в [19], где множество $\mathscr{E}_1(x,X)$ заменено на его выпуклую оболочку $(\operatorname{conv}\mathscr{E}_1(x,X)\cap X)$.

Переход к задачам с ограничениями на траекторию заметно ослабляет приведенные выше результаты. Известные результаты [7,20] основаны на выпуклости множества $f(x,U,t)$. С точки зрения конкретных вычислений знание условий оптимальности в задачах с ограничениями на траекторию необязательно. Кроме популярных методов внешних и внутренних штрафных функций, игнорирующих эти условия, существует схема Брайсона-Энеева [21], в которой решение общей задачи сводится к решению задач типа /3/. В этой схеме условия трансверсальности, составляющие суть дополнений к простейшему случаю, получаются конструктивно. Следует подчеркнуть, что эффективность схемы Брайсона-Энеева, да и других вычислительных схем во многом зависит от силы используемых необходимых условий оптимальности. В математике принято считать необходимое условие оптимальности тем сильнее, чем меньше неоптимальных элементов ему удовлетворяет.

Приведенные результаты в [22] обобщены на общие дискретные системы

$$\sum_{t=0}^{K}\sum_{s=0}^{K-1} f(x(t),u(s),t,s,K)=0\,,\quad x(0)=x_0\,,\quad K=1,2,\dots\,.$$

Рассмотрен как невырожденный

$$\det\left[\sum_{s=0}^{K-1}\frac{\partial f(x(K),u(s),K,s,K)}{\partial x}\right]\neq 0\,,\quad K=1,2,\dots\,,$$

так и вырожденный случаи. Оказалось, что в общем случае возникают принципиальные трудности, которые влияют, по существу, на форму локальных условий оптимальности.

Ряд обобщений локальных условий оптимальности получен Л.И. Минченко [23] .

При каждом обобщении локальных условий оптимальности неявно встает вопрос о выделении класса систем, для которого полученное условие переходит в глобальный принцип максимума. Эти классы описаны в работах [2,19] , в частности в [2] выделен класс линейных по состоянию систем с управляемой структурой

$$x(t+1)=A(u(t),t)x(t)+b(u(t),t),$$

при оптимизации которой ($J(u)=\varphi(x(t_f))\to\min$ с вогнутой функцией $\varphi(x)$) выполняется дискретный принцип максимума. Новый подход к проблеме предложен Б.Ш.Мордуховичем [24] , который доказал ряд индивидуальных дискретных принципов максимума, исходя из условий оптимальности высокого порядка (см.далее §3) . Эти результаты созвучны (в силу отмеченной выше связи) индивидуальным теоремам существования оптимальных управлений в непрерывных системах. В обоих случаях вопрос решается с максимальным учетом параметров конкретной задачи, а не класса систем в целом, как делалась традиционно.

§ 2. Принцип квазимаксимума

Первые контрпримеры по дискретному принципу максимума были в известной мере случайными и появились благодаря значительным усилиям их авторов. Можно убедиться самостоятельно, что построение подобных контрпримеров - не простая работа: как правило, будут получаться примеры, подтверждающие дискретный принцип максимума. Проблема существенно упростилась, когда наметился принцип построения контрпримеров. Простой анализ связи между непрерывными системами и их дискретными аналогами показывает, что дискретный принцип максимума не должен выполняться, если дискретная система достаточно точно аппроксимирует непрерывную систему, в которой не существует оптимального управления. Все контрпримеры,приведенные в [2] , построены исходя из этого принципа. Более того, этот принцип был положен в основу гипотезы [3] о связи между дискретным принципом максимума и проблемой существования оптимальных управлений в соответствующих непрерывных системах.Указанная гипотеза доказана в [25] при определенных условиях регулярности. Этим самым, можно сказать, получило обоснование использование принципа максимума.

На первый взгляд, установленная связь между дискретным принципом максимума и существованием оптимальных управлений в непрерывных системах снимает проблему дальнейшего исследования необходимых условий оптимальности. В действительности же, с одной стороны, проблема решена лишь для довольно узкого класса дискретных систем, а с другой - многие модели задач оптимального управления непрерывными системами не имеют решений, и это обстоятельство, по мнению многих ученых, не признак плохих моделей, а отражение важных внутренних свойств физических задач. Речь, в частности, идет о скользящих режимах. Таким образом, проблема необходимых условий оптимальности осталась актуальной. Видимо, усилия многих исследователей поддерживались и поддерживаются убеждением в том, что и дискретные задачи оптимального управления должны иметь "свой" принцип максимума. В работе [26] авторами предложен один из возможных вариантов подобного утверждения.

Рассмотрим задачу

$$\mathcal{I}(u)=\varphi(x(t_1))\longrightarrow min,\quad x(t+h)=x(t)+hf(x(t),u(t),t),$$

$$x(t_0)=x_0,\quad u(t)\in U(t),\quad t\in T_h=\{t_0,t_0+h,\dots,t_1-h\},\qquad /8/$$

где параметр $h>0$ характеризует степень аппроксимации задачи /2/, $U(t)$ - компактные множества.

Пусть $u_h^0(t)$ - оптимальное управление в задаче /8/, $x_h^0(t)$ - соответствующая оптимальная траектория, $\psi_h^0(t)$ - решение сопряженной системы

$$\psi(t-h)=\psi(t)+h\frac{\partial H(x_h^0(t),\psi(t),u_h^0(t),t)}{\partial x},\quad \psi(t_1-h)=-\frac{\partial\varphi(x^0(t_1))}{\partial x},$$

$$H(x,\psi,u,t)=\psi' f(x,u,t).$$

Пусть при $0<h\leqslant h_0$ допустимые траектории системы /8/ равномерно ограничены. Тогда справедлив

<u>Принцип квазимаксимума</u>: для любого $\varepsilon>0$ существует такое $h>0$, что выполняется условие ε -максимума

$$H(x_h^0(t),\psi_h^0(t),u_h^0(t),t)=\max_{u\in U(t)}H(x_h^0,\psi_h^0(t),u,t)-\varepsilon,\qquad /9/$$

$$t\in T_h.$$

Другими словами, вдоль оптимального управления $u_h^0(t)$ гамильтониан достигает максимума с точностью до ε.

В общем случае принцип квазимаксимума невозможно улучшить: существуют задачи /8/, для которых в /9/ $\varepsilon>0$ для любого сколь угодно малого $h>0$. При $h\longrightarrow 0$ оптимальные управления этих задач ведут себя все более и более нерегулярно, стремятся, например, к скользящим режимам.

В конкретных случаях глобальное условие оптимальности /9/ целесообразно использовать в сочетании с локальными условиями из § I. Приведем результаты Б.Ш.Мордуховича и В.М.Ракецкого по использованию принципа квазимаксимума для задач с краевыми условиями.

Дополним сначала условия дискретной задачи оптимизации ограничениями типа неравенств

$$\varphi_i(x(t_1)) \leq 0, \quad i=\overline{1,m}.$$

В этом случае вдоль оптимального управления $u_h^0(t)$ условие квазимаксимума /9/ выполняется вместе со следующим условием трансверсальности:

$$\psi_h^0(t_1-h) = -\sum_{i=1}^{m} \mu_i \frac{\partial \varphi_i(x^0(t_1))}{\partial x} - \mu_0 \frac{\partial \varphi(x^0(t_1))}{\partial x}$$

$$(\mu_0, \mu_i \geq 0, \quad \sum \mu_i + \mu_0 = 1).$$

Ограничения типа равенств $\varphi_i(x(t_1))=0$, $i=\overline{1,m}$, вносят новый принципиальный элемент в формулировку необходимых условий оптимальности. Примеры показывают, что традиционная форма условий трансверсальности с заменой условия максимума на условие ε- максимума /9/ оказывается несправедливой. Для корректной формулировки условий трансверсальности следует наряду с уравнением $\dot{x}=f(x,u,t)$ аппроксимировать и ограничения, заменив исходные ограничения на $-\rho \leq \varphi_i(x(t_1)) \leq \rho$, $i=\overline{1,m}$. Если $\rho=o(h^{1-\delta})$, $0<\delta<1$, то принцип квазимаксимума сохраняется с условием трансверсальности указанного выше типа с естественным изменением утверждения о знаках μ_0, μ_i (здесь $\mu_0 \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} |\mu_i| = 1$).

§ 3. Условия оптимальности высокого порядка

Переход к условиям высокого порядка диктуется несколькими обстоятельствами. Во-первых, поскольку дискретный принцип максимума в общем случае не выполняется, то дискретную систему в /3/ разумно заменить "овыпукленной"

$$x(t+1)=\sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) f(x(t), u_i(t), t), \; u_i(t) \in U(t), \; \alpha_i(t) \geq 0, \; \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i(t) = 1,$$

для которой дискретный принцип максимума выполняется, и по решению новой задачи восстановить (точно или приближенно) решение исходной [27] . Одной из трудностей, возникающих на этом пути, является появление особых оптимальных управлений, для которых принцип максимума выполняется с вырождением, не доставляя того объема информации, который характерен в невырожденном случае. Исследование особых управлений - проблема условий оптимальности высокого порядка.

Второе обстоятельство, диктующее переход к условиям высокого порядка, связано с расширением множества, элементы которого сравниваются с элементами оптимального управления. Как указано выше, каждое подобное расширение, не требующее чрезмерных дополнительных затрат, усиливает необходимое условие оптимальности, что позволяет хотя бы в принципе построить новые эффективные алгоритмы.

Условие оптимальности особых управлений и условие оптимальности высокого порядка для дискретных систем стали разрабатываться с появлением работ [28,29]. В их основу положены формулы приращения второго порядка.

Пусть

$$\partial^2 f/\partial x^2,\ \partial^2\varphi/\partial x^2 \in C^{(2)},\quad w(\psi, x)=\{a: \psi'(a-x)=0\},$$
$$\sigma_2(x, X, a)=\{y: x+\varepsilon_i(a\ \ x)\in X \text{ при } i\geq N,\ \varepsilon_i>0,\ \varepsilon_i\to 0,\ i\to\infty\}$$

Справедливо

Условие оптимальности второго порядка [28]. Вдоль оптимального управления $u^\circ(t)$ выполняется неравенство

$$\Delta_V H(x^\circ(t), \psi^\circ(t), a, t)+[f(x^\circ(t), a, t)-f(x^\circ(t), u^\circ(t), t]'\times$$
$$\times\Psi^\circ(t)[f(x^\circ(t), a, t)-f(x^\circ(t), u^\circ(t), t]\leqslant 0 \qquad /10/$$

для всех V, a, t таких, что

$$f(x^\circ(t), v, t)\in\sigma_2(f(x^\circ(t), u^\circ(t), t),\ f(x^\circ(t), U(t), t), f(x^\circ(t), a, t)),$$
$$f(x^\circ(t), a, t)\in w(\psi^\circ(t), x^\circ(t)),\ t\in T.$$

В условии /10/ $x^\circ(t)$ – оптимальная траектория, $\psi^\circ(t)$ – соответствующее решение сопряженной системы /5/, $\Psi^\circ(t)$ – $n\times n$-матричная функция – решение уравнения

$$\Psi(t-1)=\left[\frac{\partial f(x^\circ(t), u^\circ(t), t)}{\partial x}\right]\Psi(t)\left[\frac{\partial f(x^\circ(t), u^\circ(t), t)}{\partial x}\right]+$$
$$+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 H(x^\circ(t), \psi^\circ(t), u^\circ(t), t)}{\partial x^2},\ \Psi(t_1-1)=-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\varphi(x^\circ(t_1))}{\partial x^2}.$$

Из определения множеств σ_1, σ_2 следует, что в условии /10/ с оптимальным управлением $u^\circ(t)$, вообще говоря, сравнивается больше точек $u\in U(t)$, чем в локальном принципе максимума /6/.

Результат /10/ с помощью формул приращения высокого порядка развит в [29], где получены необходимые условия оптимальности произвольного K-го порядка.

Дальнейшие усиления доказаны в [19], где окрестности σ_K, $K\geq 2$, заменены на $\bar\sigma_K$ по принципу, который использован выше при переходе от σ_1 к $\bar\sigma_1$.

Условия оптимальности высокого порядка упрощаются, если исследуемое управление особое. Эта ситуация возникает, как отмечено выше, даже в тех случаях, когда дискретный принцип максимума справедлив. На особых управлениях он теряет эффективность.

Допустимое управление $u(t)$, $t\in T$, называется особым на множестве $t\in\tau$, если найдется такое подмножество $\Omega(u(t),t)\subset U(t)$ $(\Omega\not\equiv u(t))$, что $H(x(t),\psi(t),u(t),t)\equiv H(x(t),\psi(t),u,t)$, $t\in\tau$, $u\in\Omega$.

Условие оптимальности особых управлений [28]. Пусть $f(x,U(t),t)$ - выпуклое множество. Тогда вдоль оптимального особого управления выполняется неравенство

$$\Delta_v f'(x^0(t),u^0(t),t)\psi^0(t)\Delta_v f(x^0(t),u^0(t),t)\leq 0,\quad t\in\tau, \qquad /11/$$

для всех $v\in\Omega$. Здесь $\Delta_v f(x,u,t)=f(x,v,t)-f(x,u,t)$.

Понятие особого управления зависит от вида условия первого порядка. Выше использовался дискретный принцип максимума. Можно использовать и условие /7/, считая особым управление, вдоль которого оно вырождается, т.е. в случае, когда максимум справа в /7/ достигается в нескольких точках $u\in U(t)$. Классическим в теории особого управления считается случай, когда $U(t)$ - открытое множество и вдоль управления

$$\det\left[\frac{\partial^2 H(x^0(t),\psi^0(t),u^0(t),t)}{\partial u^2}\right]\equiv 0,\quad t\in\tau.$$

Указанные дополнительные типы особых управлений также исследуются в [28], и для них получены аналоги условий /10/, /11/.

Развитие условия /10/ на особые управления высокого порядка приведено в [28]. При этом управление называется особым управлением второго порядка, если оно особое первого порядка и вдоль него левая часть неравенства /10/ тождественно равна нулю на τ. Аналогично определяется особое управление третьего, четвертого и т.д. порядков.

Результаты работы усилены в [30] опять за счет использования соответствующих аналогов окрестностей $\bar{\sigma}_l$, $\bar{\sigma}_k$. При этом условия выпуклости не используются, и для особых управлений порядка m получены условия оптимальности порядка k, где m и k - независимые натуральные числа.

Совокупность полученных условий высокого порядка позволяет строить разнообразные алгоритмы улучшения допустимых управлений в дискретных системах как со свободным правым концом, так и с подвижным (закрепленным) концом. Возможен учет фазовых ограничений.

Н.В.Тарасенко и Л.Т.Ащепковым [31] проведены исследования по многоточечным условиям оптимальности высокого порядка, в которых одновременно участвуют оптимальные управления в разные моменты времени. Эти условия сильнее одноточечных и создают предпосылки для конструирования новых вычислительных алгоритмов.

В заключение отметим, что использованная в цитированных работах техника легко переносится на исследование задач оптимального управления с параметрами [[illegible], 32] и вообще на задачи, в которых класс допустимых управлений не позволяет использовать игольчатые вариации. Подробные вопросы рассмотрены в [33] .

Поступила в ред.-изд.отдел
21 декабря 1977 г.

Литература

1.Математическая теория оптимальных процессов/ Понтрягин Л.С.,Болтянский В.Г.,Гамкрелидзе Р.В.,Мищенко Е.Ф.-М.:Физматгиз, 1961.-391 с.

системах.-Журнал вычислительной математики и математической физики, 1968, т.8, № 4, с. 780-796.

3. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. -М.: Наука, 1971. - 238 с.

4. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С. Понтрягина в теории оптимальных систем. Ш.-Автоматика и телемеханика, 1959, т.20, № 12, с. 1561-1578.

5. Бутковский В.Г. О необходимых и достаточных условиях оптимальности для импульсных систем управления.-Автоматика и телемеханика, 1963, т. 24, № 8, с.1056-1064.

6. Пропой А.И. О принципе максимума для дискретных систем управления.-Автоматика и телемеханика, 1965, т. 26, № 7, с.1177-1187.

7. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами.-М.:Наука, 1973.- 446 с.

8. Леонов В.В.Исследования по теории управляемых многошаговых процессов.- В кн.: Управляемые системы,Новосибирск, 1974, вып. 12, с. 20-23.

9. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Современное состояние теории оптимальных процессов.-Автоматика и телемеханика, 1972, № 9, с. 31-62.

10. Болтянский В.Г. Дискретный принцип максимума (метод локальных сечений) .-Дифференциальные уравнения, 1972, т.8, № 11, с. 1927-1935.

11. Дзюба Н.Н., Пшеничный Б.Н. О дискретном принципе максимума.-Кибернетика, 1975, № 2, с. 25-36.

12. Пропой А.И. Задачи дискретного управления с фазовыми ограничениями.-Журнал вычислительной математики и математической физики, 1972, т.12, № 5, с. 1128-1144.

13. Wang P.K.C. Optimal control of discrete-time system

with time-lag controls.- IEEE Trans. Automat. Control, 1975, v. 20, N° 3, p. 223-245.

14. Розоноэр Л.И. Принцип максимума Л.С.Понтрягина в теории оптимальных систем. I, II.-Автоматика и телемеханика, 1959, т.20, № 10, с.1320-1334,№ 11, с. 1441-1458.

15. Holtzman J.M. On the maximum principle for nonlinear discrete-time systems. - IEEE Trans. Automat. Control, 1966, v. 11, N° 2, p. 115-131.

16. Halkin H. A maximum principle of the Pontryagin type for systems described by nonlinear difference equations. - J. SIAM Control, 1966, v. 4, N° 1, p. 90-111.

17. Holtzman J.M., Halkin H. Directional convexity and the maximum principle for discrete systems. - J.SIAM Control, 1966, v. 4, N° 2, p. 263-275.

18. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Необходимые условия типа равенства в дискретных системах.-Дифференциальные уравнения, 1973, т.9, № 3, с. 542-546.

19. Ашепков Л.Г.,Габасов Р. К оптимизации дискретных систем.-Дифференциальные уравнения, 1972, т.8, № 6, с. 1068-1080.

20. Canon M., Cullum C.D.Ir., Polak E. Theory of optimal control and mathematical programming. Mc Graw-Hill. Book Company, N.Y., 1970. - 240 p.

21. Энеев Т.М. О применении градиентного метода в задачах теории оптимального управления.-Космические исследования, 1966, т.4, вып.5, с. 342-358.

22. Габасов Р., Гусакова М.Л. Принцип максимума для общих дискретных систем.-Дифференциальные уравнения, 1971, т.7, № 9, с. 1581-1590.

23. Минченко Л.И. О необходимых условиях оптимальности для некоторых классов дискретных систем управления.-Дифференциальные уравнения, 1976, т.12, № 7, с.1211-1218.

24. Мордухович Б.Ш. Об оптимальном управлении дискретными системами.-Дифференциальные уравнения, 1973, т.9, № 4, с.727-734.

25. Габасов Р.,Кириллова Ф.М.,Мордухович Б.Ш. Дискретный принцип максимума.-Докл. АН СССР, 1973, т.213, № 1, с.19-22.

26. Габасов Р., Кириллова Ф.М. К вопросу о распространении принципа максимума Л.С.Понтрягина на дискретные системы.-Автоматика и телемеханика, 1966, № 11, с. 46-51.

27. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Применение принципа максимума для вычисления оптимальных управлений дискретных систем.-Докл. АН СССР, 1969, т.189, № 5, с.983-966.

28. Габасов Р.,Кириллова Ф.М. К теории необходимых условий оптимальности для дискретных систем.-Автоматика и телемеханика,

1969, № I2, с. 39-47.

29. Габасов Р., Тарасенко Н.В. Необходимые условия оптимальности высокого порядка для дискретных систем.-Автоматика и телемеханика, I97I, № I, с. 58-65.

30. Ащепков Л.Т. К необходимым условиям оптимальности высокого порядка для особых управлений дискретных систем.-Дифференциальные уравнения, I972, т.8, № I0, с. I857-I867.

3I. Ащепков Л.Т. Многоточечные условия оптимальности дискретных систем.-В кн.:Дифференциальные и интегральные уравнения, Иркутск, I973, вып.I, с. I5-26.

32. Болтянский В.П. Математические методы оптимального управления.-М.:Наука, I969.- 379 с.

33. Габасов Р.,Кириллова Ф.М. Принцип максимума в теории оптимального управления.-Минск: Наука и техника, I973.-293 с.