Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1976 г., выпуск 17.
УДК.519.8

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ С ОЦЕНКАМИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. П

С.Е.Гвоздев

В данной статье, которая является продолжением статьи [I], рассматривается метод решения задач математического программирования, основанный на введении ограничения в целевую функцию.

Пусть S - дискретное множество, а $f(x)$, $g(x)$ - функции, определенные на этом множестве, A - константа.

Решается задача

$$f(x) \longrightarrow max \qquad /I/$$

при ограничениях:

$$x \in S, \qquad /2/$$

$$g(x) \leqslant A. \qquad /3/$$

Каждой точке $x \in S$ поставим в соответствие два числа $z = f(x)$ и $y = g(x)$. Таким образом, все множество S отобразится на подмножество Ω плоскости $Y \times Z = R^2$. На множество Ω натянем выпуклую линейную оболочку Ω'.

Рассмотрим вместо исходной экстремальной задачи /I/-/3/ экстремальную задачу без ограничения /3/, в целевую функцию которой в качестве параметра входит множитель λ :

$$\varphi(\lambda) = max(f(x) - \lambda g(x)) \qquad /4/$$

при ограничении $x \in S$.

Нетрудно показать, что решением задачи /4/, /2/ будет граничная точка множества Ω'. Меняя множитель λ, получаем все граничные точки множества Ω. Очевидно, что, решив при определенном значении параметра λ задачу /4/, /2/, можно получить точное решение задачи /I/-/3/ лишь в случае совпадения соответствующих граничных точек множеств Ω и Ω'. В противном случае получаем приближенное решение исходной задачи, причем величина отклонения приближенного решения от точного зависит от "степени отличия" множеств Ω от множества Ω'. В ряде случаев это отличие удается заранее оценить и тем самым получить априорную оценку погрешности приближенного решения.

Под абсолютной погрешностью значения целевой функции $f(x)$ в допустимой точке $\bar{x}$ задачи /I/-/3/ будем понимать разность $|F_0(x_{опт}) - f(\bar{x})|$, где $x_{опт}$ - искомое решение, а $F_0(x_{опт})$ экстремальное значение целевой функции $f(x)$ задачи /I/-/3/. Если при этом абсолютная погрешность не превышает величины $\varepsilon>0$,то $f(\bar{x})$ назовем ε - оптимальным значением целевой функции и обозначим через $F_{\varepsilon}(\bar{x})$, а $\bar{x}$ - ε -оптимальным решением.

§ I. Нахождение решения задачи /I/-/3/ в случае дискретности множества Ω

Пусть зафиксированы два значения параметра λ такие, что

$$\varphi(\lambda') = \max_{x\in S}(f(x)-\lambda' g(x)) = f(x_1)-\lambda' g(x_1), \quad g(x_1)>A ;$$
$$\varphi(\lambda'') = \max_{x\in S}(f(x)-\lambda'' g(x)) = f(x_2)-\lambda'' g(x_2), \quad g(x_2)\leqslant A ;$$

и определена последовательность точек $(x^{(\xi)}),\ \xi=\overline{0,\ell}$, множества S , обладающая свойствами:

$$x_2 = x^{(0)},\ x_1^{(0)} = x^{(\ell)},\ g(x^{(\xi-1)})<g(x^{(\xi)}),\ f(x^{(\xi-1)})\leqslant f(x^{(\xi)}),\ \xi=\overline{1,\ell}; \qquad /5/$$

$$\frac{f(x^{(\xi)})-f(x^{(\xi-1)})}{g(x^{(\xi)})-g(x^{(\xi-1)})} \geqslant \frac{f(x^{(\xi+1)})-f(x^{(\xi)})}{g(x^{(\xi+1)})-g(x^{(\xi)})},\quad \xi=\overline{1,\ell-1}. \qquad /6/$$

Тогда справедлива

Т е о р е м а I. Если $\varphi(\lambda')-\varphi(\lambda'')\leqslant\varepsilon$, то найдется такой индекс K , $0\leqslant K<\ell$, что

$$g(x^{(K)})\leqslant A<g(x^{(K+1)}), \qquad /7/$$

и $x^{(K)}$ является $(\eta+\varepsilon)$ - оптимальным решением, где $\eta=f(x^{(K+1)})-f(x^{(K)})$.

Другими словами, в условиях теоремы имеем:

$$F_{\eta+\varepsilon}(x^{(K)}) = f(x^{(K)}). \qquad /8/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Существование индекса K ,удовлетворяющего /7/, следует из определения последовательности $(x^{(\xi)}),\ \xi=\overline{0,\ell}$. Для проверки соотношения /8/ достаточно убедиться в справедливости неравенства

$$F_0(x_{опт})-f(x^{(K)})\leqslant\eta+\varepsilon . \qquad /9/$$

Неравенство /9/ разобьем на следующую цепочку неравенств:

$$F_0(x_{опт})-f(x^{(K)})\leqslant\varphi(\lambda')+\lambda' A-f(x^{(K)})=\theta_1, \qquad /10/$$

$$\theta_1\leqslant f(x_2)-f(x^{(K)})+(f(x_1)-f(x_2))\frac{A-g(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}+\varepsilon=\theta_2, \qquad /11/$$

$$\theta_2\leqslant(f(x^{(K+1)})-f(x^{(K)}))\frac{A-g(x^{(K)})}{g(x^{(K+1)})-g(x^{(K)})}+\varepsilon=\theta_3, \qquad /12/$$

$$\theta_3\leqslant\eta+\varepsilon \qquad /13/$$

и докажем отдельно каждое из них.

Для доказательства /10/ достаточно заметить, что $\varphi(\lambda') = \max\limits_{x\in S}(f(x) - \lambda' g(x)) \geqslant F_0(x_{опт}) - \lambda' g(x_{опт})$. Но $g(x_{опт}) \leqslant A$, а следовательно, $\varphi(\lambda') \geqslant F_0(x_{опт}) - \lambda' A$. Что и требовалось.

Справедливость неравенства /11/ следует непосредственно из неравенств /1.22/, /1,23/, /1,24/.[ж]

Доказательство неравенства /12/. На основании /5/, /6/ запишем цепочку неравенств

$$\frac{f(x^{(1)}) - f(x_2)}{g(x^{(1)}) - g(x_2)} \geqslant \frac{f(x^{(2)}) - f(x^{(1)})}{g(x^{(2)}) - g(x^{(1)})} \geqslant \ldots \geqslant \frac{f(x^{(K)}) - f(x^{(K-1)})}{g(x^{(K)}) - g(x^{(K-1)})} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{f(x^{(K+1)}) - f(x^{(K)})}{g(x^{(K+1)}) - g(x^{(K)})} \geqslant \frac{f(x^{(K+2)}) - f(x^{(K+1)})}{g(x^{(K+2)}) - g(x^{(K+1)})} \geqslant \ldots \geqslant \frac{f(x_1) - f(x^{(\ell-1)})}{g(x_1) - g(x^{(\ell-1)})}.$$

Просуммировав отдельно числители и знаменатели первых K членов и числители и знаменатели всей цепочки, получим

$$\frac{f(x^{(K)}) - f(x_2)}{g(x^{(K)}) - g(x_2)} \geqslant \frac{f(x_1) - f(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)}. \qquad /14/$$

Если же просуммировать аналогично числители и знаменатели $(K+1)$ членов, то

$$\frac{f(x^{(K+1)}) - f(x_2)}{g(x^{(K+1)}) - g(x_2)} \geqslant \frac{f(x_1) - f(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)}. \qquad /15/$$

Умножим правую и левую части неравенства /14/ на $(1-\alpha)$, где $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, а правую и левую части неравенства / 15/ на α и сложим полученные неравенства. Произведя перегруппировку членов, получим

$$f(x^{(K)}) + (f(x^{(K+1)}) - f(x^{(K)}))\alpha \geqslant f(x_2) +$$

$$+ (f(x_1) - f(x_2)) \frac{g(x^{(K)}) - g(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} + \alpha (f(x_1) - f(x_2)) \frac{g(x^{(K+1)}) - g(x^{(K)})}{g(x_1) - g(x_2)}.$$

Из /7/ следует, что можно взять $\alpha = \dfrac{A - g(x^{(K)})}{g(x^{(K+1)}) - g(x^{(K)})}$, тогда

$$f(x^{(K)}) + (f(x^{(K+1)}) - f(x^{(K)})) \frac{A - g(x^{(K)})}{g(x^{(K+1)}) - g(x^{(K)})} \geqslant$$

$$\geqslant f(x_2) + (f(x_1) - f(x_2)) \frac{A - g(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)}, \qquad /16/$$

откуда и получаем неравенство /12/. Для проверки /13/ достаточно воспользоваться соотношением /7/ и определением величины η.

[ж] Здесь и далее цифра I означает, что имеется в виду соответствующая формула (теорема) первой части работы (см. [11]).

Таким образом, неравенства /10/-/12/ доказаны, этим завершается доказательство теоремы 1.

Допустим теперь, что в множестве S, помимо последовательности $x^{(\xi)}$, выделена совокупность точек $\tilde{x}^{(\xi)}$, $\xi=\overline{0,m}$, удовлетворяющая условиям

$$x^{(K)}=\tilde{x}^{(0)},\ x^{(K+1)}=\tilde{x}^{(m)},\ g(\tilde{x}^{(\xi-1)})<g(\tilde{x}^{(\xi)}),\ f(\tilde{x}^{(\xi-1)})\leqslant f(\tilde{x}^{(\xi)}), \xi=\overline{1,m}, \quad /5'/$$

$$\frac{f(x^{(\xi)})-f(\tilde{x}^{(\xi-1)})}{g(\tilde{x}^{(\xi)})-g(\tilde{x}^{(\xi-1)})}\geqslant\frac{f(\tilde{x}^{(\xi+1)})-f(\tilde{x}^{(\xi)})}{g(\tilde{x}^{(\xi+1)})-g(\tilde{x}^{(\xi)})},\quad \xi=\overline{1,m-1}. \quad /6'/$$

Тогда справедливо

С л е д с т в и е 1. Если $\varphi(\lambda')-\varphi(\lambda'')\leqslant\varepsilon$, то найдется такой индекс μ, $0\leqslant\mu<m$, что

$$g(\tilde{x}^{(\mu)})\leqslant A<g(\tilde{x}^{(\mu+1)}), \quad /7'/$$

и $\tilde{x}^{(\mu)}$ является $(\eta_1+\varepsilon)$ - оптимальным решением, где $\eta_1 = f(\tilde{x}^{(\mu+1)})-f(\tilde{x}^{(\mu)})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, из соотношений /5'/, /6'/ следует существование индекса μ, удовлетворяющего /7'/. Нетрудно заметить также, что $f(x^{(K)})\leqslant f(\tilde{x}^{(\mu)})\leqslant F_0(x_{опт})$. Поэтому $F_0(x_{опт})-f(\tilde{x}^{(\mu)})\leqslant F_0(x_{опт})-f(x^{(K)})$. Таким образом, учитывая неравенства /10/, /11/, можно записать

$$F_0(x_{опт})-f(\tilde{x}^{(\mu)})\leqslant(f(x^{(K+1)})-f(x^{(K)}))\frac{A-g(x^{(K)})}{g(x^{(K+1)})-g(x^{(K)})}+\varepsilon=\theta_3.$$

Далее, на основании /5'/, /6'/, по аналогии с доказательством неравенства /12/ показывается, что

$$\theta_3\leqslant(f(\tilde{x}^{(\mu+1)})-f(\tilde{x}^{(\mu)}))\frac{A-g(\tilde{x}^{(\mu)})}{g(\tilde{x}^{(\mu+1)})-g(\tilde{x}^{(\mu)})}+\varepsilon=\theta_4.$$

Учитывая соотношение /7'/ и равенство $\eta_1=f(\tilde{x}^{(\mu+1)})-f(\tilde{x}^{(\mu)})$, получаем $\theta_4\leqslant\eta_1+\varepsilon$. Следовательно, $F_0(x_{опт})-f(\tilde{x}^{(\mu)})\leqslant\eta_1+\varepsilon$. Следствие 1 доказано.

С л е д с т в и е 2. Если в соотношении /7/ имеет место равенство $g(x^{(K)})=A$, то теорема 1 гарантирует получение ε - оптимального решения.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На основании /14/ можно записать

$$f(x^{(K)})\geqslant f(x_2)+(f(x_1)-f(x_2))\frac{A-g(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)},$$

но тогда, в силу замечания к теореме I.2, $F_\varepsilon(x^{(K)})=f(x^{(K)})$.

Таким образом, справедливость следствия 2 доказана.

Рассмотрим еще один случай, когда ε -оптимальное решение задачи /I/-/3/ содержится в последовательности точек $(x^{(\xi)})$, $\xi=\overline{0,l}$, удовлетворяющей условиям /5/, /6/.

Разобьем множество S на классы эквивалентности следующим образом: x' и x'' принадлежит одному классу, если и только если $g(x')=g(x'')$. Пусть P - совокупность классов эквивалентности, определяемая точками x, для которых имеет место соотношение $g(x_1)\leqslant g(x)\leqslant g(x_2)$, а $p=|P|$. В дальнейшем через F_i $(i=\overline{1,p})$ будем обозначать значение целевой функции /I/ задачи /I/-/3/ на i -м классе эквивалентности, через g_i $(i=\overline{1,p})$- значение функции g на этом классе. Классам эквивалентности присвоим номера так, чтобы $g_1<g_2<\dots<g_p$.

Т е о р е м а 2. Если $\varphi(\lambda')-\varphi(\lambda'')\leqslant\varepsilon$ и число точек последовательности $(x^{(\xi)})$ равно p, то найдется такой индекс K, $0\leqslant K<P$, что $g(x^{(K)})\leqslant A<g(x^{(K+1)})$ и $x^{(K)}$ является ε -оптимальным решением, т.е. $F_\varepsilon(x^{(K)})=f(x^{(K)})$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из условий теоремы следует, что не существует точки $x\in S$, удовлетворяющей неравенству $g(x^{(K)})<g(x)<g(x^{(K+1)})$. Поэтому можно записать

$$\varphi(\lambda')=\max_{x\in S}(f(x)-\lambda' g(x))\geqslant F_0(x_{опт})-\lambda' g(x_{опт})=F_0(x_{опт})-\lambda' g(x^{(K)}).$$

Из неравенства /I4/ и соотношения $F_0(x_{опт})\geqslant f(x^{(K)})$ получим

$$\varphi(\lambda')+\lambda' g(x^{(K)})\geqslant f(x^{(K)})\geqslant f(x_2)+(f(x_1)-f(x_2))\frac{g(x^{(K)})-g(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}$$

или

$$0\leqslant\varphi(\lambda')+\lambda' g(x^{(K)})-f(x^{(K)})\leqslant\varphi(\lambda')+\lambda' g(x^{(K)})-$$
$$-(f(x_2)+(f(x_1)-f(x_2))\frac{g(x^{(K)}-g(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}).$$

Повторив схему доказательства неравенств /I.22/,/I.23/, /I.24/ при условии, что A заменено на $g(x^{(K)})$, получим

$$\varphi(\lambda')+\lambda' g(x^{(K)})-(f(x_2)+(f(x_1)-f(x_2))\frac{g(x^{(K)})-g(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)})\leqslant\varepsilon.$$

Но, с другой стороны, $\varphi(\lambda')+\lambda' g(x^{(K)})-f(x^{(K)})\geqslant F_0(x_{опт})-f(x^{(K)})$. Таким образом, $f(x^{(K)})$ является ε -оптимальным значением целевой функции, а $x^{(K)}$ - ε -оптимальное решение задачи /I/-/3/. Этим завершается доказательство теоремы 2.

§ 2. О возможности получения точного решения задачи /I/–/3/

Утверждение. Наобходимым условием того, что $\varphi(\tilde{\lambda})=F_i-\tilde{\lambda}g_i$ для некоторого параметра $\tilde{\lambda}$, является выполнение неравенства

$$\frac{F_i-F_{i-1}}{g_i-g_{i-1}} \geqslant \frac{F_{i+1}-F_i}{g_{i+1}-g_i}. \qquad /17/$$

Доказательство. Пусть параметр $\tilde{\lambda}$ определен так, что

$$\varphi(\tilde{\lambda})=\max_{x\in S}(f(x)-\tilde{\lambda}g(x))=F_i-\tilde{\lambda}g_i.$$

Тогда $F_i-\tilde{\lambda}g_i \geqslant F_{i-1}-\tilde{\lambda}g_{i-1}$ и $F_i-\tilde{\lambda}g_i > F_{i+1}-\tilde{\lambda}g_{i+1}$
или

$$\frac{F_i-F_{i-1}}{g_i-g_{i-1}} \geqslant \tilde{\lambda} \geqslant \frac{F_{i+1}-F_i}{g_{i+1}-g_i}.$$

Таким образом, справедливость неравенства /17/ показана.

Рассмотрим задачи, в которых для классов эквивалентности из P справедливо соотношение

$$\frac{F_i-F_{i-1}}{g_i-g_{i-1}} \geqslant \frac{F_{i+1}-F_i}{g_{i+1}-g_i}, \quad i=\overline{2,p-1}. \qquad /18/$$

Обозначим $\alpha_i=\dfrac{F_i-F_{i-1}}{g_i-g_{i-1}}-\dfrac{F_{i+1}-F_i}{g_{i+1}-g_i}$ $(1<i<p)$, $\alpha=\min\limits_{1<i<p}\{\alpha_i/\alpha_i>0\}$.

Лемма. Если $\lambda''-\lambda'<\alpha$ и классы эквивалентности из P обладают свойством /18/, то решение задачи /I/–/3/ совпадает с одним из элементов последовательности $(x^{(\xi)})$, $\xi=\overline{1,p}$.

Доказательство. Убедимся в справедливости неравенств:

$$\lambda'' \geqslant \frac{F_2-F_1}{g_2-g_1}, \quad \lambda' \leqslant \frac{F_p-F_{p-1}}{g_p-g_{p-1}}. \qquad /19/$$

Действительно, из определения $\varphi(\lambda)$ следует

$$\varphi(\lambda')=\max_{x\in S}(f(x)-\lambda' g(x))=F_p-\lambda' g_p \geqslant F_{p-1}-\lambda' g_{p-1},$$
$$\varphi(\lambda'')=\max_{x\in S}(f(x)-\lambda'' g(x))=F_1-\lambda'' g_1 \geqslant F_2-\lambda'' g_2,$$

откуда и получаются неравенства /19/.

Покажем, что $\alpha_i=0$ $(1<i<p)$ при $\lambda''-\lambda'<\alpha$. Предположим противное. Пусть существует индекс μ такой, что $\alpha_\mu>0$, тогда на основании /19/,/5/,/6/ можно записать

$$\lambda''-\lambda'\geqslant\frac{F_2-F_1}{g_2-g_1}-\frac{F_p-F_{p-1}}{g_p-g_{p-1}}\geqslant\frac{F_\mu-F_{\mu-1}}{g_\mu-g_{\mu-1}}-\frac{F_{\mu+1}-F_\mu}{g_{\mu+1}-g_\mu}=\alpha_\mu\geqslant\alpha .$$

Но, по условию $\lambda''-\lambda'<\alpha$, пришли к противоречию. Таким образом, $\alpha_i=0\ (1<i<p)$. Отсюда следует, что если последовательность точек $(x^{(\xi)})$ удовлетворяет /5/,/6/, то условия /6/ выполняются как равенства. Но каждый класс эквивалентности представлен точкой в этой последовательности, а значит,в ней существует точка $x^{(l)}$ такая, что $x^{(l)}=x_{опт}$.

Этим доказательство леммы заканчивается.

Из доказанной леммы следует

Т е о р е м а 3. Если выполнены условия леммы, то для получения решения задачи /I/-/3/ достаточно найти точку $x^{(K)}$ последовательности $(x^{(\xi)}),\ \xi=\overline{1,p}$, такую, что $g(x^{(K)})\leqslant A<g(x^{(K+1)})$.

Отметим, что для применения теорем I,2,3 нет необходимости в явном виде выделять соответствующие последовательности, а достаточно найти лишь K -й элемент, определяемый соотношением /7/.

Покажем, как могут быть практически использованы приведенные рассуждения для некоторых частных классов задач математического программирования. Начнем рассмотрение с задачи выпуклого программирования.

§ 3. Простейшая задача распределения ресурсов

Пусть задано n вещественнозначных вогнутых функций $f_j(x_j)$ вещественного аргумента.

Требуется найти ε -оптимальное решение задачи:

$$f(X)=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)\longrightarrow max, \qquad /20/$$

$$g(X)=\sum_{j=1}^{n} x_j\leqslant A, \qquad /21/$$

$$S=\left\{X=(x_1,\dots,x_n)/0\leqslant x_j\leqslant a_j,\ j=\overline{1,n}\right\}. \qquad /22/$$

Из /20/ следует, что достаточно рассматривать функции $f_j(x_j)(j=\overline{1,n})$ лишь на участке их возрастания $[0,a_j']$. Без ограничения общности будем считать, что $f_j(0)=0,\ a_j'\leqslant A,\ j=\overline{1,n}$.

Следуя описанному ранее приему, ε -оптимальное решение задачи /20/-/22/ можно найти при помощи функции

$$\varphi(\lambda)=\max_{X\in S}\Big(\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)-\lambda\sum_{j=1}^{n}x_j\Big)=\max_{X\in S}\sum_{j=1}^{n}\big(f_j(x_j)-\lambda x_j\big)=$$
$$=\sum_{j=1}^{n}\max_{0\le x_j\le a_j'}\big(f_j(x_j)-\lambda x_j\big)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(\lambda).$$

Исходя из замечания 2 теоремы I.2, для получения ε -оптимального решения задачи /20/-/22/ функцию $\varphi(\lambda)$ достаточно вычислять с точностью до $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{3}$, а параметр λ менять (по формулам /I.8/, /I.9/) до тех пор, пока не нарушится неравенство $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda')-\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda'')>2\varepsilon_1$ ($\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda)$ - вычисленное с точностью до ε_1 значение функции $\varphi(\lambda)$). Затем, используя формулу /I.17/, получаем ε -оптимальное решение задачи /20/-/22/.

Чтобы оценить трудоемкость решения задачи /20/-/22/ предлагаемым методом, необходимо определить трудоемкость вычисления функции $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda)$ и число точек λ , в которых достаточно вычислить значение этой функции.

§ 4. Вычисление функции $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda)$

Поскольку $\varphi(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\varphi_j(\lambda)$, для вычисления функции $\varphi(\lambda)$ с точностью до ε_1 достаточно вычислить каждую функцию $\varphi_j(\lambda)$ с точностью до $\frac{\varepsilon_1}{n}$. Все сказанное в пределах данного параграфа справедливо для любой функции $\varphi_j(\lambda)$, $j=\overline{1,n}$,поэтому будем считать, что индекс j фиксирован. Заметим, что функция $f_j(x_j)-\lambda x_j$ вогнута, это следует из свойства вогнутости разности вогнутой и линейной функций. Начальный интервал неопределенности $[0, a_j']$, на котором достигается максимум функции $f_j(x_j)-\lambda x_j$, известен. Для его уменьшения до некоторого конечного интервала воспользуемся методом золотого сечения [2]. Как известно, к золотому сечению приводит деление интервала неопределенности на две неравные части такие, что отношение всего отрезка к большей части равняется отношению большей части к меньшей. Очевидно, что существует только два таких деления. Соответствующие точки деления интервала на две части обозначим через x_j^1 и x_j^2 . В этих точках вычислим значения функции $f_j(x_j^1)$ и $f_j(x_j^2)$ и выберем точку, в которой ее значение меньше. Для дальнейшего исследования оставляется большая часть разбиения интервала, осуществляемого этой точкой, а меньшая отбрасывается. В результате величина неопределенности исходного интервала уменьшается в I,62 раза и т.д.

Оценим число итераций T в методе золотого сечения, достаточное для приближенного нахождения максимума функции $f_j(x_j)-\lambda x_j$ с точностью до $\frac{\varepsilon_1}{n}$. С этой целью предварительно найдем величину неопределенности конечного интервала. Пусть x_j° - точка, в которой достигается $\max\limits_{0\leqslant x_j\leqslant a_j'}(f_j(x_j)-\lambda x_j)$. При $x_j \geqslant x_j^\circ$ функция $f_j(x_j)-\lambda x_j$ может быть ограничена снизу прямой, проходящей через точку $(f(x_j^\circ)-\lambda x_j^\circ,\ x_j^\circ)$ с тангенсом угла наклона $(-\lambda)$. Действительно, $f_j(x_j)$ - неубывающая функция на интервале $[0, a_j']$, а значит,

$$(f_j(x_j^\circ)-f_j(x_j^\circ+\Delta x)\leqslant 0 \qquad \text{при} \qquad \Delta x \geqslant 0$$

и

$$f_j(x_j^\circ)-\lambda x_j^\circ-(f_j(x_j^\circ+\Delta x)-\lambda(x_j^\circ+\Delta x))\leqslant \lambda\Delta x .$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{f}_j(x_j) = \begin{cases} f_j(x_j), & \text{если } 0\leqslant x_j\leqslant x_j^\circ ; \\ f_j(x_j^\circ), & \text{если } x_j^\circ\leqslant x_j\leqslant a_j' . \end{cases}$$

Из определения функции $\tilde{f}_j(x_j)$ легко видеть, что если величина неопределенности конечного интервала $\Delta x\leqslant\frac{\varepsilon_1}{n\lambda}$, то значение функции $\tilde{f}_j(x_j)-\lambda x_j$ (а следовательно, и функции $f_j(x_j)-\lambda x_j$) в правом конце интервала неопределенности отличается от $f_j(x_j^\circ)-\lambda x_j^\circ$ не более чем на $\frac{\varepsilon_1}{n}$.

Найдем минимальный по λ интервал неопределенности Δx, который может использоваться для всех вычисляемых в алгоритме функций $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda)$. Согласно /1.29/, параметр λ ограничен сверху числом $t_2=\frac{\mathcal{F}}{A}$, где $\mathcal{F}=\max\limits_{X\in S}\sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x_j)$. Отсюда получаем

$$\Delta x = \frac{\varepsilon_1}{n}\cdot(\max_{0\leqslant\lambda\leqslant\frac{\mathcal{F}}{A}}\lambda)^{-1} = \frac{\varepsilon_1}{n}\cdot\frac{A}{\mathcal{F}} .$$

Зная величину неопределенности начального интервала $[0, a_j'] (a_j'\leqslant A)$ и конечного Δx, оценим число итераций T. Имеем

$$(1,62)^T=\frac{A}{\Delta x} = \frac{n\mathcal{F}}{\varepsilon_1} \qquad \text{или} \qquad T\log_2 1,62=\log_2\frac{n\mathcal{F}}{\varepsilon_1} .$$

Отсюда следует, что для получения приближенного значения функции $\varphi_j(\lambda)$ с точностью до $\frac{\varepsilon_1}{n}$ потребуется вычислить значение $f_j(x_j)-\lambda x_j$ не более чем в $O(\log_2\frac{n\mathcal{F}}{\varepsilon_1})$ точках интервала $[0, a_j']$. Таким образом, отыскание $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda)$ можно осуществить за $n \times O(\log_2 \frac{n\mathcal{F}}{\varepsilon_1})$ действий, где под действием понимается вычисление значения $f_j(x)$ в некоторой точке x.

Теперь осталось найти число различных точек, в которых нужно вычислять $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda)$. Из ограниченности функций $f_j(x_j)$, $j=\overline{1,n}$, следует ограниченность множества $\Omega=\left\{(\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j), \sum_{j=1}^{n} x_j), 0\leqslant x_j\leqslant a_j', j=\overline{1,n}\right\}$. Поэтому для вычисления величин $\mathcal{F}$ и G, где $G=\max_{X\in S}\sum_{j=1}^{n} x_j$, можно воспользоваться неравенством /I.5/. Имеем

$$\max\{\mathcal{F}, G\}\leqslant\max_{X\in S}\sum_{j=1}^{n}(f_j(x_j)+x_j)-\min_{X\in S}\sum_{j=1}^{n}(f_j(x_j)+x_j)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{n}(\max_{0\leqslant x_j\leqslant a_j'} f_j(x_j)+\max_{0\leqslant x_j\leqslant a_j'} x_j)-\sum_{j=1}^{n}(\min_{0\leqslant x_j\leqslant a_j'} f_j(x_j)+\min_{0\leqslant x_j\leqslant a_j'} x_j)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}(\max_{0\leqslant x_j\leqslant a_j'} f_j(x_j)+a_j')\leqslant n(f_{max}+A)\leqslant 2n\times\max\{f_{max}, A\}, \qquad /23/$$

где $f_{max}=\max_{1\leqslant j\leqslant n} f_j(a_j')$.

Допустив, что ε_1 мало по сравнению с A, из следствия 2 теоремы I.2, соотношения /I.30/ и равенства $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{3}$ получаем, что достаточно вычислить значение функции $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda)$ не более чем в $O(\log_2 t)$ различных точках, где $t=\max\{\varepsilon^{-1}, n, A, f_{max}\}$.

Предположив, что число операций,*/ необходимое для вычисления значения функции $f_j(x_j)$ $(j=\overline{1,n})$ в точке x, ограничено константой, получим окончательную оценку $\mathcal{K}_1$ трудоемкости нахождения ε -оптимального решения задачи /20/-/22/:

$$\mathcal{K}_1=O(n\log_2^2 t), \quad t=\max\{\varepsilon^{-1}, n, A, f_{max}\}. \qquad /24/$$

§ 5. Задача выпуклого целочисленного программирования с одним ограничением

В задаче /20/-/22/ ограничение /22/ заменим на

$$S_1=\left\{X=(x_1, \ldots, x_n)/0\leqslant x_j\leqslant a_j,\ x_j \text{ -целое },\ j=\overline{1,n}\right\}, \qquad /25/$$

т.е. теперь рассматриваются функции $f_j(x_j)$, заданные в целочисленных точках сегмента $[0, a_j]$. Без ограничения общности считаем, что a_j $(j=\overline{1,n})$, A - целые.

Задача /2I/,/22/,/27/ является уже задачей нелинейного целочисленного программирования. Значительное число практических интерпретаций этой задачи приведено в [3]. Задачу /20/,/2I/, /25/ можно точно решить методом динамического программирования,

*/ Под операцией понимается сложение либо сравнение двух чисел.

при этом от целевой функции ничего, кроме сепарабельности, не требуется [4] . Однако объемы вычислений и памяти, пропорциональные соответственно A^2n и An (либо A^2n^2 и A) , могут оказаться значительными.

Интуитивно ясно, что если перенести понятие вогнутости на функции $f_j(x_j)$, заданные в целочисленных точках, то решение задачи /20/,/21/,/25/ можно попытаться осуществить по аналогии с решением задачи /20/-/22/, так как замена /22/ на /25/ "не сильно портит" граничные точки множества Ω последней задачи.

Будем говорить, что $f(x)$ -целочисленно-вогнутая функция, если $f(\tau x+(1-\tau)y)\geqslant \tau f(x)+(1-\tau)f(y)$ для всех целых x, y и всех $\tau\in[0,1]$.

Пусть $f_j(x_j)$, $j=\overline{1,n}$, - целочисленно-вогнутая функция. На множество $\Omega = \left\{\left(\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j),\ \sum_{j=1}^{n} x_j\right),\ 0\leqslant x_j\leqslant a_j,\ x - \text{целое}\ j=\overline{1,n}\right\}$ натянем выпуклую линейную оболочку Ω' . Для отыскания граничных точек множества Ω введем функцию

$$\hat\varphi(\lambda)=\max_{X\in S_1}\left(\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j)\right)-\lambda\sum_{j=1}^{n} x_j=\sum_{j=1}^{n}\max_{x_j=0,1,\ldots,a_j}\left(f_j(x_j)-\lambda x_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\hat\varphi_j(\lambda).$$

Используя свойство целочисленно-вогнутой функции $f_j(x_j)-\lambda x_j$, можно найти точное значение функции $\hat\varphi(\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\hat\varphi(\lambda)$ в точке λ . Отыскание экстремума функции $f_j(x_j)-\lambda x_j$ осуществляем, вычисляя значения этой функции в некоторых целочисленных точках сегмента $[0, a_j]$. Для выяснения, в каких именно точках необходимо вычислять значения этой функции, используем ряд Фибоначчи, тесно связанный с методом золотого сечения ([2 , гл.2]).Предположив, что число операций, необходимое для вычисления значения функции $f_j(x_j)$ ($j=\overline{1,n}$) в точке x , ограничено константой,получим, что $\hat\varphi(\lambda)$ можно вычислить за $O(n\log_2 A)$ операций.

Покажем, как отыскать ε -оптимальное решение задачи /20/, /21/,/25/. Пусть

$$\varphi(\lambda')=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j')-\lambda'\sum_{j=1}^{n} x_j',\qquad \sum_{j=1}^{n} x_j'>A,$$

$$\varphi(\lambda'')=\sum_{j=1}^{n} f_j(x_j'')-\lambda''\sum_{j=1}^{n} x_j'',\qquad \sum_{j=1}^{n} x_j''\leqslant A.$$

Рассмотрим только те функции $f_j(x_j)$, у которых аргументы x_j' и x_j'' различны. Расположим величины $\frac{f_j(x_j')-f_j(x_j'')}{x_j'-x_j''}$ в порядке убывания. Это можно сделать за $O(n\log_2 n)$ операций [5] . Бучем считать, что индекс j соответствует номеру элемента $\frac{f_j(x_j')-f_j(x_j'')}{x_j'-x_j''}$. Определим индекс K из соотношения

$$\sum_{j=1}^{K-1}(x_j'-x_j'')\leq A-\sum_{j=1}^{n}x_j''<\sum_{j=1}^{K}(x_j'-x_j'').$$

Докажем, что ε -оптимальное решение задачи /20/,/21/,/25/ может быть представлено следующим образом:

$$\tilde{x}=(x_1',\ldots,x_{K-1}',x^*,x_{K+1}'',\ldots,x_n''),\ \text{где}\ x_K^*=A-\sum_{j=1}^{K-1}x_j'-\sum_{j=K+1}^{n}x_j''\quad /26/$$

Для доказательства построим вспомогательную последовательность точек $(x^{(\xi)})$, удовлетворяющую /5/,/6/:

$$x^0=(x_1'',x_2'',\ldots,x_n''),\ x^{(\xi)}=(x_1',\ldots,x_\xi',x_{\xi+1}'',\ldots,x_n''),\quad \xi=\overline{1,n}.$$

Применительно к задаче/20/,/21/,/25/ запишем функции $f(x^{(\xi)})$ и $g(x^{(\xi)})$:

$$f(x^{(\xi)})=\sum_{j=1}^{\xi}f_j(x_j')+\sum_{j=\xi+1}^{n}f_j(x_j''),\quad g(x^{(\xi)})=\sum_{j=1}^{\xi}x_j'+\sum_{j=\xi+1}^{n}x_j''.$$

Поскольку $f_K(x_K)$ - целочисленно-вогнутая функция, то, используя соотношение /16/, получаем цепочку неравенств

$$\sum_{j=1}^{K-1}f_j(x_j')+f_K(A-\sum_{j=1}^{K-1}x_j'-\sum_{j=K+1}^{n}x_j'')+\sum_{j=K+1}^{n}f_j(x_j'')\geqslant$$

$$\geqslant f(x^{(K-1)})+(f(x^{(K)})-f(x^{(K-1)}))\frac{A-g(x^{(K-1)})}{g(x^{(K)})-g(x^{(K-1)})}\geqslant$$

$$\geqslant f(x_2)+(f(x_1)-f(x_2))\frac{A-g(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)}.\qquad /27/$$

Рассмотрим точки $x^{(0)}$, $\tilde{x}$, $x^{(n)}$, удовлетворяющие условиям следствия 2 теоремы I. Очевидно, что

$$g(\tilde{x})=\sum_{j=1}^{K-1}x_j'+(A-\sum_{j=1}^{K-1}x_j'-\sum_{j=K+1}^{n}x_j'')+\sum_{j=K+1}^{n}x_j''=A,$$

а справедливость соотношений /5/,/6/ следует из неравенств /27/. Таким образом, в силу следствия 2 теоремы I, точка $\tilde{x}$ будет ε -оптимальным решением задачи /20/, /21/,/25/, а соответствующее ε -оптимальное значение целевой функции равно

$$F_\varepsilon(\tilde{x})=\sum_{j=1}^{K-1}f_j(x_j')+f_K(A-\sum_{j=1}^{K-1}x_j'-\sum_{j=K+1}^{n}x_j'')+\sum_{j=K+1}^{n}f_j(x_j'').\quad /28/$$

Для определения трудоемкости решения задачи /20/,/21/,/25/

осталось найти количество точек λ , в которых достаточно вычислить функцию $\hat{\varphi}(\lambda)$. Это можно сделать при помощи неравенства /I.5/. Очевидно, что $\mathcal{G}_1=\max\limits_{X\in S}\sum\limits_{j=1}^{n} f_j(x_j)$ и $G_1=\max\limits_{X\in S}\sum\limits_{j=1}^{n} x_j$ можно оценить цепочкой неравенств /23/, где аргумент x_j принимает только целые значения в сегменте $[0, a_j]$ и f_{max} уже определяется как $f_{max}=\max\limits_{1\leq j\leq n}\ \max\limits_{x_j=0,1,\ldots,a_j} f_j(x_j)$. Следовательно, на получение ε -оптимального решения задачи /20/, /2I/,/25/ потребуется

$$O(n \times \log_2^2 t), \qquad t=\max\{\varepsilon^{-1}, n, A, f_{max}\}$$

операций.

§ 6. О точном решении задачи /20/,/2I/,/25/

Покажем, что точное решение задачи /20/, /2I/, /25/ можно получить, используя теорему 3. Для этого необходимо убедиться в справедливости неравенства /I8/ и найти величину α . Это позволяет сделать

Л е м м а (Гросс [6]). Вектор $(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$ является оптимальным решением задачи /20/,/2I/,/25/, если и только если имеет место неравенство

$$\min_{j\in J}[f_j(x_j^*) - f_j(x_j^*-1)] \geq \max_{1\leq j\leq n}[f_j(x_j^*+1)-f_j(x_j^*)], \qquad /29/$$

где $J=\{j / x_j > 1\}$.

Очевидно, что лемма Гросса справедлива для любого значения правой части ограничения /2I/ задачи /20/,/2I/,/25/, а из /2I/, /25/ следует равенство $g_i = g_{i-1}+1$ для любого класса эквивалентности множества S_1 . Следовательно, для каждого класса эквивалентности существует функция f_i такая, что $F_i=F_{i-1}+f_i(x_i+1)-f_i(x_i)$; кроме того, из неравенства /29/ получаем

$$f_i(x_i+1)-f_i(x_i)\geq f_{i+1}(x_{i+1}+1)-f_{i+1}(x_{i+1}).$$

Тем самым справедливость неравенства /I8/ для задачи /20/,/2I/, /25/ установлена.

Оценим снизу величину α . Пусть

$$\rho=\min_{1\leq i,j\leq n}\ \min_{\substack{x_i=0,1,\ldots,a_i-1\\ x_j=0,1,\ldots,a_j-1}} \rho_{ij}^{+}(x_i,x_j),$$

где

$$\rho_{ij}^{+}(x_i,x_j)\in\{\rho_{ij}(x_i,x_j)/\rho_{ij}(x_i,x_j)>0\},$$

а

$$\rho_{ij}(x_i,x_j)=f_i(x_i+1)-f_i(x_i)-(f_j(x_j+1)-f_j(x_j)).$$

Основываясь на неравенстве /29/, нетрудно показать, что $\rho\leq\alpha$.

Таким образом, для получения точного решения задачи /20/, /21/, /25/ может быть применена теорема 3.

З а м е ч а н и е. Для доказательства неравенства /18/ и оценки снизу величины α не обязательно применять лемму Гросса. Можно показать, используя схему доказательства теоремы 3, что получаемое по формуле /26/ решение задачи /20/, /21/, /25/ является точным при $\lambda'' - \lambda' < \rho$.

У т в е р ж д е н и е. Задача /20/, /21/, /25/ может быть решена за

$$\mathcal{K}_2 = O(n \times \log_2^2 t), \quad t = \max\{\rho^{-1}, n, A, f_{max}\} \qquad /30/$$

операций, где $f_{max} = \max\limits_{1\le j\le n} \max\limits_{x_j=0,1,\dots,a_j} f_j(x_j)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как уже отмечалось, на вычисление функции $\hat{\varphi}(\lambda)$ достаточно $O(n\cdot\log_2 A)$ операций. Если известны величины $\frac{G}{\varepsilon}$ и $\frac{\mathcal{I}}{A}$, то, по теореме 1.1, достаточно вычислить $\hat{\varphi}(\lambda)$ не более чем при $O(\log(\frac{G}{\varepsilon}\cdot\frac{\mathcal{I}}{A})$ различных значениях параметра λ. Для получения оценки /30/ осталось определить величины $\frac{G}{\varepsilon}$ и $\frac{\mathcal{I}}{A}$. Соотношение /23/ позволяет записать $\frac{\mathcal{I}}{A} \le \frac{2n}{A} \times \max\{A, f_{max}\}$. Из неравенства $\rho \le \alpha$ и теоремы 3 следует, что в качестве верхней оценки величины $\frac{G}{\varepsilon}$ может быть взята любая величина, большая ρ^{-1}, например, $2\rho^{-1}$. Утверждение доказано.

З а м е ч а н и е. Если $f_j(x_j)\,(j=\overline{1,n})$ – целочисленно-вогнутая функция, то задача /20/, /21/,/25/ может быть точно решена методом покоординатного спуска [7] с трудоемкостью $O(n\times A)$ операций. Описанный выше алгоритм, согласно /30/, эффективнее метода покоординатного спуска при $t \le 2^{\sqrt{A}}$.

§ 7. Об объеме памяти, необходимой для решения задач /20/-/22/; /20/, /21/, /25/

Алгоритм решения задач /20/-/22/ и /20/, /21/, /25/ распадается на последовательность однотипных шагов. Результат предыдущего шага необходим лишь для нахождения параметра λ, при котором на следующем шаге вычисляется значение функции $\varphi(\lambda)(\hat{\varphi}(\lambda))$.

Для задачи /20/-/22/ нахождение ε-оптимального решения осуществляется по формуле /1.17/, а для задачи /20/, /21/,/25/- по формуле /26/. Формулой /1.17/ можно пользоваться непосредственно, а для использования формулы /26/ необходимо предварительно упорядочить величины $\frac{f_j(x_j')-f_j(x_j'')}{x_j'-x_j''}$. Упорядочение массива можно осуществить без дополнительной рабочей памяти [5] .

Вычисление функции $\varphi_j(\lambda)(\hat{\varphi}_j(\lambda))(j=\overline{1,n})$ в точке λ осуществляется по методу золотого сечения. На каждой итерации вычисляется значение функции $f_j(x_j)-\lambda x_j\ (j=\overline{1,n})$ в двух точках x_j^1 и x_j^2 . Эти значения нужны лишь для уменьшения длины исходного интервала и в дальнейших расчетах не участвуют.

Таким образом, объем дополнительной памяти, необходимой для решения задач /20/–/22/, /20/, /21/, /25/, не превышает объема исходных данных этих задач.

В заключение напомним, что третья часть работы посвящена применению описанного выше подхода для решения задачи целочисленного линейного программирования – обобщенной задачи о ранце.

Поступила в ред.-изд.отдел
I июня 1977 г.

Л и т е р а т у р а

I. Гвоздев С.Е. Об одном алгоритме с оценками для решения некоторых задач математического программирования. I.–В кн.: Управляемые системы. Вып.16. Новосибирск. 1977, с.47–62.

2. Уайлд Д.Дж. Методы поиска экстремума. М.,"Наука",1967.

3. Гурин Л.С.,Дымарский Я.С.,Меркулов А.Д.Задачи и методы оптимального распределения ресурсов. М.,"Советское радио",1968.

4. Беллман Р.,Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования. М.,"Наука", 1965.

5. Кронрод М.А. Оптимальный алгоритм упорядочения без рабочей памяти.–"Докл. АН СССР", 1969, т.186, № 6,с.1256–1258.

6. Саати Т.Л. Математические методы исследования операций. М.,"Воениздат", 1963.

7. Глебов Н.И. Об одном классе задач выпуклого целочисленного программирования.–В кн.:Управляемые системы.Вып.II.Новосибирск,1973, с.38–42.