Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1977 г. выпуск 16.
УДК.512.25

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНЫХ ЗАДАЧ УНИФИКАЦИИ

Б.И.Гольденгорин /Москва/

В работе предлагается метод поиска приближенного решения многомерной задачи унификации с оценкой точности приближения. Процесс решения задачи начинается с применения так называемых усиленных правил отбраковки, с помощью которых иногда может быть найдено оптимальное решение. Если оптимальное решение найти не удается, то строится оценка снизу для оптимального значения целевой функции и некоторое допустимое решение задачи.

§ 1. Постановка задачи

Требуется найти

$$\min_{x\in\Omega}\left\{f(x)=\sum_{i\in I} f_i(x_i)\right\}, \qquad /1/$$

$$\Omega=\Big\{x: x=(x_1, x_2,\dots, x_i,\dots,x_n),\quad x_i=\sum_{j\in J} x_{ij},$$

$$\sum_{i\in I}\alpha_{ij}x_{ij}\geqslant b_j,\ x_{ij}\geqslant 0,\ i\in I=[1,2,\dots,n],\ J=[1,2,\dots,m]\Big\}. \qquad /2/$$

В /1/,/2/ $f_i(x_i)$ - неотрицательные вогнутые функции, отражающие зависимость приведенных затрат от искомого объема производства x_i i - го типоразмера, $f_i(0)=0,\ \forall i\in I$; b_j - потребность в j -х типоразмерах $j\in J$; x_{ij} - искомый объем производства i -х типоразмеров, используемых в эксплуатации вместо j -х; α_{ij} -эффективность (показатель качества) применения i -го типоразмера в условиях j -го. Для простоты рассуждений будем предполагать, что $\alpha_{ij}\in\{0,1\}$.

§ 2. Структура матрицы замен многопараметрической задачи

В работах [1,2] изучалась задача /1/, /2/ с матрицей замен

$$E_{n\times n}=\|\alpha_{ij}\|_{n\times n}=\begin{bmatrix} & & 0\\ & \ddots & \\ 1 & & \end{bmatrix}, \qquad /3/$$

которая соответствует однопараметрической задаче унификации. Выясним, какова будет структура матрицы замен в случае многопараметрической ($\mathscr{K}$ -параметрической) задачи унификации. Пусть каждый типоразмер i характеризуется двумя параметрами (u_1^i, u_2^i) и i -й типоразмер может заменить j -й, если $u_t^i \geqslant u_t^j$, $t=1,2$, а мощности соответствующих ε -сетей равны $|\mathcal{E}_1|=n_1$, $|\mathcal{E}_2|=n_2$, $n=n_1 \cdot n_2$. Тогда матрица замен имеет вид:

$$\alpha(n_1,n_2)=\begin{bmatrix} \alpha_{11}^2 & & & 0 \\ \alpha_{21}^2 & \alpha_{22}^2 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n_2 1}^2 & \alpha_{n_2 2}^2 & \dots & \alpha_{n_2 n_2}^2 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_{\mu\nu}^2 = E_{n_1 \times n_1}\ ; \quad \mu,\nu=\overline{1,n_2}\,.$$

В $\mathscr{K}$ -праметрическом случае $n=n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{\mathscr{K}}$

$$\alpha(n_1,n_2,\dots,n_{\mathscr{K}})=\begin{bmatrix} \alpha_{11}^{\mathscr{K}} & & & 0 \\ \alpha_{21}^{\mathscr{K}} & \alpha_{22}^{\mathscr{K}} & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n_{\mathscr{K}} 1}^{\mathscr{K}} & \alpha_{n_{\mathscr{K}} 1}^{\mathscr{K}} & \dots & \alpha_{n_{\mathscr{K}} n_{\mathscr{K}}}^{\mathscr{K}} \end{bmatrix}, \qquad /4/$$

$$\alpha_{\mu\nu}^{\mathscr{K}} = \alpha(n_1,n_2,\dots,n_{\mathscr{K}-1})\,; \quad \mu,\nu=\overline{1,n_{\mathscr{K}}}\,.$$

Таким образом, если каждый i -й типоразмер характеризуется $\mathscr{K}$ параметрами $(u_1^i, u_2^i, \dots, u_{\mathscr{K}}^i)$ и i -й заменяет j -й при $u_t^i \geqslant u_t^j$, $t=\overline{1,\mathscr{K}}$, то матрица замен всех $i \in I$ имеет вид /4/.

Очевидно, что однопараметрическая задача /I/-/3/ является оценочной снизу к многопараметрической задаче /I/,/2/, /4/. Для получения оценочной снизу задачи к задаче /I/, /2/, /4/ достаточно заменить хотя бы один нулевой элемент матрицы /4/ ненулевым.

Далее нулевые элементы α_{ij} , $i>j$, в /4/ будем называть дефектами матрицы замен.

§ 3. Построение оценочных решений

Для решения задачи /I/, /2/, /4/ удалим дефекты в матрице /4/

и воспользуемся рекуррентными уравнениями Беллмана [3] . Иногда с помощью таких уравнений можно найти глобальный минимум оценочной снизу задачи /I/-/3/([2,3]). В противном случае предлагается вместо исходной целевой функции $f(x)$ в /I/ использовать миноранту $\varphi(x)=\sum_{i\in I}\varphi_i(x_i)$, i -я составляющая которой имеет вид:

$$\varphi_i(x_i)=\begin{cases} c_i x_i + \tau_i, & x_i>0, \\ 0, & x_i=0, \end{cases}$$

где $\beta_i=\min_{j\in N_i}\frac{b_j}{\alpha_{ij}}$, $\beta^i=\sum_{j\in N_i}\frac{b_j}{\alpha_{ij}}$, $N_i=\{j:\alpha_{ij}>0\}$,

$$\tau_i=f_i(\beta^i)-c_i\beta^i;\quad c_i=\begin{cases} \dfrac{f_i(\beta^i)-f_i(\beta_i)}{\beta^i-\beta_i}, & \beta^i\neq\beta_i, \\ 0, & \beta^i=\beta_i. \end{cases} \qquad /5/$$

Тогда оценочная снизу задача /I/-/3/ может быть записана в виде:

$$\min_{x\in T}\left\{\varphi(x)=\sum_{i\in I}\varphi_i(x_i)\right\}=\varphi(x_T^*).$$

В результате решения задачи /I/-/3/ получим псевдооптимальный набор типоразмеров $\tau_T^*=(\tau_1^T,\tau_2^T,\dots,\tau_p^T)$, соответствующий плану x_T^* , где через τ_ℓ^T , $\ell=\overline{1,p}$, обозначены вектор-строки матрицы /3/. Если каждая вектор-строка τ_ℓ^T матрицы /3/ совпадает с соответствующей вектор-строкой τ_ℓ^Ω матрицы /4/, то полученный набор типоразмеров является искомым оптимальным рядом задачи /I/, /2/, /4/. В случае же, когда существует хотя бы одна вектор-строка $\tau_{\ell_1}^T$, для которой $\tau_{\ell_1}^T\neq\tau_{\ell_1}^\Omega$, необходимо отыскать среди вектор-строк $\tau_\ell^\Omega=\tau_\ell^T$, $\forall\ell\neq\ell_1$ такой вектор τ_ℓ^Ω , который может заменить дефект строки $\tau_{\ell_1}^T$. Если такого вектора τ_ℓ^Ω не найдется среди векторов из набора τ_T^* , то необходимо найти указанную строку среди всех остальных вектор-строк матрицы /4/. Ясно, что если существует хотя бы один допустимый план x_g задачи /I/,/2/, /4/, то вектор-строка, заменяющая дефект строки $\tau_{\ell_1}^T$, всегда найдется. В итоге получим

$$\varphi(x_T^*)\leqslant f(x^*)<f(x_g). \qquad /6/$$

В качестве приближенного к оптимальному значению $f(x^*)$ можно принять

$$f_\delta(x_T^*, x_g) = \frac{1}{2}\cdot[\varphi(x_T^*) + f(x_g)]$$

с относительной погрешностью

$$\delta = \frac{f(x_g) - \varphi(x_T^*)}{2\varphi(x_T^*)}.$$

§ 4. Усиленный метод последовательных расчетов

С целью уточнения решения x_g следует сузить границы /6/, в которые зажато $f(x^*)$. Поэтому предлагается применить необходимые условия оптимальности, с помощью которых могут отсеиваться заведомо неоптимальные типоразмеры и определяться типоразмеры, заведомо содержащиеся в оптимальном ряде. Такими условиями в нашем случае будут усиленные правила отбраковки [4].

Наряду с задачей /I/, /2/, /4/ рассмотрим эквивалентную ей задачу

$$\min_{\omega \subseteq I} \Phi(\omega),$$

где $\Phi(\omega) = \min_{x_{ij}} \left\{\sum_{i\in\omega} f_i(x_i)\right\}, \quad x_i = \sum_{j\in J} x_{ij},$

$$\sum_{i\in\omega} \alpha_{ij} x_{ij} \geq b_j, \quad x_{ij} \geq 0, \quad \forall i\in\omega, \ j\in J.$$

Вычисление функционала $\Phi(\omega)$ представляет известные трудности. Поэтому предлагается вместо $\Phi(\omega)$ использовать его оценки снизу $L(\omega)$ и сверху $V(\omega)$, которые легко подсчитать:

$$L(\omega) = \sum_{j\in J} b_j \min_{i\in\omega} c_{ij} + \sum_{i\in\omega} \tau_i, \qquad /7/$$

$$V(\omega) = L(\omega) + \sum_{i\in\omega} h_i, \qquad /8/$$

$$h_i = \max_{x_i\in[\beta_i, \beta^i]} [f_i(x_i) - (c_i x_i + \tau_i)], \qquad /9/$$

$$c_{ij} = \frac{c_i}{\alpha_{ij}},$$

а c_i, τ_i определяются по формулам /5/.

Следуя [6], приведем обоснование применимости усиленных правил отбраковки в качестве необходимых условий оптимальности типоразмерного ряда.

Рядом подмножеств, соединяющих ω^{τ} и ω^{t}, называется ряд вида:

$$\omega^{\tau}, \omega^{\tau+1}, \ldots, \omega^{\rho}, \ldots, \omega^{t-1}, \omega^{t}, \qquad /10/$$

где $|\omega^{\rho}| = \rho$ - число элементов в ω; $\omega^{\rho} \subset \omega^{\rho+1}$, $\rho = \overline{\tau, t}$, $0 \leq \tau \leq t \leq n$.

Ряд подмножеств /10/ называют главным, если $\tau = 0$, $t = n$.

Будем говорить, что $\varphi(\omega)$ монотонно усиленно убывает (возрастает) на ряду /10/, если $\forall \omega_1 \subset \omega_2$, $L(\omega_1) > V(\omega_2)$ ($V(\omega_1) < L(\omega_2)$).

Определим множества: Z - усиленные локальные минимумы; $Z(R)$ - локальные минимумы R - функции:

$$Z = \{x : V(x) < L(x \cup i), \ \forall i \in I \setminus x,$$
$$V(x) < L(x \setminus i), \ \forall i \in x\},$$
$$Z(R) = \{\ell : R(\ell) < R(\ell \cup i), \ \forall i \in I \setminus \ell,$$
$$R(\ell) < R(\ell \setminus i), \ \forall i \in \ell\}, \quad R = L, \varphi, V$$

Из этих определений следует $\bigcap_{R = L, \varphi, V} Z(R) \supset Z$.

Использовав аналог неравенства Черенина [5]

$$\forall \delta, \gamma \subseteq I, \quad V(\delta) + L(\gamma) - V(\delta \cup \gamma) - L(\delta \cap \gamma) \leq 0, \qquad /11/$$

приведем без доказательства теорему 2 (доказательство имеется в [4]).

Т е о р е м а 1. На любом главном ряду подмножеств, содержащем усиленный локальный минимум x, функция $\varphi(\omega)$, оценки которой $L(\omega)$, $V(\omega)$ удовлетворяют /11/, монотонно усиленно убывает вплоть до x и монотонно усиленно возрастает после x.

Из теоремы 2 следуют усиленные правила отбраковки подмножеств ω, не доставляющих минимум функции $\varphi(\omega)$.

<u>Первое усиленное правило отбраковки.</u> Если $\forall \omega_1 \subset \omega_2 \subset I$, $V(\omega_1) < L(\omega_2)$, то можно отбросить $2^{n-|\omega_2|}$ подмножеств $\omega \supset \omega_2$.

<u>Второе усиленное правило отбраковки.</u> Если $\forall \omega_1 \subset \omega_2 \subset I$, $L(\omega_1) > V(\omega_2)$, то можно отбросить $2^{|\omega_1|}$ подмножеств $\omega \subset \omega_2$.

Т е о р е м а 2. Усиленными правилами отбраковки не может быть отброшен ни один из локальных минимумов $Z(\varphi)$ функции $\varphi(\omega)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о ж/ проведем для первого правила, так как для второго оно проводится аналогично.

Покажем, что одновременное выполнение неравенства $V(\omega_1) < L(\omega_1 \cup \rho)$,

ж/ Доказательство получено совместно с М.Э. Флейсом.

необходимого для применения первого правила, и одного из неравенств, определяющих локальный минимум $\varphi(\omega)$ на $\varkappa \supset \omega_1 \cup p$, невозможно.

Действительно, пусть в результате применения первого правила отбраковки отсеян локальный минимум $\varkappa$ функции $\varphi(\omega)$. Из определения локального минимума $\varphi(\omega)$ следует, что

$$\varphi(\varkappa) \leqslant \varphi(\varkappa \setminus p). \qquad /12/$$

Рассмотрим план x^*, соответствующий набору $\varkappa$. Обозначим $x_i^* = \sum_{j \in \gamma_i} \frac{b_j}{\alpha_{ij}}$ объем производства i-го типоразмера в плане x^*; γ_i - множество таких j, что b_j удовлетворяются за счет i-го типоразмера в плане x^*. Заменим $f_p(x_p)$ на линейную миноранту и получим оценку для $\varphi(\varkappa)$:

$$\varphi(\varkappa) = \sum_{i \in \varkappa} f_i(x_i^*) \geqslant \sum_{i \in \varkappa \setminus p} f_i(x_i^*) + c_p x_p^* + z_p . \qquad /13/$$

Из /12/, /13/ следует, что

$$\sum_{i \in \varkappa \setminus p} f_i(x_i^*) + c_p x_p^* + z_p \leqslant \varphi(\varkappa \setminus p)$$

или, так как

$$c_p x_p^* = c_p \sum_{j \in \gamma_p} \frac{b_j}{\alpha_{pj}} = \sum_{j \in \gamma_p} b_j c_{pj} ,$$

имеем

$$\sum_{j \in \gamma_p} b_j c_{pj} + z_p \leqslant \varphi(\varkappa \setminus p) - \sum_{i \in \varkappa \setminus p} f_i(x_i^*). \qquad /14/$$

Далее, пусть $V(\omega_1) < L(\omega_1 \cup p)$,

т.е. $\sum_{i \in \omega_1} z_i + \sum_{i \in \omega_1} h_i + \sum_{j \in J} b_j \min_{i \in \omega_1} c_{ij} < \sum_{i \in \omega_1 \cup p} z_i + \sum_{j \in J} b_j \min_{i \in \omega_1 \cup p} c_{ij}$. /15/

Но $\forall \gamma \subset J$

$$\sum_{i \in \omega_1 \cup p} z_i + \sum_{j \in \gamma} b_j c_{pj} + \sum_{j \in J \setminus \gamma} b_j \min_{i \in \omega_1} c_{ij} \geqslant \sum_{i \in \omega_1 \cup p} z_i + \sum b_j \min_{i \in \omega_1 \cup p} c_{ij} . \qquad /16/$$

Из /15/ и /16/ следует, что $\forall \gamma \subset J$

$$\sum_{i \in \omega_1} z_i + \sum_{i \in \omega_1} h_i + \sum_{j \in J} b_j \min_{i \in \omega_1} c_{ij} <$$
$$< \sum_{i \in \omega_1 \cup p} z_i + \sum_{j \in \gamma} b_j c_{pj} + \sum_{j \in J \setminus \gamma} b_j \min_{i \in \omega_1} c_{ij} .$$

Откуда вытекает, что $\forall \gamma \subset J$

$$\sum_{i\in\omega_1} h_i + \sum_{j\in\gamma} b_j \min_{i\in\omega_1} c_{ij} < \tau_p + \sum_{j\in\gamma} b_j c_{pj} . \qquad /17/$$

Для каждого $j\in\gamma$ через i_j , обозначим i , принадлежащее ω_1 и обращающее в минимум c_{ij} по всем $i\in\omega_1$, а множество всех таких i , обращающих в минимум c_{ij} , хотя бы для одного $j\in\gamma$ обозначим через i_γ , т.е. $i_\gamma = \{ i\in\omega_1 : \exists\, j\in\gamma,\ i = i_j \}$. Обозначим через δ_i множество таких j , которые привязаны к i -му типоразмеру, т.е. $\delta_i = \{ j : i_j = i \}$. Здесь δ_i является разбиением γ . Тогда неравенство /17/ можно переписать в виде:

$$\sum_{i\in\omega_1\setminus i_\gamma} h_i + \sum_{i\in i_\gamma} \Big[\sum_{j\in\delta_i} b_j c_{ij} + h_i \Big] < \tau_p + \sum_{j\in\gamma} b_j c_{pj} .$$

Откуда следует, что

$$\sum_{i\in i_\gamma} \Big[\sum_{j\in\delta_i} b_j c_{ij} + h_i \Big] < \tau_p + \sum_{j\in\gamma} b_j c_{pj} . \qquad /18/$$

Положим теперь $\gamma = \gamma_p$, тогда из /14/, /18/ следует

$$\sum_{i\in i_\gamma} \Big[\sum_{j\in\delta_i} b_j c_{ij} + h_i \Big] < \varphi(\varkappa\setminus p) - \sum_{i\in\varkappa\setminus p} f_i(x_i^*). \qquad /19/$$

Заметим, что

$$\varphi(\varkappa\setminus p) \leqslant \sum_{i\in(\varkappa\setminus p)\setminus i_\gamma} f_i(x_i^*) + \sum_{i\in i_\gamma} f_i\Big(x_i^* + \sum_{j\in\delta_i} \frac{b_j}{\alpha_{ij}}\Big) \qquad /20/$$

и

$$\sum_{i\in\varkappa\setminus p} f_i(x_i^*) = \sum_{i\in(\varkappa\setminus p)\setminus i_\gamma} f_i(x_i^*) + \sum_{i\in i_\gamma} f_i(x_i^*). \qquad /21/$$

Из /19/-/21/ получаем

$$\sum_{i\in i_\gamma} \Big[\sum_{j\in\delta_i} b_j c_{ij} + h_i \Big] < \sum_{i\in i_\gamma} f_i\Big(x_i^* + \sum_{j\in\delta_i} \frac{b_j}{\alpha_{ij}}\Big) - \sum_{i\in i_\gamma} f_i(x_i^*)$$

или

$$\sum_{i\in i_\gamma} \Big[\sum_{j\in\delta_i} b_j c_{ij} + h_i - f_i\Big(x_i^* + \sum_{j\in\delta_i} \frac{b_j}{\alpha_{ij}}\Big) + f_i(x_i^*) \Big] < 0 . \qquad /22/$$

Но для выполнения /22/ необходимо, чтобы по крайней мере одно слагаемое было меньше нуля, т.е. найдется $i \in i_y$ такое, что

$$\sum_{j\in\delta_i} b_j c_{ij} + h_i - f_i(x_i^* + \sum_{j\in\delta_i}\frac{b_j}{\alpha_{ij}}) + f_i(x_i^*) < 0. \qquad /23/$$

С учетом того, что

$$\sum_{j\in\delta_i} b_j c_{ij} - c_i \sum_{j\in\delta_i}\frac{b_j}{\alpha_{ij}} = \\ = c_i(x_i^* + \sum_{j\in\delta_i}\frac{b_j}{\alpha_{ij}}) - c_i x_i^* + \tau_i - \tau_i ,$$

перепишем /23/ в виде

$$\left\{h_i - \left[f_i(x_i^* + \sum_{j\in\delta_i}\frac{b_j}{\alpha_{ij}}) - c_i(x_i^* + \sum_{j\in\delta_i}\frac{b_j}{\alpha_{ij}}) - \tau_i\right]\right\} + \\ + \left\{f_i(x_i^*) - c_i x_i^* - \tau_i\right\} < 0. \qquad /24/$$

Но из /9/ следует, что выражение, заключенное в первой паре фигурных скобок не меньше нуля, а из того что $x_i^* \geqslant \beta_i$, следует, что и содержимое второй пары фигурных скобок не меньше нуля, а это противоречит неравенству /24/ и завершает доказательство теоремы.

З а м е ч а н и е . В теореме 2 существенно то, что оценки $L(\omega)$, $V(\omega)$ вычисляются по формулам /7/-/9/. В противном случае, как показывает пример, построенный Черениным В.П.,применение первого усиленного правила отбраковки $V(\{0\}) < L(\{1\})$ к произвольной функции $\varphi(\omega)$ отбрасывает глобальный минимум $\{1,2\}$ (см. табл. I).

Таблица I.

ω	$L(\omega)$	$V(\omega)$	$\varphi(\omega)$
{0}	0,0	I,0	I,0
{I}	I,I	2,6	I,I
{2}	-0,5	I,0	0,9
{I,2}	0,6	2,6	0,7

С помощью функций $L(\omega)$, $V(\omega)$ применение усиленных правил отбраковки позволит сформировать подмножества ω_+, $I_+ \subseteq I$ такие, что если $\omega_+ = I_+$, то найден оптимальный ряд типоразмеров $\tau^* = \omega_+ = I_+$.

§ 5. Результаты вычислительного эксперимента

Алгоритм из § 3, использующий метод динамического программирования [3] и дающий, вообще говоря, оценку снизу, обозначим A. По A - алгоритму Рябикиным Л.М. разработана программа на языке АЛГОЛ-60, реализованная на ЭВМ БЭСМ-4.

Проведена серия экспериментальных расчетов по решению практических задач оптимизации типоразмерных рядов, результаты которой приведены в таблице 2. В этой таблице n, m - размеры задачи, $A\%$ - погрешность решения задачи, t_A - среднее время решения задачи.

Таблица 2

n	m	$A\%$	t_A (мин)
13	13	0,00	1,0
14	24	0,00	2,0
20	20	0,11	2,8
20	50	4,23	3,0
50	50	3,18	12,7
100	100	3,42	28,0

В заключение считаю своим приятным долгом поблагодарить Н.Д. Астахова, И.Х.Сигала, В.Р.Хачатурова за полезные обсуждения, В.Л. Береснева за ценные замечания.

Литература

1. Беркович М.М. Задачи стандартизации и некоторые методы их решения. -"Экономика и математические методы", 1969, т.5. вып. 2.

2. Береснев В.Л. Об одном классе задач оптимизации параметров однородной технической системы. В кн.: Управляемые системы, вып. 9. Новосибирск, 1971, с.65-74.

3. Гимади Э.Х. Выбор оптимальных шкал в одном классе задач типа размещения, унификации и стандартизации. В кн.: Управляемые системы, вып.6. Новосибирск, 1970, с.57-70.

4. Гольденгорин Б.И. Решение одного класса задач оптимальной унификации усиленным методом последовательных расчетов.В кн.:Вопросы унификации и комплексной стандартизации в машиностроении и приборостроении, вып.27, труды ВНИИНМАШ. М.,1974, с.62-72.

5. Черенин В.П.,Хачатуров В.Р. Решение методом последовательных

расчетов одного класса задач о размещении производства. В кн.:Применение математических методов и ЭВМ в экономических исследованиях (материалы конференции) , Ташкент, "Наука" УзССР, 1965,с.112-124.

6. Хачатуров В.Р. Некоторые вопросы и приложения метода последовательных расчетов к решению задач размещения производства. Канд. Дис. ЦЭМИ АН СССР, М., 1968.