Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1978 г., выпуск 17.
УДК.519.8

НЕКОТОРЫЕ СЛУЧАИ СВОДИМОСТИ m - СТАНОЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЖОНСОНА К ЗАДАЧЕ С ДВУМЯ СТАНКАМИ

Н.И.Глебов

В статье рассматривается известная задача Джонсона [1] обработки деталей на станках. В общем случае при числе станков больше двух эта задача относится к классу полиномиально полных проблем [4]. Однако в ряде случаев она эффективно решается посредством сведения к некоторой задаче с двумя станками (см., например, [1 - 3]).

Излагаемые ниже результаты содержат различные достаточные условия такой сводимости, обобщающие некоторые из ранее известных. Более подробно исследуются условия сводимости для задачи с тремя станками, а для задач с бо́льшим числом станков приводится лишь формулировка основного результата, иллюстрируемая одним частным случаем.

1. Пусть имеется n деталей, каждая из которых должна пройти обработку на станках A, B и C в указанной последовательности.

Будем использовать следующие обозначения:

$J = \{1, 2, \ldots, n\}$ - множество номеров деталей;

a_j, b_j, c_j - длительности обработки j-й детали на станках A, B и C соответственно;

σ - некоторая перестановка элементов множества J;

$$V = \{(r,s) \mid r \leq s,\ r,s \in J\};$$

$$V_0 = \{(k,k) \mid k \in J\};$$

$$F(\sigma; r,s) = \sum_{j=1}^{r} a_{\sigma(j)} + \sum_{j=r}^{s} b_{\sigma(j)} + \sum_{j=s}^{n} c_{\sigma(j)}, \quad (r,s) \in V;$$

$$F(\sigma; V') = \max_{(r,s)\in V'} F(\sigma; r,s), \qquad V' \subset V.$$

Если детали обрабатываются на каждом станке в последовательности, задаваемой перестановкой σ, то время, затрачиваемое на обработку всех деталей, будет равно $F(\sigma, V)$. Задача состоит в отыскании перестановки σ_0, для которой величина $F(\sigma; V)$ имеет минимальное значение

$$F(\sigma_0; V) = \min_{\sigma} F(\sigma; V). \qquad /1/$$

Для любого V', $V' \subset V$, очевидным образом выполняются неравенства:

$$F(b;V') \leqslant F(b;V),$$
$$\min_b F(b;V') \leqslant \min_b F(b;V),$$

вследствие чего мы получаем нижнюю оценку для оптимального времени обработки $F(b_0;V)$. Кроме того, если

$$F(\bar{b};V') = \min_b F(b;V') = F(\bar{b};V), \qquad /2/$$

то $\bar{b}$ есть оптимальное решение задачи /I/, т.е. исходная задача сводится к вспомогательной задаче (V')

$$\min_b F(b;V'). \qquad /4'/$$

При $V' = V_0$ задача (V_0) сводится, в свою очередь, к задаче определения оптимальной последовательности обработки n деталей на двух станках A' и B' с длительностями обработки j-й детали, равными $a'_j = a_j + b_j$ и $b'_j = b_j + c_j$ соответственно.

В связи с этим естественно заняться исследованием условий /2/ сводимости исходной задачи /I/ к задаче (V_0).

В работе Джонсона [I] были указаны следующие два случая сводимости:

а) $\min_j a_j \geqslant \max_j b_j$;

б) $\min_j c_j \geqslant \max_j b_j$.

В [2] было замечено, что указанная сводимость имеет место при несколько ослабленных ограничениях а) и б), а именно:

а') $a_r \geqslant b_s$ при $r \neq s$, $r,s \in J$;

б') $c_r \geqslant b_s$ при $r \neq s$, $r,s \in J$.

Легко видеть, что задача /I/ сводится к задаче (V_0), если для любой перестановки b и любых $r,s \in J$, $r<s$, найдется такое $k \in J$, что

$$F(b;r,s) \leqslant F(b;k,k). \qquad /3/$$

Так, например, в случае а') неравенство /3/ выполняется при $k=s$, а в случае б') - при $k=r$.

Далее мы будем заниматься изучением условий, при которых

$$F(b;r,s) \leqslant \max\{F(b;r,r),\ F(b;s,s)\}. \qquad /4/$$

Путем элементарных преобразований нетрудно установить, что неравенства /4/ имеют место тогда и только тогда, когда для любых r и s из J, $r \neq s$, и любого подмножества $J' \subset J$, не содержащего r и s, выполняется неравенство

$$\max\Big\{\sum_{j\in J'}(a_j-b_j)+a_s-b_r,\ \sum_{j\in J'}(c_j-b_j)+c_r-b_s\Big\} \geqslant 0 \qquad /5/$$

Пусть X_{rs} есть $(n-2)$-мерное пространство векторов $x=(x_j : j\in J,\ j\neq r,s)$, а E_{rs} - единичный куб в X_{rs}, вершинами которого являются булевы векторы. Тогда при фиксированных

r и s условие /5/ означает, что открытое выпуклое множество
$$G_{rs}=\{x\in X_{rs} \mid \sum_j (a_j-b_j)x_j+a_s-b_r<0,\ \sum_j (c_j-b_j)x_j+c_r-b_s<0\}$$
не содержит никакой вершины куба E_{rs}.

Ограничимся теперь рассмотрением случая, когда G_{rs} вообще не содержит точек куба E_{rs}, т.е. $G_{rs}\cap E_{rs}=\emptyset$. Это будет иметь место тогда и только тогда, когда существует гиперплоскость, разделяющая выпуклые множества G_{rs} и E_{rs} и представимая в виде линейной комбинации ограничивающих G_{rs} гиперплоскостей.

Итак, пусть для любых r и s из J, $r\neq s$, существует $\alpha\in[0,1]$ такое, что неравенство
$$\sum_{j\neq r,s}[\alpha(a_j-b_j)+(1-\alpha)(c_j-b_j)]x_j+\alpha(a_s-b_r)+(1-\alpha)(c_r-b_s)\geq 0$$
выполняется при любом $x\in E_{rs}$. Тогда α должно удовлетворять условию
$$\sum_{j\neq r,s}\min(0,\alpha(a_j-b_j)+(1-\alpha)(c_j-b_j))+\alpha(a_s-b_r)+(1-\alpha)(c_r-b_s)\geq 0, \qquad /6/$$
которое является также и достаточным.

Используя новые обозначения
$$P_j(\alpha)=\alpha a_j-(1-\alpha)b_j,$$
$$Q_j(\alpha)=(1-\alpha)c_j-\alpha b_j$$
и преобразуя в соответствии с этим условие /6/, мы получаем в итоге следующий результат.

Т е о р е м а 1. Если для любых r и s из J, $r\neq s$, существует $\alpha\in[0,1]$, удовлетворяющее неравенству
$$\sum_{j\neq r,s}\min(0,P_j(\alpha)+Q_j(\alpha))+P_s(\alpha)+Q_r(\alpha)\geq 0, \qquad /7/$$
то задача /1/ сводится к задаче (V_0).

З а м е ч а н и е. Не представляет труда выписать ограничения, которым должны удовлетворять длительности обработки деталей для того, чтобы выполнялись условия этой теоремы. Мы не будем здесь этого делать, поскольку получаемые в результате условия не настолько просты, чтобы по ним легко можно было представить те реальные задачи, для которых они имеют место.

В случае выполнения условий теоремы может, вообще говоря, не существовать такое α, при котором неравенство /7/ было бы верным для любых r и s, $r\neq s$. Формулируемая ниже теорема касается того случая, когда это не так.

Т е о р е м а 2. Неравенства /7/ имеют ~~общее~~ решение α тогда и только тогда, когда
$$P_s(\alpha)+Q_r(\alpha)\geq 0 \qquad /8/$$
~~для любых r и s, $r\neq s$~~.

Необходимость условий теоремы очевидна. Для доказательства достаточности заметим, что в данном случае может существовать не более одного значения j_0, для которого $P_{j_0}(\alpha)+Q_{j_0}(\alpha)<0$.

Следовательно, левая часть неравенства /7/ будет равняться либо $P_s(\alpha)+Q_r(\alpha)$, либо $(P_{j_0}(\alpha)+Q_r(\alpha))+(P_s(\alpha)+Q_{j_0}(\alpha))$, $j_0\neq r,s$, так что в любом случае она неотрицательна.

С л е д с т в и е. Если при некотором $\alpha\in[0,1]$ имеет место

$$\min_j[\alpha a_j-(1-\alpha)b_j]+\min_j[(1-\alpha)c_j-\alpha b_j]\geq 0, \qquad /9/$$

то задача /I/ сводится к задаче (V_0).

З а м е ч а н и е. Упоминавшиеся ранее условия сводимости а′) и б′) являются частными случаями /8/, а условия а) и б) - частными случаями /9/ (при $\alpha=1$ и 0).

Рассмотрим, наконец, тот случай, когда существует α, при котором оба минимума, стоящие в левой части неравенства /9/, неотрицательны. Для этого, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы длительности обработки деталей удовлетворяли следующему условию:

$$\max_j\frac{b_j}{c_j}\leq\min_j\frac{a_j}{b_j}. \qquad /10/$$

В частности, это условие будет выполнено, если длительность обработки каждой детали на втором станке не превосходит длительностей ее обработки на первом и на третьем станках, т.е.

$$b_j\leq\min(a_j,c_j),\qquad j\in J. \qquad /11/$$

2. Подход, использованный выше для получения условий /7/-/II/ сводимости задачи с тремя станками к задаче с двумя станками, может быть применен и в случае большего числа станков, если при этом ограничиться поиском оптимального расписания в классе тех расписаний, при которых обработка деталей на каждом станке производится в одной и той же последовательности.

Рассмотрим задачу определения оптимальной последовательности обработки n деталей на m станках $(m>3)$; длительность обработки j-й детали на i-м станке обозначим посредством τ_j^i.

Будем говорить, что данная задача сводится к задаче с двумя станками, если оптимальная последовательность обработки n деталей на станках A' и B' при длительностях обработки деталей, равных $a_j'=\sum_{i=1}^{m-1}\tau_j^i$ и $b_j'=\sum_{i=2}^{m}\tau_j^i$ соответственно, является оптимальной и для исходной задачи.

Обозначим через W совокупность всевозможных троек $[x,y,z]$ натуральных чисел, таких, что $1\leq x<y<z\leq m$. Если $\omega=[x,y,z]\in W$, то положим

$$P_j^\omega(\alpha)=\alpha\sum_{i=x}^{y-1}\tau_j^i-(1-\alpha)\sum_{i=y}^{z-1}\tau_j^i,\qquad j\in J;$$

$$Q_j^\omega(\alpha)=(1-\alpha)\sum_{i=y+1}^{z}\tau_j^i-\alpha\sum_{i=x+1}^{y}\tau_j^i,\qquad j\in J.$$

Пусть W_0 есть множество всех тех троек ω из W, для которых имеет место

$$\max_{\alpha\in[0,1]}\left\{\sum_{j\neq r,s}\min(0,\ P_j^{\omega}(\alpha)+Q_j^{\omega}(\alpha))+P_s^{\omega}(\alpha)+Q_r^{\omega}(\alpha)\right\}\geq 0$$

при любых r и s из J, $r\neq s$.

Систему троек T, $T\subset W$, назовем согласованной, если

I) T содержит тройку вида $[1,y,m]$;

2) T содержит тройку вида $[x,y',y]$ (соответственно $[y,y',z]$), если $[x,y,z]\in T$ и $y-x>1$ $(z-y>1)$.

Тогда обобщением теоремы I будет следующая

Теорема 3. Если W_0 содержит некоторую согласованную систему троек, то исходная m-станочная задача сводится к задаче с двумя станками.

Так, например, в случае $m=4$ согласованная система $T=\{[1,2,3],\ [1,3,4]\}$ будет содержаться в W_0, если

$$\max_{\alpha\in[0,1]}\left\{\min_j[\alpha a_j-(1-\alpha)b_j]+\min_j[(1-\alpha)c_j-\alpha b_j]\right\}\geq 0$$

и

$$\max_{\alpha\in[0,1]}\left\{\min_j[\alpha(a_j+b_j)-(1-\alpha)c_j]+\min_j[(1-\alpha)d_j-\alpha(b_j+c_j)]\right\}\geq 0,$$

или, при переходе к аналогу условия /I0/, если

$$\max_j\frac{b_j}{c_j}\leq\min_j\frac{a_j}{b_j}\quad\text{и}\quad\max_j\frac{b_j+c_j}{d_j}\leq\min_j\frac{a_j+b_j}{c_j}.$$

Здесь d_j - длительность обработки j-й детали на 4-м станке.

Таким образом, используя изложенный подход, можно выделять различные частные случаи многостаночных задач Джонсона, сводящихся к задаче с двумя станками.

Поступила в ред.-изд.отдел
I марта I978 г.

Литература

I. С.Джонсон. Оптимальное расписание для двух- и трехступенчатых процессов с учетом времени наладки.-"Кибернетический сборник", новая серия,М.,I965, вып.I, с. 78-86.

2. В.Я.Бурдюк.О задаче m станков $(m>2)$.-"Кибернетика", Киев, I969, № 3, с. 74-76.

3. W.Szwarc. Optimal Two-Machine Ordering in the 3xn Flow-Shop Problem.-"Operat. Res.", 1977, v. 25, N° 1, p. 70-77.

4. M.R.Garey, D.S.Johnson, R.Sethi. The complexity of flowshop and jobshop scheduling.-"Math. Oper. Res.", 1976, v. 1, № 2, p. 117-129.