Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1979 г., выпуск 18.
УДК 519.3:62-50

ОПТИМАЛЬНОСТЬ ОСОБЫХ ГРАНИЧНЫХ УПРАВЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

О.В.Васильев (Иркутск)

Одним из первых шагов на пути решения задач оптимального управления является получение необходимых условий оптимальности, которые служат источником ряда численных методов расчета оптимальных режимов. При таком подходе довольно часто возникает ситуация, когда необходимое условие оптимальности первого порядка (принцип максимума Л.С.Понтрягина) не позволяет однозначно выразить управление через состояние процесса и сопряженные функции, т.е. становится неэффективным. Эта ситуация, названная особой, требует дальнейшего развития теории необходимых условий оптимальности.

В работе [1] автором исследованы особые управления в одной системе с распределенными параметрами, когда распределенное управление входит в правые части системы, а граничные условия заданы. В настоящей работе получены необходимые условия оптимальности особых граничных управлений, т.е. это продолжение работы [1]. Рассматриваемая задача часто встречается в приложениях, например, при оптимизации некоторых классов химико-технологических процессов в реакторах с изменяющейся активностью катализатора [2].

§ 1. Постановка задачи

Пусть в некотором прямоугольнике $\Pi = S\times T$, $S=[s_0,s_1]$, $T=[t_0,t_1]$, выбором управлений $v=v(t)$, $v(t)\in E^r$, $t\in T$, определяется состояние $x=\{z(s,t)\in E^{n_1};\ y(s,t)\in E^{n_2},\ (s,t)\in\Pi\}$ процесса. Система, связывающая состояние и управление, имеет вид

$$\left.\begin{aligned} z_s(s,t) &= f^{(1)}(z(s,t),\ y(s,t),\ s,t),\\ y_t(s,t) &= f^{(2)}(z(s,t),\ y(s,t),\ s,t); \end{aligned}\right\} \qquad /1.1/$$

при условиях:

$$z_t(s_0,t) = g(z(s_0,t), v(t), t);\quad z(s_0,t_0) = z^0; \qquad /1.2/$$

$$y(s,t_0) = y^0(s);\quad s\in S. \qquad /1.3/$$

Здесь вектор-функции $f^{(i)}(z,y,s,t)$, $i=1,2$, $g(z,v,t)$ кусочно-непрерывны по (s,t), в каждой точке $(s,t)\in\Pi$ непрерывно дифференцируемы до второго порядка по (z,y). Вектор-функция $g(z,v,t)$ непрерывна по v в каждом t и удовлетворяет условиям Липшица по v вместе со своими первыми производными по x ; x^0 – заданный вектор; $y^0(s)$ – заданные функции.

Под допустимыми управлениями будем понимать кусочно-непрерывные функции $v=v(t)$, выбираемые в каждом $t\in T$ из некоторого ограниченного и замкнутого множества V евклидова пространства E^r :

$$v(t)\in V,\ V\subset E^r,\ t\in T. \qquad /I.4/$$

Предположим, что для каждого допустимого управления решение задачи Коши /I.2/ однозначно продолжимо на T . Предположим также, что в этом случае решение системы /I.I/ с начальными условиями /I.2/-/I.3/ существует и единственно на Π в классе абсолютно-непрерывных по $s[t]$, кусочно-непрерывных по $t[s]$ функций $x(s,t)$ $[y(s,t)]$.

Качество процесса оценим функционалом

$$J(v)=\varphi(x(s_0,t_1))+\int_{t_0}^{t_1}G(x(s_0,t),v(t),t)dt+\int_{t_0}^{t_1}F_1(x(s_1,t),t)dt+$$

$$+\int_{s_0}^{s_1}F_2(y(s,t_1),s)ds+\int_{t_0}^{t_1}\int_{s_0}^{s_1}F_3(x(s,t),y(s,t),s,t)ds\,dt. \qquad /I.5/$$

Здесь все скалярные функции, входящие в правую часть /I.5/, непрерывно дифференцируемы по (x,y) до второго порядка, функция $G(x,v,t)$ непрерывна по v в каждом t и удовлетворяет условиям Липшица по v вместе со своими первыми производными по x .

Управление $v^*(t)$, доставляющее функционалу /I.5/ наименьшее значение на решениях систем /I.I/-/I.3/ при всех допустимых управлениях /I.4/, будем называть оптимальным. Будем предполагать, что в указанном классе оптимальное управление существует.

§ 2. Приращение функционала

Предварительно напомним основные обозначения и приведем некоторые вспомогательные результаты.

Пусть $\mathcal{D}\mathcal{X}=(x_s(s,t),y_t(s,t))$; $f(\mathcal{X},s,t)=(f^{(1)}(x,y,s,t),f^{(2)}(x,y,s,t))$; $\|a(s,t)\|$ – евклидова норма в каждом (s,t) –; $\Delta M(\mathcal{X},v,t)$, как обычно, – полное приращение по $(\mathcal{X},v)$ в отличие от частных приращений $\Delta_{\mathcal{X}}M(\mathcal{X},v,t)$, $\Delta_v M(\mathcal{X},v,t)$. Далее, договоримся, что там, где это не вносит неясности, для упрощения записи аргументы у функций будем опускать.

Предположим, что допустимому управлению $v=v(t)$ соответствует состояние $\mathcal{X}=\mathcal{X}(s,t)$ процесса /I.I/-/I.3/, а допустимому $\tilde{v}=v(t)+\Delta v(t)$ – состояние $\tilde{\mathcal{X}}=\mathcal{X}(s,t)+\Delta\mathcal{X}(s,t)$.

Тогда

$$\left.\begin{aligned}&\Delta\mathcal{D}z(s,t)=\Delta f(z,s,t),\\&\Delta z_t(s_0,t)=\Delta g(z(s_0,t),v(t),t),\ \Delta z(s,t_0)=0,\\&\Delta y(s,t_0)=0.\end{aligned}\right\}\qquad /2.1/$$

Л е м м а. При выполнении равенств /2.I/ для $\|\Delta z(s,t)\|$, $\|\Delta y(s,t)\|$ справедливо

$$\left.\begin{aligned}&\|\Delta z(s,t)\|<\mathcal{K}\int_{t_0}^{t_1}\|\Delta v(t)\|dt,\\&\|\Delta y(s,t)\|<\mathcal{K}\int_{t_0}^{t_1}\int_{t_0}^{t}\|\Delta v(\xi)\|d\xi dt,\quad \mathcal{K}<+\infty.\end{aligned}\right\}\qquad /2.2/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из сформулированных условий на правые части систем /I.I/-/I.2/ следует, что правые части удовлетворяют обобщенным неравенствам Липшица. Тогда

$$\|\Delta z(s,t)\|\leqslant\|\Delta z(s_0,t)\|+\mathcal{K}_1\int_{s_0}^{s}(\|\Delta z(\xi,t)\|+\|\Delta y(\xi,t)\|)d\xi,$$

$$\|\Delta y(s,t)\|<\mathcal{K}_2\int_{t_0}^{t}(\|\Delta z(s,\tau)\|+\|\Delta y(s,\tau)\|)d\tau,$$

$$\|\Delta z(s_0,t)\|\leqslant\mathcal{K}_3\int_{t_0}^{t}(\|\Delta z(s,\tau)\|+\|\Delta v(\tau)\|)d\tau.$$

К каждому из неравенств применим известную лемму Гронуолла-Беллмана и, усилив полученные неравенства одно за счет другого, в результате будем иметь

$$\|\Delta z(s,t)\|\leqslant\overline{\mathcal{K}}_1\Big(\int_{t_0}^{t}\|\Delta v(\tau)\|d\tau+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t}\|\Delta z(\xi,\tau)\|\,d\tau d\xi\Big),$$

$$\|\Delta y(s,t)\|<\overline{\mathcal{K}}_2\Big(\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{\tau}\|\Delta v(\xi)\|d\xi d\tau+\int_{s_0}^{s}\int_{t_0}^{t}\|\Delta y(\xi,\tau)\|d\tau d\xi\Big).$$

Положим $t=t_1$ в первых слагаемых правой части и после применения неравенства Вендроффа [3] получим оценки /2.2/.

Далее, пусть $\psi=\{\psi^{(1)}(s,t)\in E^{n_1};\ \psi^{(2)}(s,t)\in E^{n_2}\}$, $p=p(t)$, $p(t)\in E^{n_1}$ – пока неопределенные вектор-функции того же класса, что z и $z(s_0,t)$.

Введем в рассмотрение скалярные функции

$$H=H(p(t),z(s_0,t),v(t),t)=p(t)'g(z(s_0,t),v(t),t)-G(z(s_0,t),v(t),t),$$

$$H^{(1)}=H^{(1)}(\psi,z,s,t)=\psi^{(1)}(s,t)'f^{(1)}(z,y,s,t)+\psi^{(2)}(s,t)'f^{(2)}(z,y,s,t)-F_3(z,y,s,t).$$

Здесь $'$ – символ транспонирования вектора.

Кроме того, пусть

$$H_0 = p(t)' g(z(s_0,t), v(t); t), \quad H_0^{(1)} = \psi(s,t)' f(x,s,t).$$

Наконец, заметим, что если скалярная функция $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируема до второго порядка, то ее приращение представимо в виде

$$\Delta\varphi(x) = \frac{\partial\varphi(x)'}{\partial x}\Delta x + \frac{1}{2}\Delta\frac{\partial\varphi(x)'}{\partial x}\Delta x + o_\varphi(\|\Delta x\|^2), \qquad /2.3/$$

где $o_\varphi(\|\Delta x\|^2)/\|\Delta x\|^2 \longrightarrow 0$ при $\|\Delta x\| \longrightarrow 0$.

Если же разложение $\Delta\varphi(x)$ до первого порядка, то $o_\varphi(\|\Delta x\|)$ имеет свойство $o_\varphi(\|\Delta x\|)/\|\Delta x\| \to 0$, когда $\|\Delta x\| \to 0$.

Теперь перейдем непосредственно к изучению формулы приращения функционала /I.5/ на решениях системы /I.I/-/I.3/.

Очевидно, что

$$\Delta J(v) = \Delta\Phi + \int_{t_0}^{t_1}\Delta G\,dt + \int_{t_0}^{t_1}\Delta F_1\,dt + \int_{s_0}^{s_1}\Delta F_2\,ds +$$
$$+ \int_{s_0}^{s_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta F_3\,dt\,ds + \int_{s_0}^{s_1}\int_{t_0}^{t_1}[\psi + \tfrac{1}{2}\Delta\psi]'[\Delta Dx - \Delta f]\,dt\,ds +$$
$$+ \int_{t_0}^{t_1}[p + \tfrac{1}{2}\Delta p]'[\Delta z_t(s_0,t) - \Delta g]\,dt. \qquad /2.4/$$

В правой части равенства /2.4/ учтем введенные обозначения, приращения $\Delta\Phi$, ΔF_1, ΔF_2, $\Delta_z H(p,z,\tilde v,t)$, $\Delta_x H^{(1)}$ представим по формуле /2.3/, $\Delta_z H_0(\Delta p, z, \tilde v, t)$, $\Delta_x H_0^{(1)}(\Delta\psi, x, s, t)$ разложим в ряд Тейлора до первого порядка в точках $\tilde z(s,t)$, $\tilde x(s,t)$ соответственно. Заметим, что

$$\int_{s_0}^{s_1}\int_{t_0}^{t_1}\psi'\Delta Dx\,dt\,ds = \int_{t_0}^{t_1}\psi^{(1)}(s_1,t)'\Delta z(s_1,t)\,dt - \int_{t_0}^{t_1}\psi^{(1)}(s_0,t)'\Delta z(s_0,t)\,dt +$$
$$+ \int_{s_0}^{s_1}\psi^{(2)}(s,t_1)'\Delta y(s,t_1)\,ds - \int_{s_0}^{s_1}\int_{t_0}^{t_1}D\psi'\Delta x\,dt\,ds.$$

Далее, подчиним функции $\psi(s,t)$, $p(t)$, $\Delta\psi(s,t)$, $\Delta p(t)$ "сопряженным" уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_s^{(1)} = -\frac{\partial H^{(1)}}{\partial z}, \quad \psi^{(1)}(s_1,t) = -\left.\frac{\partial F_1}{\partial z}\right|_{s=s_1}, \\ &\psi_t^{(2)} = -\frac{\partial H^{(1)}}{\partial y}, \quad \psi^{(2)}(s,t_1) = -\left.\frac{\partial F_2}{\partial y}\right|_{t=t_1}; \end{aligned}\right\} \qquad /2.5/$$

$$\dot p(t) = -\frac{\partial H}{\partial z} - \psi^{(1)}\Big|_{s=s_0}, \quad p(t_1) = -\left.\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right|_{(s_0,t_1)}; \qquad /2.6/$$

$$\left.\begin{aligned} &\Delta\psi_s^{(1)} = -\Delta\frac{\partial H^{(1)}}{\partial z}, \quad \Delta\psi^{(1)}(s_1,t) = -\Delta\frac{\partial F_1}{\partial z}\Big|_{s=s_1},\\ &\Delta\psi_t^{(2)} = -\Delta\frac{\partial H^{(1)}}{\partial y}, \quad \Delta\psi^{(2)}(s,t_1) = -\Delta\frac{\partial F_2}{\partial y}\Big|_{t=t_1}; \end{aligned}\right\} \qquad /2.7/$$

$$\Delta\dot p(t) = -\Delta\frac{\partial H}{\partial z} - \Delta\psi^{(1)}\Big|_{s=s_0}, \quad \Delta p(t_1) = -\Delta\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{(s_0,t_1)}. \qquad /2.8/$$

Тогда формула приращения минимизируемого функционала примет следующий вид:

$$\Delta J(v) = -\int_{t_0}^{t_1}\Delta_v H dt - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(\Delta_v\frac{\partial H}{\partial z}'\Delta z(s_0,t) + $$
$$+\Delta p(t)'\Delta_v\frac{\partial H}{\partial p})dt + \eta, \qquad /2.9/$$

где

$$\eta = o_\varphi(\|\Delta z(s_0,t_1)\|^2) + \int_{t_0}^{t_1} o_{F_1}(\|\Delta z(s_1,t)\|^2)dt +$$
$$+\int_{s_0}^{s_1} o_{F_2}(\|\Delta y(s,t_1)\|^2)ds + \int_{t_0}^{t_1} o_H(\|\Delta z(s_0,t)\|^2)dt +$$
$$+\int_{s_0}^{s_1}\int_{t_0}^{t_1} o_{H^{(1)}}(\|\Delta x(s,t)\|^2)dtds - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\Delta p(t)'\hat{o}_g(\|\Delta z(s_0,t)\|)dt -$$
$$-\frac{1}{2}\int_{s_0}^{s_1}\int_{t_0}^{t_1}\Delta\psi(s,t)'\hat{o}_f(\|\Delta x(s,t)\|)dtds.$$

Заметим, что структура уравнений /I.I/, как было выяснено в [I], позволяет не обращаться к аппарату вариационных производных для обеспечения корректности записи сопряженных уравнений. Здесь для допустимого $v = v(t)$ и ему соответствующего $x = x(s,t)$ решение систем /2.5/,/2.6/ принадлежит тому же классу, что и $x = x(s,t)$, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений.

§ 3. Игольчатая вариация

Формулу приращения /2.9/ рассмотрим на игольчатом приращении $\Delta_\varepsilon v(t)$ управления следующего вида:

$$\Delta_\varepsilon v(t) = \begin{cases} w - v(t), & t\in T_\varepsilon = (\tau-\varepsilon,\tau]\subset T,\ w\in V,\ \varepsilon>0;\\ 0, & t\in T/T_\varepsilon \end{cases}$$

В силу леммы для приращения состояния $\Delta_\varepsilon x(s,t)$, вызванного игольчатым приращением, справедливо

$$\|\Delta_c x(s,t)\| \leq \begin{cases} 0, & (s,t)\in \Pi_1 = \{(s,t):\ s\in S,\ t\in[t_0,\tau-\varepsilon]\}, \\ K\varepsilon, & (s,t)\in \Pi/\Pi_1,\quad K<+\infty. \end{cases} \qquad /3.1/$$

С помощью тех же рассуждений для решений систем /2.7/,/2.8/ на игольчатом приращении можно получить следующие оценки:

$$\|\Delta_c \psi(s,t)\| \leq K\varepsilon, \quad \|\Delta_c p(t)\| \leq K\varepsilon. \qquad /3.2/$$

Отсюда

$$\Delta_c J(v) = -\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \Delta_v^c H\,dt - \frac{1}{2}\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau} \Big(\Delta_v^c \frac{\partial H'}{\partial z}\Delta_c z(s_0,t) +$$

$$+\Delta_c p(t)'\Delta_v^c g\Big)dt + o(\varepsilon^2), \qquad /3.3/$$

где

$$\Delta_v^c H = H(p(t), z(s_0,t), w, t) - H(p(t), z(s_0,t), v(t), t).$$

Из формулы /3.3/ видно, что для выделения членов порядка ε^2 необходимо найти явный вид для коэффициентов при ε в выражениях $\Delta_c z(s_0,\tau)$, $\Delta_c p(\tau)$. Очевидно, что

$$\Delta_c z(s_0,t) = 0, \quad t\in[t_0,\tau-\varepsilon],$$

$$\Delta_c z(s_0,\tau) = \Delta_v^c g(z(s_0,\tau), v(\tau), \tau)\cdot\varepsilon + o(\varepsilon). \qquad /3.4/$$

Далее, положим

$$\Delta_c x(s,t) = \varepsilon\delta x(s,t) + o(\varepsilon),$$
$$\Delta_c \psi(s,t) = \varepsilon\delta\psi(s,t) + o(\varepsilon),$$
$$\Delta_c p(t) = \varepsilon\delta p(t) + o(\varepsilon)$$

и из уравнений /2.1/,/2.7/,/2.8/, приравнивая коэффициенты при ε, получим "уравнения в вариациях":

$$\left.\begin{aligned} \delta z_s &= \frac{\partial f^{(1)}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y}\delta y, \\ \delta y_t &= \frac{\partial f^{(2)}}{\partial z}\delta z + \frac{\partial f^{(2)}}{\partial y}\delta y, \end{aligned}\right\} \qquad /3.5/$$

$$\delta z_t(s_0,t) = \frac{\partial g}{\partial z}\delta z(s_0,t), \quad \delta z(s_0,\tau) = \Delta_v^c g; \quad \delta y(s,\tau) = 0, \qquad /3.6/$$

$$\left.\begin{aligned} \delta\psi_s^{(1)} &= -\frac{\partial f^{(1)\prime}}{\partial z}\delta\psi^{(1)} - \frac{\partial f^{(2)\prime}}{\partial z}\delta\psi^{(2)} - \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial z^2}\delta z - \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial y\partial z}\delta y, \\ \delta\psi_t^{(2)} &= -\frac{\partial f^{(1)\prime}}{\partial y}\delta\psi^{(1)} - \frac{\partial f^{(2)\prime}}{\partial y}\delta\psi^{(2)} - \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial z\partial y}\delta z - \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial y^2}\delta y, \end{aligned}\right\} \qquad /3.7/$$

$$\left.\begin{aligned} \delta\psi^{(1)}(s_1,t) &= -\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\Big|_{s_1}\delta z(s_1,t), \\ \delta\psi^{(2)}(s,t_1) &= -\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}\Big|_{t_1}\delta y(s,t_1), \end{aligned}\right\} \qquad /3.8/$$

$$\left.\begin{aligned} \delta\dot p(t) &= -\frac{\partial g}{\partial z}\delta p(t) - \frac{\partial^2 H}{\partial z^2}\delta z(s_0,t) - \delta\psi^{(1)}(s_0,t),\\ \delta p(t_1) &= -\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\Big|_{(s_0,t_1)}\delta z(s_0,t_1). \end{aligned}\right\} \tag{/3.9/}$$

Прямая проверка показывает, что если матричные функции $Z(n_1\times n_1) = Z(s,t)$, $Y(n_2\times n_1) = Y(s,t)$ удовлетворяют матричным уравнениям

$$\left.\begin{aligned} Z_s &= \frac{\partial f^{(1)}}{\partial z}Z + \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y}Y,\\ Y_t &= \frac{\partial f^{(2)}}{\partial z}Z + \frac{\partial f^{(2)}}{\partial y}Y \end{aligned}\right\} \tag{/3.10/}$$

с начальными условиями

$$\left.\begin{aligned} &Z_t(s_0,t) = \frac{\partial g}{\partial z}Z(s_0,t);\quad Z(s_0,\tau) = I \text{ (единичная матрица)},\\ &Y(s,\tau) = 0, \end{aligned}\right\} \tag{/3.11/}$$

то в области $s\in S$, $t\in[\tau,t_1]$, функции $\delta z(s,t)$ и $\delta y(s,t)$, удовлетворяющие уравнениям /3.5/,/3.6/, связаны соотношением

$$\left.\begin{aligned} \delta z(s,t) &= Z(s,t)\delta z(s_0,\tau);\\ \delta y(s,t) &= Y(s,t)\delta z(s_0,\tau). \end{aligned}\right\} \tag{/3.12/}$$

Аналогичным образом легко установить, что если матричные функции $\psi^{(1)}(n_1\times n_1) = \psi^{(1)}(s,t)$, $\psi^{(2)}(n_2\times n_1) = \psi^{(2)}(s,t)$ удовлетворяют уравнениям

$$\left.\begin{aligned} \psi^{(1)}_s &= -\frac{\partial f^{(1)\prime}}{\partial z}\psi^{(1)} - \frac{\partial f^{(2)\prime}}{\partial z}\psi^{(2)} - \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial z^2}Z - \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial y\partial z}Y,\\ \psi^{(2)}_t &= -\frac{\partial f^{(1)\prime}}{\partial y}\psi^{(1)} - \frac{\partial f^{(2)\prime}}{\partial y}\psi^{(2)} - \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial z\partial y}Z - \frac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial y^2}Y \end{aligned}\right\} \tag{/3.13/}$$

с граничными условиями

$$\left.\begin{aligned} \psi^{(1)}(s_1,t) &= -\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\Big|_{s_1} Z(s_1,t),\\ \psi^{(2)}(s,t_1) &= -\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}\Big|_{t_1} Y(s,t_1), \end{aligned}\right\} \tag{/3.14/}$$

то на функциях

$$\left.\begin{aligned} \delta\psi^{(1)}(s,t) &= \psi^{(1)}(s,t)\delta z(s_0,\tau),\\ \delta\psi^{(2)}(s,t) &= \psi^{(2)}(s,t)\delta z(s_0,\tau) \end{aligned}\right\} \tag{/3.15/}$$

уравнения /3.7/,/3.8/ обращаются в тождества для решений системы /3.5/-/3.6/, записанной в виде /3.10/-/3.12/. Так как решение системы /3.10/-/3.11/ не тривиально, то из первых равенств /3.12/, /3.15/ следует

$$\delta\psi^{(1)}(s_0,t) = \psi^{(1)}(s_0,t)Z^{-1}(s_0,t)\delta z(s_0,t). \tag{/3.16/}$$

Выражение /3.16/ подставим в уравнение /3.9/. Тогда решения системы /3.9/ на решениях системы /3.6/ представимы в виде

$$\delta p(t) = P(t)\delta z(s_0,t),$$

где $(n_1\times n_1)$- матричная функция $P(t)$ удовлетворяет матричному уравнению

$$\left.\begin{aligned}&\dot P(t) = -P(t)\frac{\partial g}{\partial z} - \frac{\partial g'}{\partial z}P(t) - \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} - \psi^{(1)}(s_0,t)Z^{-1}(s_0,t),\\ &P(t_1) = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\Big|_{(s_0,t_1)}.\end{aligned}\right\} \qquad /3.17/$$

Таким образом,

$$\Delta_c P(\tau) = P(\tau)\Delta_v^c g(z(s_0,\tau),v(\tau),\tau)\cdot\varepsilon + o(\varepsilon). \qquad /3.18/$$

Замечание. Для подсчета $P(\tau)$ необходимо:

I) найти решение системы /3.10/ с начальными условиями /3.II/, запомнить его и вычислить

$$Z^{-1}(s_0,t),\quad t\in[\tau,t_1],\quad (\det Z(s,t)\neq 0);$$

2) найти решение первой матричной сопряженной задачи /3.I3/-/3.I4/ и запомнить

$$\psi^{(1)}(s_0,t)Z^{-1}(s_0,t),\quad t\in[\tau,t_1];$$

3) решить вторую матричную сопряженную задачу /3.I7/.

Используя обычные свойства прямой и сопряженной систем, процесс вычисления $P(\tau)$ можно представить одной формулой:

$$P(\tau) = -Z(s_0,t_1)'\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}Z(s_0,t_1) + \int_\tau^{t_1} Z(s_0,t)'\frac{\partial^2 H}{\partial z^2}Z(s_0,t)dt -$$

$$-\int_\tau^{t_1} Z(s_1,t)'\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}Z(s_1,t)dt - \int_{s_0}^{s_1} Y(s,t_1)'\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}Y(s,t_1)ds +$$

$$+\int_{s_0}^{s_1}\int_\tau^{t_1}[Z'Y']\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial z^2} & \dfrac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial y\partial z}\\[2ex] \dfrac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial z\partial y} & \dfrac{\partial^2 H^{(1)}}{\partial y^2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}Z\\ Y\end{bmatrix}dt\,ds, \qquad /3.19/$$

которая, по сути, не упрощает процесс вычисления, а только представляет его в более компактном виде.

С учетом /3.4/, /3.I8/ получим окончательно

$$\Delta_c J(v) = -\int_{\tau-\varepsilon}^{\tau}\Delta_v^c H dt - \frac{\varepsilon^2}{2}\Big[\Delta_v^c\frac{\partial H'}{\partial z}\Delta_v^c g +$$

$$+\Delta_v^c g' P(\tau)'\Delta_v^c g\Big]_{t=\tau} + o(\varepsilon^2). \qquad /3.20/$$

§ 4. Необходимые условия оптимальности

Предположим, что допустимое управление $v^*(t)$ оптимально в поставленной задаче, и пусть $\chi^* = \chi^*(s,t)$ – ему соответствующее решение системы /I.I/-/I.3/. Так как на любых допустимых приращениях к оптимальному управлению $\Delta J(v^*) \geqslant 0$, то из формулы приращения /3.20/ почти всюду на T и для всех $w\in V$ следует

$$H(p(t),z^*(s_0,t),v^*(t),t) \geqslant H(p(t),z^*(s_0,t),w,t), \qquad /4.I/$$

где функция $p=p(t)$ вычисляется путем последовательного решения сопряженных задач /2.5/-/2.6/ при $x^*(s,t), v^*(t)$. Сформулированное необходимое условие оптимальности является естественным распространением принципа максимума Л.С.Понтрягина. Это условие становится не эффективным, т.е. его нельзя использовать для нахождения управлений, "подозрительных" на оптимальность, если соотношение /4.I/ тождественно выполняется вдоль любого допустимого управления. В соответствии с этим допустимое управление $v=v(t)$ будем называть "особым" на множестве $\Omega\subset T$ ненулевой меры, если при всех $w\in V$ неравенство /4.I/ выполняется как тождественное равенство на Ω.

Перейдем к получению необходимых условий оптимальности особого управления. Пусть $v^*(t)$ - особое управление на $\Omega\subset T$ ненулевой меры и внутренняя точка $\tau\in\Omega$ - точка непрерывности этого управления. Построим в этой точке игольчатое приращение так, чтобы $T_c\subset\Omega$. Тогда соответствующее приращение функционала вычисляется по формуле /3.20/, причем согласно определению особого управления интегральный член в ее правой части будет равен нулю. В силу предположения об оптимальности управления $v^*(t)$ левая часть /3.20/ неотрицательна и, следовательно, главный по ε член в правой части должен быть неположительным. Таким образом, приходим к следующему утверждению.

Т е о р е м а. Пусть допустимое управление $v^*(t)$ оптимально в поставленной задаче и особое на $\Omega\subset T$ ненулевой меры. Тогда почти в каждой точке $\tau\in\Omega$ и для всех $w\in V$ выполняется неравенство

$$\left[\Delta_v^c \frac{\partial H'}{\partial x}\Delta_v^c g+\Delta_v^c g' P \Delta_v^c g\right]_{t=\tau}\leqslant 0 \qquad /4.2/$$

с вектор-функцией $p=p(t)$, найденной путем последовательного решения сопряженных задач /2.5/-/2.6/ при $x^*(s,t), v^*(t)$, и матричной функцией $P=P(t)$, вычисленной последовательным решением задач /3.I0/-/3.II/, /3.I3/-/3.I4/, /3.I7/, либо по формуле /3.I9/.

В заключение заметим, что нетрудно выписать результат, симметричный полученному, если граничное условие /I.3/ будет управляемым. Наконец, если в правые части системы /I.I/ будет входить распределенное управление, то необходимые условия оптимальности первого и второго порядка будут объединением настоящего результата и результата работы [I].

Автор благодарит Л.Т.Ащепкова за полезные консультации в процессе написания работы.

Поступила в ред.-изд.отдел
15 сентября 1976 г.

Литература

I. Васильев О.В. К исследованию особого управления в одной системе с распределенными параметрами.-В кн.: Управляемые системы, вып.I5, Новосибирск, I976, с.3-I5.

2.Островский Г.М.,Волин Ю.М. Методы оптимизации сложных химико-технологических систем. М.: Химия , I970.

3. Бекенбах Э.,Беллман Р. Неравенства. М.: Мир , I965.