Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1977 г. выпуск 16.
УДК.519.8

ОБ ОДНОМ АЛГОРИТМЕ С ОЦЕНКАМИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ. I

С.Е.Гвоздев

Рассматривается приближенный метод решения некоторого класса задач математического программирования. За основу принята идея построения по данной задаче выпуклого программирования двойственной к ней и отыскание седловой точки соответствующей функции Лагранжа. Однако если для задач выпуклого программирования рассмотрение соответствующей двойственной задачи позволяет точно решить исходную задачу, то для задач невыпуклого программирования этот путь не гарантирует получение точного решения.

Предлагаемый алгоритм не использует производных и не требует гладкости целевой функции или ограничений экстремальной задачи и может быть распространен на случай функций, заданных на дискретном множестве.

В работе изучаются задачи, для которых можно оценить погрешность получаемого решения, и конструктивно доказываются оценки трудоемкости (величины памяти и объема вычислений) получения этого решения.

В первой части работы излагается метод и рассматриваются задачи выпуклого программирования, во второй и третьей рассматриваются задачи дискретного программирования.

1. Неформальное описание метода

Рассмотрим две вещественнозначные функции $f(x)$ и $g(x)$, заданные на множестве S. Задача заключается в нахождении экстремума одной из них, в то время как значение второй ограничено некоторой величиной A.

Математически задача может быть сформулирована следующим образом: найти

$$f(x) \longrightarrow \begin{Bmatrix} max \\ min \end{Bmatrix} \qquad /1/$$

при ограничениях

$$x \in S, \qquad /2/$$

$$g(x) \begin{Bmatrix} \leq \\ \geq \end{Bmatrix} A \qquad /3/$$

Каждой точке x множества S сопоставим два числа $z = f(x)$ и $y = g(x)$. Таким образом, все множество S отобразится на некоторое подмножество Ω плоскости $Y \times Z = R^2$.

Проведем прямую $ay + bz = c$ на плоскости $Y \times Z$ и станем перемещать ее параллельно самой себе до тех пор, пока она не коснется множества Ω . Чтобы отыскать точки касания, на множество Ω натянем выпуклую линейную оболочку Ω' , определяемую как совокупность всевозможных точек вида $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j p_j$, где $\gamma_j \geq 0$, $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j = 1$, $p_1, \ldots, p_n$, - произвольная конечная система точек из множества Ω . Пусть $\overline{\Omega}$ - замыкание множества Ω , а $d\Omega$ - множество его граничных точек, тогда $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup d\Omega$. Нетрудно видеть, что крайние точки множества Ω' (т.е. точки $x \in \Omega'$ такие, что $x \neq \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$ при любых $0 < \lambda < 1$, $x_1, x_2 \in \Omega'$, $x_1 \neq x_2$) являются точками множества Ω и прямая $ay + bz = c$ коснется хотя бы одной крайней точки множества Ω' .Рассмотрев прямые всевозможных направлений и точки касания с множеством Ω' этих прямых при параллельном перемещении, получим все граничные точки множества Ω' .

Покажем, как можно аналитически получить граничные точки множества Ω' . Ясно, что расстояние от начала координат до прямой, являющейся касательной к множеству Ω , экстремально относительно расстояний до других прямых этого направления, имеющих общие точки с множеством Ω . Поскольку при фиксированных a и b расстояние от прямой $ay + bz = c$ до начала координат пропорционально c , приходим к следующей задаче: найти экстремум величины $ay + bz = af(x) + bg(x)$ при условии $x \in S$. Предположим, что $a \neq 0$. Тогда получим эквивалентную задачу: найти экстремум $f(x) \pm \lambda g(x)$, где $\lambda = \left|\frac{b}{a}\right|$, при ограничении $x \in S$.

Таким образом, граничную точку множества Ω' можно отыскать, решив вместо исходной экстремальной задачи /1/-/3/ экстремальную задачу без ограничения /3/, в целевую функцию которой входит некоторый параметр - множитель λ . Меняя множитель λ , можно получить все граничные точки множества Ω' .

Очевидно, что отыскав множитель λ , можно получить точное решение задачи /1/-/3/ лишь в случае совпадения соответствующих граничных точек множеств Ω и Ω' .В противном случае получаем приближенное решение исходной задачи,причем величина отклонения приближенного решения от точного зависит от"степени отличия"множества Ω от множества Ω'.В ряде случаев это отличие удается заранее оценить и тем самым получить априорную оценку погрешности приближенного решения.

В связи с этим нам понадобится понятие ε -оптимального решения. Пусть точка $\bar{x}$ является допустимой в экстремальной задаче $\max\limits_{x \in T} f(x)$. Под абсолютной погрешностью значения функционала $f(\bar{x})$ будем понимать разность $|f(\bar{x}) - F|$, где $F = \max\limits_{x \in T} f(x)$. Если при этом абсолютная погрешность не превышает величины $\varepsilon > 0$, то $f(\bar{x})$ назовем ε -оптимальным значением целевой функции и обозначим через $F_\varepsilon(\bar{x})$, а $\bar{x}$ – ε -оптимальным решением. Если не будет оговорено противное, то без ограничения общности будем предполагать, что решается задача максимизации при отношении $\leqslant$ в ограничении /3/.

Введем некоторые обозначения, полезные при оценке числа шагов. Предполагаем, что задача /1/-/3/ имеет решение, несовпадающее с решением задачи /1/,/2/, и на множестве Ω' можно выделить две граничные точки $(g(\tilde{x}), f(\tilde{x}))$ и $(g(\tilde{\tilde{x}}), f(\tilde{\tilde{x}}))$ такие, что $g(\tilde{\tilde{x}}) < A \leqslant g(\tilde{x})$ и $f(\tilde{\tilde{x}}) \leqslant f(\tilde{x})$. В дальнейшем будем считать, что начало координат плоскости $Y \times Z$ совпадает с точкой $(f(\tilde{\tilde{x}}), g(\tilde{\tilde{x}}))$ [x] (этого можно добиться, прибавив к целевой функции задачи /1/-/3/ число $(-f(\tilde{\tilde{x}}))$ и к правой и левой частям неравенства /3/-число $(-g(\tilde{\tilde{x}})))$.

Обозначим

$$\mathcal{F} = f(\tilde{x}) - f(\tilde{\tilde{x}}); \quad G = g(\tilde{x}) - g(\tilde{\tilde{x}}). \qquad /4/$$

Заметим, что если существуют конечные экстремумы задач $\max\limits_{x\in S} f(x)$ и $\min\limits_{x\in S} g(x)$, то точки $\tilde{x}$ и $\tilde{\tilde{x}}$ могут быть получены следующим образом:

$$f(\tilde{x}) = \max_{x\in S} f(x); \quad g(\tilde{\tilde{x}}) = \min_{x\in S} g(x).$$

В этом случае справедливо неравенство

$$\max\{\mathcal{F}, G\} \leqslant \max_{x\in S}(f(x)+g(x)) - \min_{x\in S}(f(x)+g(x)). \qquad /5/$$

Действительно, поскольку

$$\max_{x\in S}(f(x)+g(x)) \geqslant f(\tilde{x})+g(\tilde{x}) \quad \text{и} \quad \min_{x\in S}(f(x)+g(x)) \leqslant f(\tilde{\tilde{x}})+g(\tilde{\tilde{x}}),$$

то

$$\max_{x\in S}(f(x)+g(x)) - \min_{x\in S}(f(x)+g(x)) \geqslant f(\tilde{x})+g(\tilde{x}) - (f(\tilde{\tilde{x}})+g(\tilde{\tilde{x}})) =$$
$$= f(\tilde{x}) - f(\tilde{\tilde{x}}) + g(\tilde{x}) - g(\tilde{\tilde{x}}) = \mathcal{F} + G \geqslant \max\{\mathcal{F}, G\}.$$

Вернемся к рассмотрению задачи /1/-/3/. Опишем процедуру отыскания множителя λ , при котором решения задачи $\max\limits_{x\in S}(f(x) - \lambda g(x))$ будут в некотором смысле близко к решению задачи /1/-/3/.

2. Алгоритм нахождения множителя λ

Алгоритм распадается на последовательность однотипных шагов. На k -м шаге ($k = 1, 2, \ldots$) при фиксированном параметре λ_k решается задача

$$\varphi(\lambda_k) = \max(f(x) - \lambda_k g(x)), \qquad /6/$$

[x] Допущение $g(\tilde{\tilde{x}}) < A$ не носит принципиального характера. Если $g(\tilde{\tilde{x}}) = 0$, то начало координат плоскости $Y \times Z$ можно поместить в точке $(f(\tilde{\tilde{x}}), g(\tilde{\tilde{x}}) + \theta)$, где θ – некоторое положительное число.

при условии

$$x \in S. \qquad /7/$$

В результате решения этой задачи получаем какую-то точку множества Ω, координату ее проекции на оси абсцисс обозначим A_{λ_k}. Если на некотором шаге k имеем $A_{\lambda_k} = A$, то для задачи /I/-/3/ получено точное решение, т.е. $\max\limits_{x \in S}(f(x) - \lambda_k g(x)) = f(x_{\lambda_k}) - \lambda_k g(x_{\lambda_k}) = F_0(x_{\lambda_k}) - \lambda_k A$.

В противном случае изменение параметра λ_k производим в зависимости от соотношения A_{λ_k} и A: если $A < A_{\lambda_k}$, увеличиваем, а при $A > A_{\lambda_k}$ соответственно уменьшаем его на некоторую величину.

Введем обозначения:

$$\mu_k' = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1} \operatorname{arctg} \lambda_k', \qquad \mu_k'' = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{-1} \operatorname{arctg} \lambda_k'',$$

где

$$\lambda_k' = \max_{1 \le j < k}\{\lambda_j \mid A_{\lambda_j} - A > 0\}, \quad \lambda_k'' = \min_{1 \le j < k}\{\lambda_j \mid A - A_{\lambda_j} > 0\},$$

при этом если $A - A_{\lambda_j} > 0$ ($A_{\lambda_j} - A > 0$) для всех j, то λ_k' (λ_k'') полагается равным 0 (∞).

Нетрудно заметить, что с уменьшением разности $\mu_k'' - \mu_k'$ величина $A_{\lambda_k'} - A_{\lambda_k''}$ также уменьшается. Кроме того, при определенной стратегии изменения множителя λ_k имеет место

Лемма I. Пусть множители λ_k вычисляются по формуле:

$$\lambda_k = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\mu_k\right), \qquad /8/$$

где

$$\mu_k = \begin{cases} 1 \text{ при } k = 1, \\ \mu_{k-1} + \operatorname{sign}(A_{\lambda_{k-1}} - A) \cdot \frac{1}{2^k}, \text{ при } k > 1. \end{cases} \qquad /9/$$

Тогда справедлива оценка для числа шагов работы алгоритма

$$k \le 1 + \log_2 t, \qquad /10/$$

где

$$t = \max\{t_1, t_2\}, \quad t_1 = \left(\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\mu_k''\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\mu_k'\right)\right)^{-1}, \quad t_2 = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\mu_k''\right). \qquad /11/$$

Доказательство. В силу определения μ_k' и μ_k'' и соотношений /9/ следует справедливость одного из равенств: $\mu_k' = \mu_k$, либо $\mu_k'' = \mu_k$. Тогда

$$\lambda_k' = \begin{cases} \lambda_k, & \text{если } A_{\lambda_k} > A; \\ \lambda_{k-\ell'} & \text{-в противном случае;} \end{cases} \qquad \lambda_k'' = \begin{cases} \lambda_k, & \text{если } A_{\lambda_k} < A; \\ \lambda_{k-\ell''} & \text{- в противном случае;} \end{cases}$$

где $\lambda_{k-\ell'}$ и $\lambda_{k-\ell''}$ определяются соответственно соотношениями

$$\lambda_{k-\ell'} < \lambda_{k-\ell'+1} > \lambda_{k-\ell'+2} > \ldots > \lambda_k \text{ и } \lambda_{k-\ell''} > \lambda_{k-\ell''+1} < \lambda_{k-\ell''+2} < \ldots < \lambda_k . \qquad /12/$$

Допустим, что $A_{\lambda_k} < A$ (случай $A_{\lambda_k} > A$ разбирается аналогично). Рассмотрим разность $\mu_k'' - \mu_k'$. Из /9/ и /12/ имеем

$$\mu_k'' - \mu_k' = \mu_k - \mu_{k-\ell'} = (\mu_{k-\ell'} + \frac{1}{2^{k-\ell'+1}} - \frac{1}{2^{k-\ell'+2}} - \ldots - \frac{1}{2^k}) - \mu_{k-\ell'} = \frac{1}{2^k}.$$

Из очевидного неравенства $tg\frac{\alpha}{2} \leqslant \frac{tg\alpha}{2}$ получим

$$tg(\frac{\pi}{4}(\mu_k'' - \mu_k')) = tg(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{2^k}) \leqslant \frac{tg\frac{\pi}{4}}{2^k} = \frac{1}{2^k}. \qquad /13/$$

Из /13/ следует

$$K \leqslant -\log_2 [tg(\frac{\pi}{4}(\mu_k'' - \mu_k'))]. \qquad /14/$$

Заметим, что непосредственно из определения μ_k'' и μ_k' вытекает $tg(\frac{\pi}{4}\mu_k'') \geqslant tg(\frac{\pi}{4}\mu_k')$. Используя известную формулу $tg(\alpha-\beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$, из неравенства /14/ получаем

$$K \leqslant \log_2 \frac{1+tg(\frac{\pi}{4}\mu_k'')\cdot tg(\frac{\pi}{4}\mu_k')}{tg(\frac{\pi}{4}\mu_k'') - tg(\frac{\pi}{4}\mu_k')} = \log_2 (t_1 + \frac{tg(\frac{\pi}{4}\mu_k'')\cdot tg(\frac{\pi}{4}\mu_k')}{tg(\frac{\pi}{4}\mu_k'') - tg(\frac{\pi}{4}\mu_k')}) \leqslant$$

$$\leqslant \log_2(t_1 + tg(\frac{\pi}{4}\mu_k')) \leqslant \log_2(t_1+t_2) \leqslant 1 + \log_2 t.$$

Лемма I доказана.

Из соотношений /10/, /11/ следует, что оценка числа шагов K зависит от величин t_1 и t_2. Предположим, что они известны, причем t_2 такая, что $A_{t_2} - A \leqslant 0$. Тогда справедлива

Т е о р е м а I. Пусть $\lambda_1 = 1$ и множители λ_k, $k \geqslant 2$, вычисляются по формуле

$$\lambda_k = \begin{cases} 2\lambda_{k-1}, & \text{если } A_{\lambda_j} - A > 0, \quad j = \overline{1, k-1}; \\ \frac{\lambda_{k-1}'' + \lambda_{k-1}'}{2}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \qquad /8'/$$

Тогда априорная оценка числа шагов K работы алгоритма, достаточных для выполнения неравенства $(\lambda_k'' - \lambda_k')^{-1} \geqslant t_1$, имеет вид

$$K = O(\log_2 t). \qquad /10'/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как следует из /8'/, работа алгоритма распадается на два этапа. На первом этапе в худшем случае параметр λ_k увеличивается до тех пор пока $\lambda_k < t_2$, на втором - величина разности $\lambda_k'' - \lambda_k'$ убывает до тех пор пока $\lambda_k'' - \lambda_k' > \frac{1}{t_1}$.

На выполнение первого и второго этапов потребуется $[\log_2 t_2] + [\log_2(t_1 \cdot t_2)] + 1$ шагов (через $[a]$ обозначена целая часть числа a), откуда и получается оценка [10] .

Далее нам понадобится использование одного важного свойства функции $\varphi(\lambda)$.

Л е м м а 2. Функция $\varphi(\lambda)$, введенная соотношениями /6/,/7/, монотонно убывает и непрерывна при $0 < \lambda < \infty$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из определения функции $\varphi(\lambda)$ следует монотонное убывание ее по аргументу λ . Действительно, для любого $\Delta\lambda > 0$

$$\varphi(\lambda) = \max_{x\in S}(f(x) - \lambda g(x)) > \max_{x\in S}(f(x) - (\lambda + \Delta\lambda) g(x)) = \varphi(\lambda + \Delta\lambda).$$

Кроме того,

$$\varphi(\lambda + \Delta\lambda) = \max_{x\in S}(f(x) - (\lambda + \Delta\lambda) g(x)) = f(x_{\lambda+\Delta\lambda}) - (\lambda + \Delta\lambda) g(x_{\lambda+\Delta\lambda}) \geqslant$$
$$\geqslant f(x_\lambda) - (\lambda + \Delta\lambda) g(x_\lambda) = \varphi(\lambda) - \Delta\lambda g(x_\lambda).$$

Отсюда

$$\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda + \Delta\lambda) \leqslant \Delta\lambda g(x_\lambda). \qquad /15/$$

Следовательно, функция $\varphi(\lambda)$ непрерывна.

Лемма 2 доказана.

3. Описание работы алгоритма в случае $\Omega' = \bar{\Omega}$

Для совпадения граничных точек множества Ω' и Ω достаточно, чтобы множество Ω было выпукло. Этим свойством, естественно, обладают задачи выпуклого программирования, т.е. задачи, в которых множество S выпукло, а функции f и g вогнуты и выпуклы соответственно. Однако максимум функции /I/ задачи /I/-/3/ может не достигаться на элементах множества S при его незамкнутости. В этом случае /I/ необходимо заменить на

$$f(x) \longrightarrow \sup \qquad /\mathrm{I}'/$$

Нетрудно видеть, что описанный выше подход может быть использован для решения задачи /I'/,/2/,/3/. В процессе его реализации решается последовательность задач $\varphi(\lambda_K) = \sup_{x\in S}(f(x) - \lambda_K g(x))$ для различных значений параметра λ_K , определяемого соотношениями /8/, /9/. Значение супремума $\bar{F}_0$ задачи /I'/,/2/,/3/ может быть получено из равенства

$$\varphi(\lambda_{опт}) = \sup_{x\in S}(f(x) - \lambda_{опт} g(x)) = \bar{F}_0 - \lambda_{опт} A,$$

где

$$\lambda_{опт} = tg(\frac{\pi}{4}\mu_{опт}), \quad \mu_{опт} = \lim_{K\to\infty}\mu_K .$$

В случае задач выпуклого программирования множитель $\lambda_{опт}$ носит название множителя Лагранжа, решение исходной задачи сводится к отысканию седловой точки соответствующей функции Лагранжа и опирается на известную теорему Куна-Таккера [I] .

В случае замкнутости множества S возможность получения ε -оптимального решения задачи /I'/, /2/,/3/ посредством вычисления функции $\varphi(\lambda)$ лишь в некоторых точках λ дает следующая

Т е о р е м а 2. Если

$$\varphi(\lambda') - \varphi(\lambda'') \leq \varepsilon, \qquad /16/$$

то ε -оптимальное значение функции /I'/ в задаче /I'/, /2/,/3/ может быть получено по следующей формуле:

$$F_\varepsilon(\tilde{x}) = f(x_2 + (x_1 - x_2)\frac{A - g(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)}), \qquad /17/$$

где точки x_1 и x_2 определяются равенствами:

$$\varphi(\lambda') = \sup_{x\in S}(f(x) - \lambda' g(x)) = f(x_1) - \lambda' g(x_1), \quad g(x_1) > A; \qquad /18/$$

$$\varphi(\lambda'') = \sup_{x\in S}(f(x) - \lambda'' g(x)) = f(x_2) - \lambda'' g(x_2), \quad g(x_2) \leq A. \qquad /19/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что по сделанному предположению начало координат плоскости $Y \times Z$ совпадает с точкой $(g(\tilde{x})$, $f(\tilde{x}))$, поэтому $g(x_1) > 0$ и $f(x_1) > 0$. Если учесть очевидное соотношение $\varphi(\lambda') = \sup_{x\in S}(f(x) - \lambda' g(x)) \geq F_0(x) - \lambda' A$, то для доказательства теоремы достаточно проверить неравенства

$$F_\varepsilon(\tilde{x}) \geq \varphi(\lambda') + \lambda' A - \varepsilon \qquad /20/$$

и

$$g(\tilde{x}) \leq A. \qquad /21/$$

Неравенство /20/ разобьем на следующую цепочку неравенств:

$$\varphi(\lambda') + \lambda' A - \varepsilon \leq \varphi(\lambda'') + \lambda' A, \qquad /22/$$

$$\varphi(\lambda'') + \lambda'(A) \leq \varphi(\lambda'') + \frac{A}{g(x_1)}(f(x_1) - \varphi(\lambda'')), \qquad /23/$$

$$\varphi(\lambda'') + \frac{A}{g(x_1)}(f(x_1) - \varphi(\lambda'')) \leq f(x_2) + (f(x_1) - f(x_2))\frac{A - g(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)}, \qquad /24/$$

$$f(x_2) + (f(x_1) - f(x_2))\frac{A - g(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)} \leq f(x_2 + (x_1 - x_2)\frac{A - g(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)}) = F_\varepsilon(\tilde{x}) \qquad /25/$$

и докажем отдельно каждое из этих неравенств. Неравенство /22/ следует непосредственно из неравенства /16/:

$$\varphi(\lambda') + \lambda' A - \varepsilon \leq \varphi(\lambda') + \lambda' A - (\varphi(\lambda') - \varphi(\lambda'')) = \varphi(\lambda'') + \lambda' A.$$

Докажем неравенство /23/. Из определения λ' и λ'' и соотношений

/18/, /19/ имеем $\varphi(\lambda') \geqslant \varphi(\lambda'')$, тогда

$$\frac{f(x_1)-\varphi(\lambda')}{g(x_1)} \leqslant \frac{f(x_1)-\varphi(\lambda'')}{g(x_1)},$$

или, подставляя вместо $\varphi(\lambda')$ в левую часть последнего неравенства ее выражение через $f(x_1)-\lambda' g(x_1)$,

$$\lambda' \leqslant \frac{1}{g(x_1)}\left(f(x_1)-\varphi(\lambda'')\right).$$

Умножив это неравенство на A и прибавив к правой и левой частям $\varphi(\lambda'')$, получим неравенство /23/.

Доказательство неравенства /24/. Из соотношения /19/ имеем $\varphi(\lambda'')=f(x_2)-\lambda'' g(x_2) \geqslant f(x_1)-\lambda'' g(x_1)$. Нетрудно проверить, что $g(x_1)(f(x_1)-f(x_2)) \leqslant (g(x_1)-g(x_2))(f(x_1)-f(x_2)+\lambda'' g(x_2))$, или, заменив $-f(x_2)+\lambda'' g(x_2)$ на $-\varphi(\lambda'')$,

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)} \leqslant \frac{f(x_1)-\varphi(\lambda'')}{g(x_1)}.$$

Отсюда следует:

$$\varphi(\lambda'') \leqslant f(x_1)-(f(x_1)-f(x_2))\frac{g(x_1)}{g(x_1)-g(x_2)}. \qquad /26/$$

Введем параметр α: $0<\alpha<1$. Умножив правую и левую части неравенства /26/ на $(1-\alpha)$ и сгруппировав члены, получим:

$$\varphi(\lambda'')+\alpha(f(x_1)-\varphi(\lambda'')) \leqslant f(x_1)-(f(x_1)-f(x_2))\frac{g(x_1)-\alpha g(x_1)}{g(x_1)-g(x_2)}. \qquad /27/$$

В силу нервенства /18/, $g(x_1)>A$. Таким образом, существует параметр α $(0<\alpha<1)$ такой, что $\alpha g(x_1) \doteq A$. Следовательно, неравенство /27/ можно записать в виде:

$$\varphi(\lambda'')+\frac{A}{g(x_1)}(f(x_1)-\varphi(\lambda'')) \leqslant f(x_1)-(f(x_1)-f(x_2))\frac{g(x_1)-A}{g(x_1)-g(x_2)}.$$

Из равенства

$$f(x_1)-(f(x_1)-f(x_2))\frac{g(x_1)-A}{g(x_1)-g(x_2)}=f(x_2)+(f(x_1)-f(x_2))\frac{A-g(x_2)}{g(x_1)-g(x_2)},$$

проверка которого осуществляется непосредственно приведением подобных членов, получаем неравенство /24/.

Заметим, что при доказательстве неравенств /22/-/24/ свойство выпуклости функций $f(x)$ и $g(x)$ не используется, а для доказательства неравенств /21/, /25/ достаточно воспользоваться непосредственно определением выпуклости и вогнутости функций $g(x)$ и $f(x)$. Таким образом, неравенства /20/-/25/, а следовательно, и теорема 2 доказаны.

С л е д с т в и е 1. На основании леммы 2 о непрерывности функции $\varphi(\lambda)$ следует, что описанным подходом можно решить задачу /1'/, /2/, /3/ с любой наперед заданной точностью.

В условии теоремы 2 значения функций $\varphi(\lambda')$ и $\varphi(\lambda'')$ должны быть вычислены точно. Допустим теперь, что задачи, определяемые /18/, /19/, решаются приближенно с точностью до $\varepsilon_1 = \frac{1}{3}\varepsilon$, т.е. $\varphi(\lambda') - \varphi_{\varepsilon_1}(\lambda') \leqslant \varepsilon_1$, $\varphi(\lambda'') - \varphi_{\varepsilon_1}(\lambda'') \leqslant \varepsilon_1$ и что $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda')$ и $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda'')$ связаны соотношением

$$|\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda') - \varphi_{\varepsilon_1}(\lambda'')| < \frac{2}{3}\varepsilon. \qquad /28/$$

С л е д с т в и е 2. Теорема 2 остается в силе, если неравенство /16/ заменить неравенством /28/, а функции $\varphi(\lambda')$ и $\varphi(\lambda'')$ - соответственно функциями $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda')$ и $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda'')$.

Действительно, справедливость этого утверждения следует из неравенства

$$F_{\varepsilon}(\tilde{x}) \geqslant \varphi_{\varepsilon_1}(\lambda') + \lambda' A - 2\varepsilon_1,$$

проверка которого осуществляется по той же схеме, что и доказательство неравенства /20/.

На основании следствия 2, в частности, можно находить ε -оптимальное решение задачи /1'/, /2/, /3/ при незамкнутости множества S. В этом случае в качестве x_1 (x_2) может быть взята любая точка из S, такая что $f(x_1) - \lambda' g(x_1)$ $(f(x_2) - \lambda'' g(x_2))$ отличается от $\varphi(\lambda')$ $(\varphi(\lambda''))$ не более чем на ε_1.

Пусть множество S задачи /1'/, /2/, /3/ задано системой ограничений вида $g_i(x) \leqslant A_i$, $i = \overline{1, m}$, тогда для вычисления значений $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda')$ и $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda'')$ можно, в свою очередь, применить следствие 2 теоремы 2 и т.д. В результате нахождение $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda')$ и $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda'')$ сведется к решению конечной последовательности задач отыскания безусловного экстремума функции $f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$ с точностью до $\frac{\varepsilon}{3^m}$. И хотя длина этой последовательности быстро растет с увеличением числа ограничений m, задача безусловной максимизации очень часто оказывается значительно легче, чем задача на максимум при наличии ограничений.

З а м е ч а н и е. В доказательстве теоремы 2 используется свойство выпуклости множества S: если точки x_1 и x_2 принадлежат S, то и точка $\tilde{x} = x_2 + (x_1 - x_2)\frac{A - g(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)}$ также принадлежит S. Отметим, что требование выпуклости всего множества S и функций f и g можно ослабить, поскольку x_1 и x_2 - не любые точки множества S, а лишь точки, удовлетворяющие соотношениям /18/, /19/. Более того, доказательство теоремы 2 несущественно изменится, если $\tilde{x} \notin S$, но найдется точка $z \in S$ такая, что

$$f(z) \geq f(x_2) + (f(x_1) - f(x_2)) \frac{A - g(x_2)}{g(x_1) - g(x_2)}$$

и $g(z) \leq A$.

Тогда $f(z)$ можно взять в качестве ε -оптимального значения целевой функции исходной экстремальной задачи.

Из теоремы 2 следует, что критерием окончания работы алгоритма в случае $\Omega' = \overline{\Omega}$ может служить нарушение неравенства $\varphi(\lambda') - \varphi(\lambda'') > \varepsilon$, а ε -оптимальное решение может быть получено по формуле /17/. Оценим число шагов, необходимое для выполнения неравенства /16/. С этой целью вычислим величины t_1 и t_2, предположив, что $\mathcal{F}$ и G, определяемые соотношением /4/, конечны.

В соответствии с принятыми допущениями имеем

$$\varphi(\tilde{\lambda}) = f(\tilde{x}) - \tilde{\lambda} g(\tilde{x}) = \mathcal{F} - \tilde{\lambda} G \quad \text{и} \quad \varphi(\tilde{\tilde{\lambda}}) = f(\tilde{\tilde{x}}) - \tilde{\tilde{\lambda}} g(\tilde{\tilde{x}}) = 0 - \tilde{\tilde{\lambda}} 0 = 0.$$

Очевидно, что если $\tilde{\tilde{\lambda}} \geq \lambda'' \geq \lambda' \geq \tilde{\lambda}$, то при $\lambda'' - \lambda' \leq \frac{\varepsilon}{G} < \frac{\varepsilon}{g(x_1)}$ из /15/ следует справедливость неравенства /16/. Таким образом, получаем $t_1 = \frac{G}{\varepsilon}$.

Заметим, что $\varphi(\lambda) \geq 0$ для любого положительного λ, поскольку начало координат плоскости $Y \times Z$ совпадает с точкой $(g(\tilde{\tilde{x}}), f(\tilde{\tilde{x}}))$.

Пусть $\lambda = \frac{\mathcal{F}}{A}$, тогда

$$\varphi\left(\frac{\mathcal{F}}{A}\right) = \sup_{x \in S} \left(f(x) - \frac{\mathcal{F}}{A} g(x)\right) - f(x^*) - \frac{\mathcal{F}}{A} g(x^*) \geq 0.$$

В силу соотношения $\frac{\mathcal{F}}{A} \geq \frac{\mathcal{F}}{g(\tilde{x})} \geq \tilde{\lambda}$ и монотонного убывания функции $\varphi(\lambda)$ имеем $f(x^*) \leq \mathcal{F}$, а значит, $g(x^*) < A$. Таким образом, координата проекции на ось абсцисс точки касания прямой $f(x) - \frac{\mathcal{F}}{A} g(x) + \varphi\left(\frac{\mathcal{F}}{A}\right)$ с множеством Ω меньше A. Поэтому параметр λ_k, вычисляемый по формуле /8/, можно априорно ограничить сверху числом $\frac{\mathcal{F}}{A}$.

Окончательно имеем:

$$t_1 = \frac{G}{\varepsilon}, \quad t_2 = \frac{\mathcal{F}}{A}. \qquad /29/$$

На основании теоремы I и неравенства /29/ получаем следующую оценку числа шагов K:

$$K \leq O(\log_2 t), \quad t = \max\left\{\frac{G}{\varepsilon}, \frac{\mathcal{F}}{A}\right\}. \qquad /30/$$

Отметим, что выражение /30/, в котором ε заменено на $\frac{1}{3}\varepsilon$, может использоваться для оценки числа шагов при вычислении функций $\varphi(\lambda')$ и $\varphi(\lambda'')$ с точностью до ε_1.

Действительно, из следствия 2 теоремы 2 получаем, что критерием окончания работы алгоритма может служить нарушение неравенства $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda') - \varphi_{\varepsilon_1}(\lambda'') > 2\varepsilon_1$. Очевидно, что $\varphi(\lambda) \geq \varphi_{\varepsilon_1}(\lambda) \geq \varphi(\lambda) - \varepsilon_1$, следовательно, прямая $f(x) - \lambda g(x) + \varphi_{\varepsilon_1}(\lambda)$ лежащая на плоскости $Y \times Z$, заключена между прямыми $f(x) - \lambda g(x) + \varphi(\lambda)$ и $f(x) - \lambda g(x) + (\varphi(\lambda) - \varepsilon_1)$. Кроме того из неравенства $\varphi(\lambda') - \varphi(\lambda'') \leq \varepsilon_1$ получаем $|\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda') - \varphi_{\varepsilon_1}(\lambda'')| \leq 2\varepsilon_1$, таким образом, соотношение /15/ позволяет записать $t_1 \leq \frac{G}{\varepsilon_1}$. Нетрудно проверить также, что $t_2 < \frac{T}{A-\varepsilon}$. Пусть ε_1 мало по сравнению с A, тогда, если вместо функции $\varphi(\lambda)$ рассматривать функцию $\varphi_{\varepsilon_1}(\lambda)$, то при замене ε на ε_1 соотношение /30/ дает оценку числа шагов для получения ε -оптимального значения функции /1' / в задаче /1' /, /2/, /3/.

Остановимся на одном частном классе задач выпуклого программирования - задачах линейного программирования /ЛП/. В задаче ЛП функции $f(x)$ и $g(x)$ линейны, а множество S многогранно. Теоретическая оценка трудоемкости решения задач ЛП симплекс-методом [2] составляет $O((n \times m) \times C_n^m)$ операций (сложение, сравнение) при памяти $O(m^2)$ ячеек. Существуют задачи, на которых эта оценка достигается. Однако, как показывает накопленный опыт, для решения задач ЛП, построенных не искусственно, а взятых из реальности, число операций в среднем составляет $O((n \times m) \times max\{n, m\})$ [3, стр.558]. Таким образом, для большинства практических задач зависимость числа операций от числа переменных квадратичная.

Рассмотрим задачу ЛП в симметричной канонической форме с ограниченными переменными: среди неотрицательных вещественных чисел x_j, $j=\overline{1,n}$, удовлетворяющих системе неравенств:

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq A_i, \quad i = \overline{1,m}, \tag{31}$$

$$S = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_n) / \ell_j^0 \leq x_j \leq \ell_j^1, \ j = \overline{1,n} \right\}, \tag{32}$$

найти такие, при которых

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow max. \tag{33}$$

Предполагается, что множество допустимых решений задачи /31/-/33/ непусто. Покажем, что при увеличении числа переменных применение описанного подхода дает возможность получить $\varepsilon = \varepsilon_n$ -оптимальное решение этой задачи с трудоемкостью $O(n^2)$ операций, где

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{o(n^2)}{n^2} = 0. \qquad /34/$$

При этом порядок требуемой памяти тот же, что и для хранения исходных данных задачи. Ниже будут использованы методология и понятия, строгое определение которых содержится в работе [4] .

Для удобства применения полученных выше соотношений допустим, что $f(x) \geqslant 0$ и $g_i(x) > 0$, $i=\overline{1,m}$. Как было отмечено ранее, этим общность не ограничивается, т.е. описанный подход может быть соответственно модифицирован для случая невыполнения этого допущения: Пусть число переменных задачи /31/-/33/ равно $n\ (n \geqslant 3)$ и величины a_{ij}, A_i, c_j, ℓ_j^0, ℓ_j^1 , являющиеся исходными данными этой задачи, распределены некоторым образом в соответствующих интервалах: (α_1,α_2), $(\hat{\alpha}_1,\hat{\alpha}_2)$, (β_1,β_2), (ρ_1,ρ_2), (γ_1,γ_2).

Как было отмечено в следствии 2 теоремы 2, отыскание ε -оптимального решения задачи /31/-/33/ можно свести к решению последовательности задач

$$\varphi(\lambda_1,\ldots,\lambda_m) = \max_{\substack{\ell_j^0 \leqslant x \leqslant \ell_j^1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \sum_{j=1}^{n}(c_j - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij})x_j \qquad /35/$$

при некоторых наборах $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$. Очевидно, что точное решение задачи /35/ может быть получено следующим образом:

$$x_j = \begin{cases} \ell_j^1, \text{ если } c_i - \sum_{i=1}^{m}\lambda_i a_{ij} \geqslant 0; \\ \ell_j^0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Следовательно, для получения этого решения потребуется $O(n\times m)$ операций.

Оценим число различных наборов $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$, при которых достаточно вычислить значения функции /35/. Пусть Q_i , $i=\overline{1,m}$, - число различных значений, которые может принимать i -я компонента вектора $(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$. Чтобы оценить Q_i , рассмотрим функцию $\varphi(\lambda_i,\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_m)$, соответствующую решению задачи

$$\varphi(\lambda_i,\lambda_{i+1},\ldots,\lambda_m) = \max_{\substack{\ell_j^0 \leqslant x_j \leqslant \ell_j^1 \\ 1 \leqslant j \leqslant n,}} \left(\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{\ell=i+1}^{m}\lambda_\ell \sum_{j=1}^{n} a_{\ell j}x_j\right) - \lambda_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) \qquad /36/$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{\mu j}x_j \leqslant A_\mu, \quad \mu=\overline{1,i-1}.$$

Через $\mathcal{J}_i$, $\hat{Q}_i$ обозначим величины, определяемые соотношениями /4/, /5/ применительно к задаче /36/. Очевидно, что

$$G_i = \max_{\substack{l_j^0 \le x_j \le l_j^1,\ 1 \le j \le n, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{\mu j} x_j \le A_\mu,\ \mu=\overline{1,i-1}.}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \max_{\substack{l_j^0 \le x_j \le l_j^1, \\ 1 \le j \le n.}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le n \times \alpha_2 \times \gamma_2 .$$

Учитывая /29/, имеем

$$\mathcal{G}_i = \max_{\substack{l_j^0 \le x_j \le l_j^1, \\ 1 \le j \le n, \\ \sum_{j=1}^{n} a_{\mu j} x_j \le A_\mu,\ \mu=\overline{1,i-1}}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{l=i+1}^{m} \lambda_l \sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j\right) \le \max_{\substack{l_j^0 \le x_j \le l_j^1, \\ 1 \le j \le n.}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{l=i+1}^{m} \lambda_l \sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j\right) \le$$

$$\le \max_{\substack{l_j^0 \le x_j \le l_j^1, \\ 1 \le j \le n.}} \left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{l=i+2}^{m} \lambda_l \sum_{j=1}^{n} a_{lj} x_j\right) + \lambda_{i+1} \times \max_{\substack{l_j^0 \le x_j \le l_j^1, \\ 1 \le j \le n}} \sum_{j=1}^{n} a_{i+1\,j} x_j \le$$

$$\le \mathcal{G}_{i+1} + \lambda_{i+1} G_{i+1} \le \mathcal{G}_{i+1} + \frac{\mathcal{G}_{i+1}}{A_{i+1}} G_{i+1} \le \mathcal{G}_m \prod_{l=i+1}^{m} \left(1 + \frac{G_l}{A_l}\right) \le$$

$$\le \left(\max_{\substack{l_j^0 \le x_j \le l_j^1 \\ 1 \le j \le n.}} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right)\left(1 + \frac{\max\limits_{1 \le i \le m} G_i}{\min\limits_{1 \le i \le m} A_i}\right)^{m-i} \le n \times \beta_2 \times \gamma_2 \times \left(1 + \frac{n \times \alpha_2 \times \gamma_2}{\hat{\alpha}_1}\right)^{m-i}.$$

Из следствия 2 теоремы 2 следует, что для получения ε -оптимального решения задачи /31/-/33/ достаточно задачу /36/ решить с точностью до $\frac{\varepsilon}{3^{m-i+1}}$. Воспользовавшись соотношением /30/, оценим Q_i : $Q_i = O((m-i+1) \times \log t)$, где $t = \max\{\varepsilon^{-1}, n, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2, (\hat{\alpha}_1)^{-1}\}$. Вычислив аналогичным образом все Q_i, $i = \overline{1,m}$, найдем верхнюю оценку для числа различных наборов $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$: $\prod_{i=1}^{m} Q_i \le m! \log^m t$. Отсюда, так как трудоемкость решения задачи /35/ составляет $O(n \times m)$ операций, следует, что для нахождения ε -оптимального решения задачи /31/-/33/ достаточно выполнить

$$K = O(n \times (m^2 (m-1)! \log^m t)), \quad t = \max\{\varepsilon^{-1}, n, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 (\hat{\alpha}_1)^{-1}\} \qquad /37/$$

операций.

Изучим поведение оценки /37/ при $n \to \infty$. Пусть величины ξ, η, α связаны соотношением $\xi_n \times \eta_n = \alpha_n$; здесь и далее индекс n внизу означает зависимость величин от n.

Тогда если

$$m_n \leqslant \sqrt{\log \xi_n + \log c_1} \quad \text{и} \quad t_n \leqslant 2^{(c_2 \eta_2)^{\frac{1}{m_n}}}, \qquad /38/$$

где c_1, c_2 - константы, оценку /37/ можно представить в виде

$$K_* = O(n \times \alpha_n). \qquad /39/$$

Действительно, из цепочки неравенств

$$m_n^2 \geqslant m_n \log m_n = \log m_n^{m_n} \geqslant \log(m_n^2 (m_n - 1)!)$$

и соотношений /38/ имеем $m_n^2 (m_n - 1)! \leqslant c_1 \xi_n$ и $\log^{m_n} t_n \leqslant c_2 \eta_n$.
Подставив эти выражения в /37/, получим /39/.

Следовательно, если α_n при $n \to \infty$ возрастает и если $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\alpha_n}{n} = 0$, то для числа операций справедливо соотношение /34/. Покажем, что при этом может быть получена асимптотическая точность решения. Для простоты ограничимся случаем $\xi_n = \eta_n = \sqrt{\alpha_n}$; $\alpha_n = \sqrt{n}$.

Соотношение /38/ определяет максимальную "скорость роста" с увеличением n величин, участвующих в определении t , при которой справедливо /39/. Для определения ε_n положим $c_1 = c_2 = 1$, тогда из /38/ можно записать

$$\varepsilon_n = \left(2^{(\sqrt{\alpha_n})^{\frac{1}{\sqrt{\log \sqrt{\alpha_n}}}}} \right)^{-1}.$$

Обозначив $\theta_n = \sqrt{\log \sqrt{\alpha_n}}$, получим $\sqrt{\alpha_n} = 2^{\theta_n^2}$, тогда $\varepsilon_n = \left(2^{(2^{\theta_n})}\right)^{-1}$. Легко видеть, что если $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n = \infty$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \theta_n = \infty$ и $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$. Таким образом, соотношения /34/ доказаны полностью.

Покажем, что объем памяти, необходимый для реализации описанного подхода, будет того же порядка, что и память, используемая для записи исходных данных задачи /31/-/33/.

Действительно, если каждой компоненте λ_i вектора $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ приписать набор $x^i = (x_1^i, \ldots, x_n^i)$, соответствующий $\frac{\varepsilon}{3m-i+1}$ -оптимальному решению задачи /36/, то в памяти, помимо чисел θ_i, $i = \overline{1,m}$, достаточно хранить не более одного вектора $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ с соответствующими ему наборами $(x^1, \ldots, x^m)$, поскольку решение исходной задачи осуществляется путем последовательного решения задач /35/.

З а м е ч а н и е. Нетрудно видеть, что если множество S задачи /31/-/33/ выпукло, но не может быть задано конечной системой линейных неравенств и задача /32/,/33/ может быть эффективно решена (например, аналитически), то описанный подход применим и для решения такой задачи.

В заключение рассмотрим частный случай задачи ЛП. Пусть система неравенств /31/ включает несколько ограничений, а условие /32/ имеет вид

$$S=\left\{x/Bx \leqslant b\right\}, \qquad /32'/$$

где B - матрица, а b - вектор столбец. Предположим, что матрица B имеет некоторую специфику, которая позволяет решать задачу /32/, /33/ более эффективно, нежели классический симплекс-метод. Типичными примерами задач ЛП, матрица ограничений B которых имеет специальный вид, являются транспортная задача и задача о потоке в сетях. К настоящему времени разработан целый ряд методов, учитывающих различную специфику матрицы B [5]. Однако зачастую добавление ограничений /31/ к условию /32'/ приводит к необходимости использовать вместо удобного специализированного метода симплекс-метод в общем виде. Описанный подход дает возможность получить ε -оптимальное решение задачи /31/,/32'/,/33/, определенное число раз решив задачу /32'/, /33/.

Отметим, что ряд авторов на примере транспортной задачи предлагали использовать описанный выше подход для решения задач ЛП с дополнительным линейным ограничением. Так, в работе [6] предлагалась стратегия изменения множителя λ , основанная на параметрическом подходе, при которой гарантировалось получение точного решение задачи /31/ /32'/, /33/ либо устанавливалось, что система ограничений /31/,/32'/ противоречива. Однако число шагов при этом могло иметь порядок числа вершин многогранника, определяемого условием /32'/. В работе [7] вместо множителя λ рассматривалось отношение $\frac{\lambda^{\circ}}{1-\lambda^{\circ}}$ и решение задачи производилось итеративно при различных значениях параметра λ°. Оценка числа итераций для получения ε -оптимального решения, выведенная в [7] , того же порядка, что и оценка /30/.

За ценные замечания, сделанные при просмотре рукописи статьи, автор выражает искреннюю благодарность Э.Х.Гимади.

Поступила в ред.-изд.отдел
11 января 1977 г.

Литература

1. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. М., "Наука", 1974, 480 с.

2. Данциг Дж. Линейное программирование, его обобщение и применение. М., "Прогресс", 1966, 600 с.

3. Первозванский А.А. Математические модели в управлении производством. М., "Наука", 1975, 616 с.

4. Гимади Э.Х.,Глебов Н.И., Перепелица В.А. Алгоритмы с оценками для задач дискретной оптимизации. В кн.:-Проблемы кибернетики, вып. 31, М., "Наука", 1976, с. 35-42.

5. Лесдон Л. Оптимизация больших систем. М., "Наука", 1975, 432 с.

6. Гольштейн Е.Г. О возможности расширения применимости частных методов линейного программирования. В кн.: Планирование и экономико-математические методы, М., "Наука", 1964, с. 409-423.

7. Финкельштейн Ю.Ю. Итеративный метод для решения транспортной задачи с дополнительным линейным ограничением и оценка числа итераций. -"Жур.вычислит. математики и мат.физики" 1963, т.3, № 6,с.1103--1111.