Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1978 г., выпуск 17.
УДК.519.8

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ С ОЦЕНКАМИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. III

С.Е.Гвоздев

Данная статья является продолжением статей [1,2]. В ней исследуется метод, основанный на введении ограничения в целевую функцию, применительно к решению задачи дискретного программирования – обобщенной задачи о ранце. Для указанной задачи доказаны оценки погрешности получаемого решения (отклонения от оптимального) и оценки трудоемкости используемого алгоритма.

§ 1. Введение

Задача о ранце проста по своей постановке и трудна для решения. Эта задача имеет многочисленные практические приложения. Ее классическая формулировка состоит в следующем.

Пусть $A,\ c_j,\ a_j,\ j=\overline{1,n}$,- неотрицательные вещественные числа. Требуется найти вектор $x=(x_1,\ \dots,\ x_n)$, удовлетворяющий условиям:

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant A, \qquad /1/$$

$$S = \left\{ x=(x_1,\dots,x_n)/x_j \in \{0,1\},\ \ j=\overline{1,n} \right\}, \qquad /2/$$

на котором достигается максимум функции

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j . \qquad /3/$$

Есть основания предполагать, что принципиально не может быть создан алгоритм, гарантирующий решение задачи о ранце с объемом вычислительных операций, являющимся степенной функцией от длины записи исходной информации [3].

Как правило, в реальных ситуациях пользуются данными (a_j, c_j), вычисленными не точно, а с какой-то погрешностью [4]. Часто задачу о ранце приходится рассматривать как вспомогательную (промежуточную) при решении гораздо более сложных и зачастую решаемых лишь эвристически задач. В таких ситуациях возникает потребность получения решения задачи о ранце малотрудоемкими (например, являющимися степенной функцией от длины записи исходной информации) способами.

Как известно [5. с. 224], справедливо

Утверждение I. Приближенное решение $x_{пр}$ задачи /I/-/3/, погрешность которого не превышает $\max\limits_{1\leqslant j\leqslant n} c_j$, может быть получено путем упорядочения по невозрастанию отношений $c_j/a_j, j=\overline{1,n}$, при этом $x_{пр}=(1,\dots,\underset{m}{1},\underset{m+1}{0},\dots,0)$, где индекс m определяется условием $\sum\limits_{j=1}^{m} a_j \leqslant A < \sum\limits_{j=1}^{m+1} a_j$.

Добавление ограничений в задаче /I/-/3/ делает ее более содержательной, но уже не позволяет применить столь простой прием для ее решения.

В настоящей работе рассматриваются различные обобщения задачи о ранце. Во всех случаях оценивается отклонение приближенного решения от точного и доказывается оценка трудоемкости (объема вычислений и памяти) получения приближенного решения.

Формулы (соотношения) из первой (второй) части данной статьи будем сопровождать римской цифрой I (П) .

§ 2. Предварительные результаты

Для иллюстрации основной идеи метода рассмотрим следующую задачу математического программирования. Пусть на множестве S определены неотрицательные, вещественнозначные функции f и g; A - константа.

Рассмотрим задачу

$$f(x) \longrightarrow \max, \qquad /4/$$

при условиях

$$x\in S, \qquad /5/$$

$$g(x)\leqslant A. \qquad /6/$$

Для решения задачи[ж] /4/-/6/ будем использовать алгоритм, основанный на введении ограничения /6/ в целевую функцию /4/. Согласно этому алгоритму, процесс решения задачи /4/-/6/ состоит в последовательном вычислении функции $\varphi(\lambda)=\max\limits_{x\in S}(f(x)-\lambda g(x)) = f(x_\lambda)-\lambda g(x_\lambda)=f_\lambda-\lambda g_\lambda$ при некоторых значениях параметра $\lambda\geqslant 0$.

Естественно ожидать, что далеко не для всех задач описанный прием позволит получить оптимальное решение. В связи с этим введем понятие ε - оптимального решения.

Под абсолютной погрешностью значения целевой функции $f(\cdot)$ в допустимой точке x задачи /4/-/6/ будем понимать разность $f(x_{опт}) - f(x)$, где $x_{опт}$ - искомое решение, а $f(x_{опт})$ - максимальное значение целевой функции $f(\cdot)$ этой задачи. Если при

[ж] Аналогичные рассуждения применимы для задачи минимизации, при этом знак $\leqslant$ в ограничении /6/ может быть заменен знаком $\geqslant$ см [I].

этом абсолютная погрешность не превышает величины $\varepsilon \geqslant 0$,то x назовем ε -оптимальным решением и обозначим через x_ε .

Приведем ряд утверждений, позволяющих находить "достаточно близкие" к $x_{опт}$ решения задачи /4/-/6/.

Заметим, что если $g(x_\lambda) = A$, то $x_\lambda = x_{опт}$,т.е. x_λ является оптимальным решением задачи /4/-/6/. Пусть теперь при некоторых значениях параметра λ выполняется неравенство

$$\varphi(\lambda') - \varphi(\lambda'') \leqslant \varepsilon_1, \qquad /7/$$

где

$$\varphi(\lambda') = f(x_{\lambda'}) - \lambda' g(x_{\lambda'}), \quad g(x_{\lambda'}) > A, \qquad /8/$$

$$\varphi(\lambda'') = f(x_{\lambda''}) - \lambda'' g(x_{\lambda''}), \quad g(x_{\lambda''}) \leqslant A, \qquad /9/$$

и пусть определена последовательность точек $(x^{(\xi)})$, $\xi = \overline{0,\ell}$, множества S , обладающая свойствами:

$$x^{(0)} = x_{\lambda''}, \ x^{(\ell)} = x_{\lambda'}; \ f(x^{(\xi-1)}) < f(x^{(\xi)}), \ g(x^{(\xi-1)}) < g(x^{(\xi)}), \ \xi = \overline{1,\ell}, \qquad /10/$$

$$\frac{f(x^{(\xi)}) - f(x^{(\xi-1)})}{g(x^{(\xi)}) - g(x^{(\xi-1)})} \geqslant \frac{f(x^{(\xi+1)}) - f(x^{(\xi)})}{g(x^{(\xi+1)}) - g(x^{(\xi)})}, \quad \xi = \overline{1,\ell-1}. \qquad /11/$$

Тогда справедлива

Т е о р е м а I (о получении $(\eta + \varepsilon_1)$ - оптимального решения)[2] . Если выполнены соотношения /7/-/11/, то найдется такой индекс κ, $0 \leqslant \kappa < \ell$, что

$$g(x^{(\kappa)}) \leqslant A < g(x^{(\kappa+1)}), \qquad /12/$$

и $x^{(\kappa)} = x_{\eta + \varepsilon_1}$. ,где $\eta = f(x^{(\kappa+1)}) - f(x^{(\kappa)})$.

Допустим теперь, что в множестве S помимо последовательности $x^{(\xi)}$ выделена совокупность точек $\tilde{x}^{(\xi)}$, $\xi = \overline{0,m}$, удовлетворяющая условиям:

$$\tilde{x}^{(0)} = x^{(\kappa)}, \ \tilde{x}^{(m)} = x^{(\kappa+1)}; \ f(\tilde{x}^{(\xi-1)}) < f(\tilde{x}^{(\xi)}), \ g(\tilde{x}^{(\xi-1)}) < g(\tilde{x}^{(\xi)}), \ \xi = \overline{1,m}, \qquad /13/$$

$$\frac{f(\tilde{x}^{(\xi)}) - f(\tilde{x}^{(\xi-1)})}{g(\tilde{x}^{(\xi)}) - g(\tilde{x}^{(\xi-1)})} \geqslant \frac{f(\tilde{x}^{(\xi+1)}) - f(\tilde{x}^{(\xi)})}{g(\tilde{x}^{(\xi+1)}) - g(\tilde{x}^{(\xi)})}, \quad \xi = \overline{1,m-1}. \qquad /14/$$

Тогда справедливо

С л е д с т в и е I [2]. Если выполнены соотношения /7/-/11/, /13/, /14/, то найдется такой индекс μ, $0 \leqslant \mu < m$, что

$$g(\tilde{x}^{(\mu)}) \leqslant A < g(\tilde{x}^{(\mu+1)}), \qquad /15/$$

и $\tilde{x}^{(\mu)} = x_{\tilde{\eta} + \varepsilon_1}$, где $\tilde{\eta} = f(\tilde{x}^{(\mu+1)}) - f(\tilde{x}^{(\mu)})$.

С л е д с т в и е 2 (о получении ε_1 - оптимального решения). Если существует точка такая $z \in S$, что $g(z) \leqslant A$ и $f(z) \geqslant f(\tilde{x}^{(\mu)}) + (f(\tilde{x}^{(\mu+1)}) - f(\tilde{x}^{(\mu)}))\dfrac{A - g(\tilde{x}^{(\mu)})}{g(\tilde{x}^{(\mu+1)}) - g(\tilde{x}^{(\mu)})}$, то $z = x_{\varepsilon_1}$, т.е. точка z является ε_1-оптимальным решением задачи /4/-/6/.

Справедливость следствия 2 вытекает из доказательства следствия I теоремы I работы [2].

Пусть функции f_λ и g_λ определены в интервале $[\lambda_{min}, \lambda_{max}]$ и принимают конечное число значений. Точки разрыва функции f_λ (g_λ) перенумеруем индексом z $(z=1,2,\dots,R)$ в порядке возрастания параметра λ (можно показать, что точки разрыва функции f_λ совпадают с точками разрыва функции g_λ).

Обозначим $\Delta\lambda = \min\limits_{1<z\leq R-1} (\lambda_{z+1} - \lambda_z)$. Пусть для значений λ' и λ'', определяемых соотношениями /8/,/9/, имеет место

$$\lambda'' - \lambda' \leq \Delta\lambda . \qquad /16/$$

Замечание. Функции $f_{\lambda'}$ и $g_{\lambda'}$ могут определяться неоднозначно, т.е. $\varphi(\lambda') = f_{o\lambda'} - \lambda'$, $g_{o\lambda'} = f_{1\lambda'} - \lambda' g_{1\lambda'} = \dots = f_{m\lambda'} - \lambda' g_{m\lambda'}$. Выберем такую функцию $f_{i\lambda'}$, чтобы имело место соотношение $f_{i\lambda'} > f_{j\lambda'}$, $0 \leq j < m$. Для этого вычислим $\varphi(\lambda)$ при $\lambda = \lambda' + \frac{\Delta\lambda}{3}$. Нетрудно проверить, что $\varphi(\lambda' + \gamma\Delta\lambda) = f_{i\lambda'} - (\lambda' - \gamma\Delta\lambda) g_{i\lambda'}$ для $\gamma \in [0, \frac{1}{2}]$. В дальнейшем для определенности будем считать, что $\varphi(\lambda' + \frac{\Delta\lambda}{3}) = f_{\lambda'} - (\lambda' + \frac{\Delta\lambda}{3}) g_{\lambda'}$ и $\varphi(\lambda'' - \frac{\Delta\lambda}{3}) = f_{\lambda''} - (\lambda'' - \frac{\Delta\lambda}{3}) g_{\lambda''}$.

Покажем, что имеет место

Теорема 2 (о получении η-оптимального решения). Если выполнены соотношения /8/-/12/, /16/, то $x^{(K)} = x_\eta$ $(\eta = f(x^{(K+1)}) - f(x^{(K)}))$.

Доказательство. Из /16/ следует, что для любого λ из интервала $[\lambda', \lambda'']$ функция $f_\lambda (g_\lambda)$ может принимать лишь два значения: $f_{\lambda'} (g_{\lambda'})$ либо $f_{\lambda''} (g_{\lambda''})$, причем при $\lambda^\circ = \frac{f(x_{\lambda'}) - f(x_{\lambda''})}{g(x_{\lambda'}) - g(x_{\lambda''})}$ имеет место равенство

$$\varphi(\lambda^\circ) = f(x_{\lambda'}) - \lambda^\circ g(x_{\lambda'}) = f(x_{\lambda''}) - \lambda^\circ g(x_{\lambda''}).$$

Следовательно, воспользовавшись неравенством /16.П/, получим

$$\varphi(\lambda^\circ) + \lambda^\circ A - f(x^{(K)}) = f(x_{\lambda''}) - f(x^{(K)}) + \lambda^\circ (A - g(x_{\lambda''})) = f(x_{\lambda''}) - f(x^{(K)}) +$$
$$+ (f(x_{\lambda'}) - f(x_{\lambda''})) \frac{A - g(x_{\lambda''})}{g(x_{\lambda'}) - g(x_{\lambda''})} \leq (f(x^{(K+1)}) - f(x^{(K)})) \frac{A - g(x^{(K)})}{g(x^{(K+1)}) - g(x^{(K)})} .$$

Окончательно, учитывая неравенства /12/, /10.П/ и определение η, имеем $F_o(x_{опт}) - f(x^{(K)}) \leq \eta$. Доказательство теоремы 2 закончено.

Следствие (о нахождении $\tilde{\eta}$ - оптимального решения). Если выполнены соотношения /8/-/16/, то $\tilde{x}^{(\mu)} = x_{\tilde{\eta}}$ $(\tilde{\eta} = f(\tilde{x}^{(\mu+1)}) - f(\tilde{x}^{(\mu)}))$.

Далее будем считать, что алгоритм решения задачи /4/-/6/ состоит из последовательности однотипных шагов. На каждом шаге при фиксированном значении λ вычисляется функция $\varphi(\lambda)$.

Предположим, что известно значение λ_{max} параметра λ такое, что $g_{\lambda_{max}} < A$, и известна также величина $\alpha > 0$.

Теорема 3 (о числе шагов работы алгоритма). Априорная оценка числа шагов K_λ работы алгоритма, достаточных для выполнения неравенства $\lambda'' - \lambda' < \alpha$, имеет вид:

$$K_\lambda \sim \log t, \qquad \text{где} \qquad t = \max\{\alpha^{-1}, \lambda_{max}\}.$$

Действительно, положим

$$\lambda_1 = \frac{\lambda_{max}}{2}, \quad \lambda_k = \frac{\lambda''_{k-1} + \lambda'_{k-1}}{2}, \qquad k \geqslant 2, \qquad /17/$$

где

$$\lambda''_{k-1} = \min_{1 \leqslant j \leqslant k-1} \{\lambda_j / A - g_{\lambda_j} > 0\}, \quad \lambda'_{k-1} = \max_{1 \leqslant j \leqslant k-1} \{\lambda_j / g_{\lambda_j} - A > 0\},$$

причем если $g_{\lambda_j} - A > 0$ $(A - g_{\lambda_j} > 0)$ для $1 \leqslant j \leqslant k-1$, то λ''_{k-1} (λ'_{k-1}) полагается равным $\lambda_{max}(0)$, при $g_{\lambda_j} = A$ имеем точное решение. Очевидно, что при таком изменении параметра λ_k через $K_\lambda =]\log(\frac{\lambda_{max}}{\alpha})[$ шагов выполняется неравенство $\lambda''_k - \lambda'_k < \alpha$.

Замечание. Для выполнения неравенства /7/ достаточно положить $\alpha = \frac{\varepsilon}{G}$, где $G = \max_{x \in S} g(x)$.

В самом деле на основании /15.1/ имеем $\varphi(\lambda') - \varphi(\lambda'') \leqslant (\lambda'' - \lambda') g_{\lambda'}$, отсюда следует, что при $\lambda'' - \lambda' \leqslant \frac{\varepsilon}{G}$ справедливо неравенство /7/.

§ 3. Задача о ранце с "блочными" ограничениями на переменные

В этом параграфе рассматриваются две постановки задачи о ранце с дополнительными ограничениями на переменные. В первой постановке переменные булевы (т.е. принимают лишь два значения - 0 либо 1), во второй - неотрицательные целые. Вторая постановка отличается от первой лишь формально, так как, вводя дополнительные переменные, можно от целочисленных переменных перейти к булевым [6, с. 284]. Однако такой переход может привести к значительному увеличению числа булевых переменных. К тому же вторая постановка имеет свою специфику, которая позволяет получить более содержательные результаты в отношении эффективности рассматриваемого здесь подхода, в частности, выделить класс задач, решаемых точно.

3.1. Задача с булевыми переменными. Пусть переменные x_j $(j = \overline{1,n})$ задачи /1/-/3/ разбиты на N непересекающихся групп, причем в пределах k-й группы не менее l_{0k} и не более l_{1k} переменных может быть отлично от нуля. Иными словами, к ограничениям /I/,/2/ добавлены следующие:

$$\ell_{0k} \leqslant \sum_{j\in J_k} x_j < \ell_{1k}, \quad k=\overline{1,N}, \qquad /18/$$

где

$$\bigcup_{k=1}^{N} J_k = \{1,2,\dots,n\}, \quad J_{k_1} \cap J_{k_2} = \emptyset, \quad k_1 \neq k_2. \qquad /19/$$

Будем называть задачу максимизации /3/ при условиях /I/, /2/, /I8/,/I9/ задачей $\mathcal{A}$. Точное решение задачи $\mathcal{A}$ для целых a_j, $j=\overline{1,n}$, с использованием динамического программирования приведено в [7].

Проанализируем возможности получения приближенных решений задачи $\mathcal{A}$ описанным выше подходом. В силу сепарабельности функции $\varphi(\lambda)$ после ввода ограничения /I/ в целевую функцию /3/ получим

$$\varphi(\lambda) = \max_{(2),(18),(19)} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \lambda \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \right) = \sum_{k=1}^{N} \max_{(2),(18)} \sum_{j\in J} (c_j - \lambda a_j) x_j . \quad /20/$$

Нахождение максимума функции $\varphi(\lambda)$ сводится к вычислению

$$\sum_{k=1}^{N} \beta_k(\lambda), \quad \text{где} \quad \beta_k(\lambda) = \max_{(2),(18)} \sum_{j\in J_k} (c_j - \lambda a_j) x_j, \quad k=\overline{1,N}.$$

Для отыскания $\beta_k(\lambda)$ достаточно упорядочить величины $c_j - \lambda a_j$, $j\in J_k$, по невозрастанию. Будем считать, что элементы $c_j - \lambda a_j$ перенумерованы индексом j по невозрастанию.

Введя функцию скачка

$$h(\alpha) = \begin{cases} 1, & \alpha > 0, \\ 0, & \alpha \leqslant 0, \end{cases}$$

получим

$$\beta_k(\lambda) = \sum_{j=1}^{\ell_{0k}} (c_j - \lambda a_j) + \sum_{j=\ell_{0k+1}}^{\ell_{1k}} (h(c_j - \lambda a_j)(c_j - \lambda a_j)). \qquad /21/$$

3.I.I.O $(\tilde{\eta} + \varepsilon_1)$ – оптимальном решении задачи $\mathcal{A}$. Пусть теперь найдены параметры λ' и λ'' такие, что имеет место соотношение /7/, где

$$\varphi(\lambda') = \sum_{k=1}^{N} \beta_k(\lambda') = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j' - \lambda' \sum_{j=1}^{n} a_j x_j', \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j' > A,$$

$$\varphi(\lambda'') = \sum_{k=1}^{N} \beta_k(\lambda'') = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j'' - \lambda'' \sum_{j=1}^{n} a_j x_j'', \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j'' \leqslant A.$$

Для получения приближенного решения задачи $\mathcal{A}$ воспользуемся следствием I теоремы I. С этой целью вначале формально построим последовательности $x^{(\xi)}$ и $\tilde{x}^{(\xi)}$, затем покажем, что они удовлетворяют условиям /10/,/11/,/13/,/14/.

Обозначим $m_k = |J_k|$, $k=\overline{1,N}$. Для определенности предположим, что $J_k = \{\rho_{k-1}+1, \ldots, \rho_k\}$, где $\rho_k = \sum_{t=1}^{k} m_t$, $k=\overline{1,N}$, $\rho_0=0$.

Для построения последовательности $x^{(\xi)}$ рассмотрим значения функции $\beta_k(\lambda)$ в точках λ' и λ'', исключив из рассмотрения индексы k, при которых имеет место равенство $\beta_k(\lambda')=\beta_k(\lambda'')$. Для оставшихся индексов упорядочим величины

$$[\sum_{j=\rho_{k-1}+1}^{\rho_k} c_j(x_j'-x_j'')] \times [\sum_{j=\rho_{k-1}+1}^{\rho_k} a_j(x_j'-x_j'')], \quad k\in\mathcal{L},$$

по невозрастанию. Здесь $\mathcal{L} = \{k\in\{1,2,\ldots,N\} / \beta_k(\lambda')\neq\beta_k(\lambda'')\}$. Обозначим $L=|\mathcal{L}|$, очевидно, что $L\leqslant N$. Будем считать, что величины

$$[\sum_{j=\rho_{\xi-1}+1}^{\rho_\xi} c_j(x_j'-x_j'')] \times [\sum_{j=\rho_{\xi-1}+1}^{\rho_\xi} a_j(x_j'-x_j'')]^{-1}$$

перенумерованы индексом ξ по невозрастанию.

Положим

$$x^{(0)}=(x_1'',\ldots,x_n''),\ x^{(\xi)}=(x_1',\ldots,x_{\rho_\xi}',x_{\rho_\xi+1}'',\ldots,x_{\rho_N}''),\ \xi=\overline{1,L}, \quad /22/$$

тогда

$$f(x^{(\xi)}) = \sum_{j=1}^{\rho_\xi} c_j x_j' + \sum_{j=\rho_\xi+1}^{n} c_j x_j'', \quad \xi=\overline{0,L}, \qquad /23/$$

$$g(x^{(\xi)}) = \sum_{j=1}^{\rho_\xi} a_j x_j' + \sum_{j=\rho_\xi+1}^{n} a_j x_j'', \quad \xi=\overline{0,L}. \qquad /24/$$

Пусть K-й $(0<K<L)$ член последовательности $x^{(\xi)}$ определен соотношением /12/. Для построения последовательности $\tilde{x}^{(\xi)}$ рассмотрим следующие подмножества множества J_{K+1}:

$$I=\{i/x_{\rho_K+i}'\neq x_{\rho_K+i}'',\ i=\overline{1,m_{K+1}}\},\ I_1=\{i\in I/x_{\rho_K+i}'=1\},$$

$$I_2=\{i\in I/x_{\rho_K+i}''=1\}.$$

Введем величины $t_1=\sum_{j=\rho_{K+1}}^{\rho_{K+1}} x_j'$, $t_2=\sum_{j=\rho_{K+1}}^{\rho_{K+1}} x_j''$. Нетрудно заметить, что $t_1=|I_1|$, $t_2=|I_2|$ и $t_2<t_1$. Из множеств I_1 и I_2 выделим элементы

$$j_\rho'' = \min\{i/i\in I_2 \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{\rho-1} j_\alpha''\},\quad \rho=\overline{1,t_2}.$$

$$j'_p = \min\left\{ i / i \in I_1 \setminus \bigcup_{\alpha=1}^{p-1} j'_\alpha \right\}, \quad p=\overline{1,t_1}.$$

Введем n -мерные векторы

$$z^{(p)} = \begin{cases} (0,\ldots,0), & p=0, \\ (0,\ldots,0,\underset{\rho_k+j''_p}{-1},0,\ldots,0,\underset{\rho_k+j'_p}{1},0,\ldots,0), & p=\overline{1,t_2}, \\ (0,\ldots,0,\underset{\rho_k+j'_p}{1},0,\ldots,0), & p=\overline{t_2+1,t_1}, \end{cases}$$

и величины $\tilde{c}_p$ и $\tilde{a}_p$. Величина $\tilde{c}_p$ определена соотношениями

$$\tilde{c}_p = \begin{cases} 0, & p=0, \\ c_{\rho_k+j'_p} - \bar{c}_{\rho_k+j''_p}, & p=\overline{1,t_2}, \\ c_{\rho_k+j'_p}, & p=\overline{t_2+1,t_1}. \end{cases}$$

Обозначениям $\tilde{a}_p$, $p=\overline{0,t_1}$,придадим аналогичный смысл. Исключим из рассмотрения индексы p , для которых $\tilde{a}_p = 0$. Из оставшихся индексов сформируем множество $T=\{p\in\{1,2,\ldots,t_1\}/\tilde{a}_p \neq 0\}$. Упорядочим по невозрастанию отношения $\tilde{c}_p/\tilde{a}_p$, $p\in T$, будем считать, что они перенумерованы с помощью индекса $\ell=1,2,\ldots,t_3$, $t_3=|T|$.

Определим последовательность

$$\tilde{x}^{(\xi)} = x^{(K)} + \sum_{\ell=0}^{\xi} z^{(\ell)}, \quad \xi=\overline{0,t_3}, \qquad /25/$$

тогда

$$f(\tilde{x}^{(\xi)}) = \sum_{j=1}^{\rho_k} c_j x'_j + \sum_{\ell=0}^{\xi} \tilde{c}_\ell + \sum_{j=\rho_k+1}^{n} c_j x''_j, \quad \xi=\overline{0,t_3},$$

$$g(\tilde{x}^{(\xi)}) = \sum_{j=1}^{\rho_k} a_j x'_j + \sum_{\ell=0}^{\xi} \tilde{a}_\ell + \sum_{j=\rho_k+1}^{n} a_j x''_j, \quad \xi=\overline{0,t_3}.$$

Пусть μ -й $(0<\mu<t_3)$ член последовательности $\tilde{x}^{(\xi)}$ определен соотношением /I5/, а $\tilde{\eta} = f(\tilde{x}^{(\mu+1)}) - f(\tilde{x}^{(\mu)}) = \tilde{c}_{\mu+1}$. Очевидно, что $\tilde{c}_{\mu+1} \leqslant c_{max}$, причем при $\tilde{c}_{\mu+1} = c_{\rho_k+j'_{\mu+1}} - c_{\rho_k+j''_{\mu+1}}$ (например, при $t_1 = t_2$) имеет место неравенство $\tilde{c}_{\mu+1} \leqslant c_{max} - c_{min}$. Введенные здесь обозначения $c_{max} = \max_{1\leq j\leq n} c_j$ и $c_{min} = \min_{1\leq j\leq n} c_j$ будем использовать и далее.Тогда справедливо

Утверждение 2. Если выполнено соотношение /7/, то вектор $\tilde{x}^{(\mu)}$ является $(\tilde{\eta} + \varepsilon_1)$ - оптимальным решением задачи A .

Доказательство. Убедимся, что последовательность точек $x^{(\xi)}$ $(\xi=\overline{0,L})$, определенная соотношением /22/,удовлетворяет условиям /I0/ и /II/, $\tilde{x}^{(\xi)}$ $(\xi=\overline{0,t_3})$, построенная согласно /25/, – условиям /13/ и /14/. На основании определения $\varphi(\lambda)$ /20/ имеем

$$\varphi(\lambda')=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq \rho_{\xi-1}+1,\rho_\xi}}^{n}(c_j-\lambda' a_j)x'_j+\sum_{j=\rho_{\xi-1}+1}^{\rho_\xi}(c_j-\lambda' a_j)x'_j\geqslant$$

$$\geqslant\sum_{\substack{j=1\\ j\neq \rho_{\xi-1}+1,\rho_\xi}}^{n}(c_j-\lambda' a_j)x'_j+\sum_{j=\rho_{\xi-1}+1}^{\rho_\xi}(c_j-\lambda' a_j)x''_j.$$

С другой стороны, из /23/, /24/ получаем

$$f(x^{(\xi)})-f(x^{(\xi-1)})=\sum_{j=\rho_{\xi-1}+1}^{\rho_\xi}c_j(x'_j-x''_j)$$

и

$$g(x^{(\xi)})-g(x^{(\xi-1)})=\sum_{j=\rho_{\xi-1}+1}^{\rho_\xi}a_j(x'_j-x''_j),$$

следовательно,

$$f(x^{(\xi)})-f(x^{(\xi-1)})\geqslant\lambda'(g(x^{(\xi)})-g(x^{(\xi-1)})). \qquad /26/$$

Аналогично можно убедиться в справедливости неравенства

$$f(x^{(\xi)})-f(x^{(\xi-1)})\leqslant\lambda''(g(x^{(\xi)})-g(x^{(\xi-1)})). \qquad /27/$$

Но тогда из неравенства $\lambda''\geqslant\lambda'\geqslant 0$, получаемого непосредственно из определения λ'' и λ', следует, что последовательность $x^{(\xi)}$, определяемая соотношением /22/, удовлетворяет /10/, если вспомнить условие $\sum_{j=\rho_{\xi-1}+1}^{\rho_\xi}a_j(x'_j-x''_j)\neq 0$.

Уместно отметить, что из /26/, /27/ и условия $\sum_{j=\rho_{\xi-1}+1}^{\rho_\xi}a_j(x'_j-x''_j)=0$ следует $\sum_{j=\rho_{\xi-1}+1}^{\rho_\xi}c_j(x'_j-x''_j)=0$, т.е. замена x'_j на x''_j $(\rho_{\xi-1}+1\leqslant j\leqslant\rho_\xi)$ не ведет к изменению ни целевой функции $f(\cdot)$, ни функции ограничения $g(\cdot)$ задачи A.

Для доказательства свойства /13/ последовательности $\tilde{x}^{(\xi)}$ заметим, что

$$f(\tilde{x}^{(\xi)})-f(\tilde{x}^{(\xi-1)})=\tilde{c}_\xi,\quad g(\tilde{x}^{(\xi)})-g(\tilde{x}^{(\xi-1)})=\tilde{a}_\xi,\quad \xi=\overline{1,t_3}.$$

Если $\tilde{c}_\xi=c_{\rho_k+j'_\xi}$, $\tilde{a}_\xi=a_{\rho_k+j'_\xi}$, справедливость неравенств $\tilde{c}_\xi\geqslant 0$, $\tilde{a}_\xi\geqslant 0$ следует из неотрицательности величин c_j, a_j, $j=\overline{1,n}$. Рассмотрим случай, когда $\tilde{c}_\xi=c_{\rho_k+j'_\xi}-c_{\rho_k+j''_\xi}$ и $\tilde{a}_\xi=a_{\rho_k+j'_\xi}-a_{\rho_k+j''_\xi}$. Из /20/ и определения элементов j'_ξ и j''_ξ получим

$$\varphi(\lambda')=\sum_{\substack{j=1\\ j\neq\rho_k+j'_\xi}}^{n}(c_j-\lambda a_j)x'_j+(c_{\rho_k+j'_\xi}-\lambda' a_{\rho_k+j'_\xi})\geqslant$$

$$\geqslant \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq \rho_k+j'_\xi}}^{n} (c_j - \lambda' a_j) x'_j + (c_{\rho_k+j''_\xi} - \lambda' a_{\rho_k+j''_\xi}).$$

Следовательно,

$$c_{\rho_k+j'_\xi} - c_{\rho_k+j''_\xi} \geqslant \lambda'(a_{\rho_k+j'_\xi} - a_{\rho_k+j''_\xi}).$$

Аналогично показывается, что

$$c_{\rho_k+j'_\xi} - c_{\rho_k+j''_\xi} \leqslant \lambda''(a_{\rho_k+j'_\xi} - a_{\rho_k+j''_\xi}).$$

Из двух последних неравенств следует неотрицательность величин

$c_{\rho_k+j'_\xi} - c_{\rho_k+j''_\xi}$ и $a_{\rho_k+j'_\xi} - a_{\rho_k+j''_\xi}$. Поскольку при построении последовательности $\tilde{x}^{(\xi)}$ рассматриваются лишь величины $\tilde{a}_\xi \neq 0$, убеждаемся в справедливости неравенства /I3/.

Наконец, из невозрастания отношений

$$\Big[\sum_{j=\rho_{\xi-1}+1}^{\rho_\xi} c_j(x'_j - x''_j)\Big] \times \Big[\sum_{j=\rho_{\xi-1}+1}^{\rho_\xi} a_j(x'_j - x''_j)\Big]^{-1} \quad (\xi = \overline{1,L})$$

и $\tilde{c}_\ell/\tilde{a}_\ell \quad (\ell = \overline{1,t_3})$ следует, что последовательности $x^{(\xi)}$ и $\tilde{x}^{(\xi)}$, построенные согласно /22/, /25/, удовлетворяют соотношениям /II/ и /I4/.

Для доказательства утверждения 2 осталось воспользоваться следствием I теоремы I.

3.I.2. <u>О $\tilde{\eta}$ -оптимальном решении задачи $\mathcal{A}$</u>. Для нахождения $\tilde{\eta}$ -оптимального решения задачи $\mathcal{A}$ воспользуемся следствием теоремы 2. Вначале определим интервал $\Delta\lambda$. Для этого найдем точки λ, в которых функция

$$f_\lambda = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j(\lambda) \qquad (g_\lambda = \sum_{j=1}^{n} a_j x_j(\lambda))$$

терпит разрыв, назовем эти точки критическими. Нетрудно видеть, что критическими могут быть лишь точки множества

$$\hat{\mathcal{L}} = \Big\{\lambda_{ij} / \lambda_{ij} = \frac{c_i - c_j}{a_i - a_j}\,,\ a_i \neq a_j,\ i,j \in J_k,\ k = \overline{1,N}\Big\}.$$

Определив минимальную неотрицательную разность между всеми парами точек множества $\hat{\mathcal{L}}$, оценим интервал $\Delta\lambda$:

$$\Delta\lambda = \min_{k=\overline{1,N}} \ \min_{\rho_{k-1}+1 \leq i, i_1, j, j_1 \leq \rho_k} \Big\{ |\lambda_{ij} - \lambda_{i_1 j_1}| \ \Big|\ \lambda_{ij} \neq \lambda_{i_1 j_1} \Big\}. \qquad /28/$$

Пусть теперь найдены параметры λ'' и λ' такие, что имеет место соотношение /I6/. Рассмотрим функции $\varphi(\lambda' + \frac{\Delta\lambda}{3})$, $\varphi(\lambda'' - \frac{\Delta\lambda}{3})$ и построим, как и раньше, последовательности $x^{(\xi)}$ и $\tilde{x}^{(\xi)}$. Найдя из соотношения /15/ μ -й член последней, в силу следствия теоремы 2, получим

Утверждение 3. Если выполнено соотношение /16/, то вектор $\tilde{x}^{(\mu)}$ является $\tilde{\gamma}$ -оптимальным решением задачи A, т.е. $\tilde{x}^{(\mu)} = x_{\tilde{\gamma}}$.

3.1.3. Оценка трудоемкости вычисления функции $\varphi(\lambda)$.Используя алгоритм упорядочения числовых массивов, изложенный в [8] , легко показать, что для вычисления /21/ достаточно $\sim m_k \log m_k$ операций*/. Следовательно, функцию $\varphi(\lambda)$, определяемую соотношением /20/, можно вычислить за число операций

$$K_{\varphi(\lambda)} \sim \sum_{k=1}^{N} (m_k \log m_k). \qquad /29/$$

Рассмотрим частный случай задачи A , когда оценка /29/ может быть существенно улучшена. Пусть исходные данные c_j и a_j $(j=\overline{\rho_{k-1}+1, \rho_k},\ k=\overline{1,N})$ обладают тем свойством, что последовательность $d_{k\lambda}(j) = c_j - \lambda a_j,\ j=\overline{\rho_{k-1}+1, \rho_k}$ вогнута для всех рассматриваемых значений k и λ . Заметим, что достаточным условием вогнутости последовательности $d_{k\lambda}(j)$ является невозрастание с увеличением a_j отношения $\dfrac{c_{j+1}-c_j}{a_{j+1}-a_j}$, $j=\overline{\rho_{k-1}+1, \rho_k-1}$.

Если последовательность $d_{k\lambda}(j)$ вогнута, то для отыскания ее максимального значения может быть применен метод Фибоначчи [9] , позволяющий за $\sim \log m_k$ операций найти индекс $\hat{j}$,на котором достигается максимум функции $d_{k\lambda}(j)$. Значение функции $\beta_k(\lambda)$ найдем,выбрав лишь ℓ_{1k} "близлежащих" к $\hat{j}$ точек. Эти точки будем выбирать из следующих непересекающихся подмножеств натурального ряда: $\delta_{i1}=\{1,2,\ldots,v_i\}$, $\delta_{i2}=\{\omega_i,\omega_i+1,\ldots,m_k\}$, $i=\overline{1,\ell_{1k}-1}$. Здесь $v_1=\hat{j}-1$, $\omega_1=\hat{j}+1$, а v_i и ω_i , $2<i\leqslant \ell_{1k}-1$, определяются равенствами $v_i = v_{i-1}-(1-\mathrm{sign}(y-v_{i-1}))$, $\omega_i=\omega_{i-1}+(1-\mathrm{sign}(\omega_{i-1}-y))$, где $y=v_{i-1}$,если $d_{k\lambda}(v_{i-1})\geqslant d_{k\lambda}(\omega_{i-1})$, и $y=\omega_{i-1}$, если $d_{k\lambda}(\omega_{i-1})> d_{k\lambda}(v_{i-1})$. Поскольку v_i может принимать значение 0 , а ω_i - значение, равное m_k+1 , доопределим $d_{k\lambda}(0)=d_{k\lambda}(m_k+1)=-\infty$, соответственно $\delta_{i1}=\emptyset$, если $v_i=0$, точно так же $\delta_{i2}=\emptyset$ при $\omega_i=m_k+1$. Введя обозначения

$$\Lambda_1=\{\hat{j}\},\ \Lambda_\alpha=\{\rho_{k-1}+1,\ldots,\rho_k\}\setminus(\delta_{\alpha-1,1}\cup\delta_{\alpha-1,2}),\ \alpha\geqslant 2,$$

функцию /21/ можно записать в виде

$$\beta_k(\lambda)=\sum_{j\in\Lambda_{\ell_{0k}}} d_{k\lambda}(j) + \sum_{j\in\Lambda_{\ell_{1k}}\setminus\Lambda_{\ell_{0k}}} (h(d_{k\lambda}(j))\cdot d_{k\lambda}(j)). \qquad /21'/$$

Очевидно, что для отыскания элементов множества $\Lambda_{\ell_{1k}}$ потребуется $\sim\ell_{1k}$ операций и, следовательно, $P_k\sim\max\{\log m_k,\ \ell_{1k}\}$

*/Под операцией всюду понимается сложение либо сравнение двух чисел.

операций для вычисления значения функции /21'/. Таким образом, трудоемкость вычисления функции $\varphi(\lambda)$ оценивается величиной $\mathcal{K}_{\varphi(\lambda)} \sim \sum_{k=1} p_k$.

З а м е ч а н и е. Выбор ℓ_{1k} "близлежащих" к $\hat{j}$ точек можно осуществить за $\sim \log \ell_{1k}$ операций. Для этого достаточно рассмотреть множества $\tilde{\omega}_i = \{\tilde{v}_i, \tilde{v}_{i+1}, \ldots, \tilde{v}'_i\}$, $i \geq 1$, где

$$\tilde{v}_i = \hat{j} - ((\ell_{1k} - 1) - \left[\frac{\ell_{1k}-1}{2}\right] + \sum_{\ell=1}^{i-1} (\left[\frac{\ell_{1k}-1}{2^{\ell+1}}\right] \cdot sign(d_{k\lambda}(\tilde{v}_\ell) - d_{k\lambda}(\tilde{v}'_\ell)))),$$

$$\tilde{v}'_i = \hat{j} + (\left[\frac{\ell_{1k}-1}{2}\right] - \sum_{\ell=1}^{i-1} (\left[\frac{\ell_{1k}-1}{2^{\ell+1}}\right] \cdot sign(d_{k\lambda}(\tilde{v}_\ell) - d_{k\lambda}(\tilde{v}'_\ell)))).$$

Нетрудно проверить, что множество $\omega_{]\log \ell_{1k}[}$ состоит из искомых ℓ_{1k} точек.

3.I.4. Оценка трудоемкости получения $(\tilde{\eta} + \varepsilon_1)$ и $\tilde{\eta}$ - оптимальных решений задачи $\mathcal{A}$. Алгоритм нахождения $(\tilde{\eta} + \varepsilon_1)$ - оптимального решения задачи $\mathcal{A}$ состоит из двух этапов. На первом, пока $\varphi(\lambda') - \varphi(\lambda'') > \varepsilon_1$, вычисляются значения функции /20/ при разных значениях параметра λ, определяемых формулой /17/. На втором - строятся последовательности $x^{(\xi)}$ и $\tilde{x}^{(\xi)}$ по формулам /22/, /25/.

Вначале оценим число точек λ, в которых вычисляется функция /20/. Для этого оценим величины λ_{max} и G. Нетрудно убедиться, что значение λ, максимальное из рассматриваемых при нахождении функции $\beta_k(\lambda)$, можно ограничить величиной $\max_{\beta_{k-1}+1 \leq i, j \leq \beta_k} \left\{ \frac{c_i - c_j}{a_i - a_j} \,\middle|\, a_i \neq a_j \right\}$. Поскольку $\varphi(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k(\lambda)$,

$$\lambda_{max} = \max_{k=\overline{1,N}} \max_{\beta_{k-1}+1 \leq i, j \leq \beta_k} \left\{ \frac{c_i - c_j}{a_i - a_j} \,\middle|\, a_i \neq a_j \right\} \leq \max_{1 \leq i, j \leq n} \left\{ \frac{c_i - c_j}{a_i - a_j} \,\middle|\, a_i \neq a_j \right\}.$$

Величина G для задачи $\mathcal{A}$, очевидно, оценивается следующим образом:

$$G \leq \sum_{k=1}^{N} \max_{(2),(18)} \sum_{j \in J_k} a_j x_j .$$

Огрубляя полученные оценки, имеем

$$\lambda_{max} \leq G_{max} \cdot (\hat{\alpha})^{-1}, \text{ где } \hat{\alpha} = \min_{1 \leq i, j \leq n} \left\{ |a_i - a_j| \,\middle|\, a_i \neq a_j \right\},$$

$$G \leq n \cdot a_{max}, \qquad \text{где } a_{max} = \max_{1 \leq j \leq n} a_j .$$

В силу теоремы 3 и оценки /29/, первый этап может быть реализован за

$$\mathcal{X}_I \sim \left[\sum_{k=1}^{N} (m_k \cdot \log m_k) \right] \cdot \log t, \text{ где } t = \max\left\{ \varepsilon^{-1}, (\hat{\alpha})^{-1}, n, a_{max}, c_{max} \right\}$$

операций. Нетрудно видеть, что число операций, достаточное для осуществления второго этапа, определяется трудоемкостью упорядочения отношений

$$\left[\sum_{j=\rho_{k-1}+1}^{\rho_k} c_j(x_j'-x_j'')\right]\times\left[\sum_{j=\rho_{k-1}+1}^{\rho_k} a_j(x_j'-x_j'')\right]^{-1}, \ k=\overline{1,L}, \text{ и } \tilde{c}_p/\tilde{a}_p, \ p=\overline{1,t_3}.$$

Следовательно, на этом этапе достаточно выполнить $\mathcal{K}_{II}\sim(N\log N + m_k\cdot\log m_k)$ операций, так как $L\leqslant N$ и $t_3<\ell_{1k}\leqslant m_k$. Ясно, что $\mathcal{K}_{II}\leqslant\mathcal{K}_I$. Таким образом, оценка числа операций для нахождения $(\tilde{\eta}+\varepsilon_1)$- оптимального решения задачи $\mathcal{A}$ имеет вид:

$$\mathcal{K}^{\mathcal{A}}_{(\tilde{\eta}+\varepsilon_1)}\sim n\log^2 t \quad ,\text{где } t=max\left\{\varepsilon^{-1},(\hat{\alpha})^{-1},n,a_{max},c_{max}\right\}. \quad /30/$$

Алгоритмы нахождения $(\tilde{\eta}+\varepsilon_1)$ и $\tilde{\eta}$ - оптимальных решений задачи $\mathcal{A}$ очень похожи. Единственное отличие последнего состоит в том, что число шагов первого этапа определяется выполнением неравенства /I6/, поэтому для получения $\tilde{\eta}$ -оптимального решения достаточно выполнить

$$\mathcal{K}^{\mathcal{A}}_{\tilde{\eta}}\sim n\log^2 t \quad ,\text{где} \quad t = max\left\{(\Delta\lambda)^{-1},(\hat{\alpha})^{-1},n,\ c_{max}\right\} \quad /3I/$$

операций.

Конкретизируем оценку /3I/ для случая целых $c_j, a_j, j=\overline{1,n}$. Легко убедиться, что $\hat{\alpha}\geqslant 1$ и $\Delta\lambda\geqslant\frac{1}{a^2_{max}}$. Следовательно, $\mathcal{K}^{\mathcal{A}}_{\tilde{\eta}}\sim n\log^2 t$,где $t=max\left\{n,a_{max},c_{max}\right\}$.

Каков объем памяти, требуемый для нахождения решений задачи $\mathcal{A}$? На первом этапе результат $(K-1)$-го шага необходим лишь для вычисления параметра λ_K, при этом достаточно хранить в памяти не более двух значений: λ''_{K-1} и λ'_{K-1}. На втором этапе алгоритм упорядочения числовых массивов можно организовать так, чтобы он не требовал дополнительной памяти [8] . Следовательно, объем памяти, достаточный для получения приближенных решений задачи $\mathcal{A}$, будет того же порядка, что и для хранения исходных данных.

3.2. <u>Задача с целочисленными неотрицательными переменными.</u> Будем называть задачу максимизации /3/ при условиях /I/, /2'/, /I8/, /I9/ задачей $\mathcal{B}$, где

$$x_j\in\left\{0,1,2,\ldots\right\},\qquad j=\overline{1,n}. \qquad /2'/$$

Без ограничения общности считаем, что если $c_{j_1}=c_{j_2}$ и $a_{j_1}=a_{j_2}$, то $j_1=j_2$.

Следуя описанному выше алгоритму, для решения задачи $\mathcal{B}$ рассмотрим функцию

$$\varphi(\lambda)=\max_{(2'),(18),(19)}\sum_{j=1}^{n}(c_j-\lambda a_j)x_j=\sum_{k=1}^{N}\max_{(2'),(18)}\sum_{j\in J_k}(c_j-\lambda a_j)x_j=\sum_{k=1}^{N}\beta_k(\lambda). \qquad /32/$$

Найдем элемент $c_{j_k}-\lambda a_{j_k}=\max_{j\in J_k}(c_j-\lambda a_j)$ и получим

$$\beta_k(\lambda)=[h(c_{jk}-\lambda a_{jk})\cdot \ell_{1k}+(1-h(c_{jk}-\lambda a_{jk})):\ell_{0k}]\times(c_{jk}-\lambda a_{jk}). \quad /33/$$

3.2.I.0 $(\tilde{\eta}+\varepsilon_1)$ -оптимальном решении задачи $\mathcal{B}$. Пусть имеет место соотношение /7/. Тогда, используя следствие I теоремы I, для получения приближенного решения достаточно построить последовательности $x^{(\xi)}$, $\xi=\overline{0,L}$, и $\tilde{x}^{(\xi)}$, $\xi=\overline{0,t_3}$.

При известных $\beta_k(\lambda)$ последовательность $x^{(\xi)}$ строится согласно соотношению /22/, поэтому справедливость свойств /I0/,/II/ для $x^{(\xi)}$ следует из доказательства утверждения 2.

Построение последовательности $\tilde{x}^{(\xi)}$ упрощается заменой ограничения /2/ на /2'/, поскольку не требуется предварительного упорядочения каких-либо величин, и производится по формуле /25/, где

$$z^{(\ell)}=\begin{cases}(0,\dots,0), & \ell=0,\\ (0,\dots,0,\underset{\rho_k+j'_{k+1}}{1},0,\dots,0), & \ell=\overline{1,t_1-t_2},\\ (0,\dots,0,\underset{\rho_k+j''_{k+1}}{-1},0,\dots,0,\underset{\rho_k+j'_{k+1}}{1},0,\dots,0), & \ell=\overline{t_1-t_2+1,t_1}\end{cases} \quad /34/$$

Здесь индексы $\rho_k+j''_{k+1}$ и $\rho_k+j'_{k+1}$ определяются из равенств

$$c_{\rho_k+j''_{k+1}}-\lambda'' a_{\rho_k+j''_{k+1}}=\max_{\rho_k+1\le j\le\rho_{k+1}}(c_j-\lambda'' a_j),\quad c_{\rho_k+j'_{k+1}}-\lambda a_{\rho_k+j'_{k+1}}=\max_{\rho_k+1\le j\le\rho_{k+1}}(c_j-\lambda'' a_j), \quad /35/$$

а величины t_1 и t_2 -из равенств $t_1=\sum\limits_{j=J_{k+1}} x'_j$, $t_2=\sum\limits_{j\in J_{k+1}} x''_j$.

Пусть μ -й $(0\le\mu<t_1)$ член последовательности $\tilde{x}^{(\xi)}$ определен соотношением /I5/. Положим $\tilde{\eta}=f(\tilde{x}^{(\mu+1)})-f(\tilde{x}^{(\mu)})=\tilde{c}_{\mu+1}$. Очевидно, что при $\mu+1\le t_1-t_2+1$ $\tilde{c}_{\mu+1}\le c_{max}$, а при $\mu+1\ge t_1-t_2+1$ имеет место неравенство $\tilde{c}_{\mu+1}\le c_{max}-c_{min}$.

Утверждение 4. Если выполнено неравенство /7/, то вектор $\tilde{x}^{(\mu)}$, определяемый соотношениями /I5/,/25/,/34/, является $(\tilde{\eta}+\varepsilon_1)$ - оптимальным решением задачи $\mathcal{B}$.

Доказательство. Покажем сначала справедливость соотношений /I3/ и /I4/ для последовательности $\tilde{x}^{(\xi)}$, построенной согласно /25/, /34/. Положим

$$\tilde{c}_\xi=\begin{cases}c_{\rho_k+j'_{k+1}}, & \xi=\overline{1,t_1-t_2},\\ c_{\rho_k+j'_{k+1}}-c_{\rho_k+j''_{k+1}}, & \xi=\overline{t_1-t_2+1,t_1},\end{cases}$$

обозначениям $\tilde{a}_\xi$, $\xi=\overline{1,t_1}$ придадим аналогичный смысл, тогда

$$f(\tilde{x}^{(\xi)})-f(\tilde{x}^{(\xi-1)})=\tilde{c}_\xi,\quad g(\tilde{x}^{(\xi)})-g(\tilde{x}^{(\xi-1)})=\tilde{a}_\xi,\quad \xi=\overline{1,t_1}.$$

При $\xi\le t_1-t_2$ из неотрицательности величин c_j и a_j, $j=\overline{1,n}$, следует, что $\tilde{x}^{(\xi)}$ удовлетворяет /I3/. Пусть $\xi\ge t_1-t_2+1$ в силу определения /32/ функции $\varphi(\lambda)$ и равенств /33/ запишем

$$\varphi(\lambda')=\sum_{j=1}^{n}(c_j-\lambda' a_j)x_j \geq \sum_{j=1}^{n}(c_j-\lambda' a_j)x_j-(c_{\rho_k+j'_{k+1}}-\lambda' a_{\rho_k+j'_{k+1}})+$$
$$+(c_{\rho_k+j''_{k+1}}-\lambda' a_{\rho_k+j''_{k+1}}).$$

Следовательно,

$$c_{\rho_k+j'_{k+1}}-c_{\rho_k+j''_{k+1}} \geq \lambda'(a_{\rho_k+j'_{k+1}}-a_{\rho_k+j''_{k+1}}). \qquad /36/$$

Справедливость неравенства

$$c_{\rho_k+j'_{k+1}}-c_{\rho_k+j''_{k+1}} \leq \lambda''(a_{\rho_k+j'_{k+1}}-a_{\rho_k+j''_{k+1}}) \qquad /37/$$

показывается аналогично. Из двух последних неравенств и следует, что $c_{\rho_k+j'_{k+1}}-c_{\rho_k+j''_{k+1}} \geq 0$ и $a_{\rho_k+j'_{k+1}}-a_{\rho_k+j''_{k+1}} \geq 0$, причем равенство нулю выполняется одновременно для обеих разностей, а это означает совпадение индексов $\rho_k+j'_{k+1}$ и $\rho_k+j''_{k+1}$. Следовательно, последовательность $\tilde{x}^{(s)}$ удовлетворяет соотношению /13/.

Для доказательства свойства /14/ достаточно показать, что

$$\frac{c_{\rho_k+j'_{k+1}}}{a_{\rho_k+j'_{k+1}}} \geq \frac{c_{\rho_k+j'_{k+1}}-c_{\rho_k+j''_{k+1}}}{a_{\rho_k+j'_{k+1}}-a_{\rho_k+j''_{k+1}}}. \qquad /38/$$

Действительно, из /36/, /37/ имеем

$$\frac{c_{\rho_k+j'_{k+1}}-\lambda'' a_{\rho_k+j'_{k+1}}}{c_{\rho_k+j''_{k+1}}+\lambda'' a_{\rho_k+j''_{k+1}}} \leq \frac{c_{\rho_k+j'_{k+1}}-\lambda' a_{\rho_k+j'_{k+1}}}{c_{\rho_k+j''_{k+1}}-\lambda' a_{\rho_k+j''_{k+1}}}$$

или

$$\frac{c_{\rho_k+j'_{k+1}}}{a_{\rho_k+j'_{k+1}}} \leq \frac{c_{\rho_k+j''_{k+1}}}{a_{\rho_k+j''_{k+1}}},$$

откуда с учетом неотрицательности правых и левых частей неравенств /36/,/37/ следует /38/. Тем самым показана справедливость свойства /14/ для последовательности $\tilde{x}^{(s)}$.

Для доказательства утверждения 4 осталось применить следствие I теоремы I.

3.2.2. <u>О $\tilde{\eta}$ -оптимальном решении задачи $\mathcal{B}$</u>. Очевидно, если параметры λ'' и λ' удовлетворяют соотношению /16/, где $\Delta\lambda$ определено /28/, то на основании следствия теоремы 2 справедливо

У т в е р ж д е н и е 5. Если выполнено неравенство $\lambda''-\lambda' \leq \Delta\lambda$, то вектор $\tilde{x}^{(\mu)}$, определяемый соотношениями /15/, /25/, /34/, есть $\tilde{\eta}$ -оптимальное решение задачи $\mathcal{B}$.

3.2.3. <u>О возможности получения ε_1 -оптимального решения задачи $\mathcal{B}$</u>. Опишем класс задач, для которого предложенный метод гарантирует получение ε_1 -оптимального, решения. Пусть для k -й группы (индекс k определяется из условия $g(x^{(k)}) \leq A < g(x^{(k+1)})$) отношение

$$\frac{c_{j+1}-c_j}{a_{j+1}-a_j}, \qquad j=\overline{\rho_{k-1}+1,\ \rho_k-1},$$

не возрастает с увеличением a_j и найдется индекс $\rho_k+\zeta$ такой, что

$$a_{\rho_k+\zeta}=A-g(\tilde{x}^{(\mu)})+h(\mu+1-(t_1-t_2))\cdot a_{\rho_k+j_{k+1}''}, \qquad /39/$$

здесь h – функция скачка.

Заметим, что достаточными условиями выполнения равенства /39/ являются: I/ величины a_j $(\rho_{k-1}+1\leq j\leq \rho_k)$ в пределах k -й $(k=\overline{1,N})$ группы образуют арифметическую прогрессию с разностью Δa, одинаковой для всех N групп; 2/ a_{ρ_k} кратно Δa. Тогда, не ограничивая общности, можно считать, что A кратно Δa.

Введем вектор

$$z_{\varepsilon_1}=\begin{cases}(0,\ldots,0,\underset{\rho_k+\zeta}{1},0,\ldots,0),\text{ если } \mu+1\leq t_1-t_2,\\ 0,\ldots,\underset{\rho_k+j_{k+1}''}{-1},\ldots,0,\ldots,0,\underset{\rho_k+\zeta}{1},0,\ldots,0) - \text{ в противном случае.}\end{cases}$$

Тогда вектор $x_{\varepsilon_1}=\tilde{x}^{(\mu)}+z_{\varepsilon_1}$ является ε_1 -оптимальным решением задачи $\mathcal{B}$.

В самом деле, в силу сепарабельности функции $g(\cdot)$ имеем $g(x_{\varepsilon_1})=g(\tilde{x}^{(\mu)})+g(z_{\varepsilon_1})=A$, а из невозрастания $\dfrac{c_{j+1}-c_j}{a_{j+1}-a_j}$ с увеличением a_j, $\rho_k+1\leq j\leq \rho_{k+1}$, следует

$$(f(\tilde{x}^{(\mu+1)})-f(\tilde{x}^{(\mu)}))\frac{A-g(\tilde{x}^{(\mu)})}{g(\tilde{x}^{(\mu+1)})-g(\tilde{x}^{(\mu)})}\leq \tilde{c}_{\mu+1}\cdot\frac{A-g(\tilde{x}^{(\mu)})}{\tilde{a}_{\mu+1}}\leq f(z_{\varepsilon_1}).$$

Таким образом, из следствия 2 теоремы I вытекает

Утверждение 6. Вектор $x_{\varepsilon_1}=\tilde{x}^{(\mu)}+z_{\varepsilon_1}$ является ε_1 -оптимальным решением задачи $\mathcal{B}$.

3.2.4. Оценка трудоемкости получения $(\tilde{\eta}+\varepsilon_1)$, $\tilde{\eta}$ и ε_1 - оптимальных решений задачи $\mathcal{B}$. Алгоритмы нахождения $(\tilde{\eta}+\varepsilon_1)$ и $\tilde{\eta}$ - оптимальных решений задачи $\mathcal{B}$ осуществляются по тем же схемам, что и для задачи $\mathcal{A}$. Отличие в оценке числа операций заключается в том, что трудоемкость вычисления функции $\varphi(\lambda)$, определяемой соотношением /32/, составляет $\sim\sum_{k=1}^{N}m_k=n$ операций. Следовательно, учитывая /30/, число операций для получения $(\tilde{\eta}+\varepsilon_1)$ -оптимального решения задачи $\mathcal{B}$ оценится величиной:

$$K^{\mathcal{B}}_{(\tilde{\eta}+\varepsilon_1)}\sim n\log t,\ \text{где } t=\max\left\{\varepsilon^{-1},(\alpha)^{-1},n,a_{max},c_{max}\right\}. \qquad /40/$$

Используя /3I/, получаем соответствующую оценку для отыскания $\tilde{\eta}$ -оптимального решения задачи $\mathcal{B}$:

$$K^{\mathcal{B}}_{\tilde{\eta}}\sim n\log t,\quad \text{где } t=\max\left\{(\Delta\lambda)^{-1},(\alpha)^{-1},c_{max}\right\}. \qquad /41/$$

Предположим, что задача $\mathcal{B}$ допускает нахождение ε_1-оптимального решения описанным выше приемом. Поскольку вектор z_{ε_1}

строится за $\sim m_K$ операций, число операций $\mathcal{K}_{\varepsilon_1}^{\mathcal{B}}$ может быть оценено величиной /40/, а для получения точного решения задачи $\mathcal{B}$ достаточно выполнить число операций, определяемое соотношением /41/.

Для получения решений задачи $\mathcal{B}$ достаточен объем памяти того же порядка, что и требуемый для хранения ее исходных данных, тем более, что на втором этапе решения обходимся без упорядочения величин $\tilde{c}_p/\tilde{a}_p$, $p=\overline{1,t_3}$.

Описанные алгоритмы могут быть использованы при решении задач о раскрое в случае, когда ограничено число ножей, применяемых в установке для резки бумаги (см., например, [10]).

В заключение автор выражает благодарность Э.Х.Гимади за постановку задачи и обсуждение результатов данной работы.

Поступила в ред.-изд.отдел.
21 декабря 1977 г.

Литература

1. Гвоздев С.Е. Об одном алгоритме с оценками для решения некоторых задач математического программирования. I.-В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1977, вып. 16, с.47-62.

2. Гвоздев С.Е. Об одном алгоритме с оценками для решения некоторых задач математического программирования. II. -В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1977, вып. 17. с. 13-27.

3. Karp R.M. Reducibility among Combinatorial problems, Complexity of computer computations. Proc. Symp. March. 20-22, 1977, с.85-103. Русский перевод: Карп Р.М. Сводимость комбинаторных проблем.-Кибернетический сборник, новая серия, вып. 12, М., 1975, с. 16-38.

4. Моргенштерн О. О точности экономико-статистических наблюдений. М., Изд-во "Статистика", 1968, 296 с.

5. Саати Т. Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы. М., Изд-во "Мир", 1973, 304 с.

6. Вагнер Г. Основы исследования операций. Т. 2. М., Изд-во "Мир", 1973, с.488.

7. Гвоздев С.Е. Об одном обобщении задачи о ранце. - В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1976, вып.15, с. 16-31.

8. Кронрод М.А. Оптимальный алгоритм упорядочения без рабочей памяти. - "Докл. АН СССР", 1969, т. 186, № 6, с.1256-1258.

9. Gilmore P.C. and Gomory R.E., A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem, Part II. Operations Res., Nov.-Dec., 1963, pp. 863-888.

IO. Уайлд Д.ДЖ. Методы поиска экстремума. М., "Наука", 1967, 268 с.