Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1977 г. выпуск 16.
УДК.518.9:517.9

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ НА ВЫЖИВАНИЕ

Е.П.Волокитин

В настоящей работе предлагается метод, который позволяет при выполнении определенных условий свести рассмотрение игр с терминальной платой к рассмотрению игр с интегральной платой и фиксированной длительностью игры.

1°. В соответствии с [1 ,2] рассмотрим дифференциальную игру на выживание G , динамика которой описывается уравнением

$$z = f(z, u, v), \qquad /1/$$

$$z(t_0) = z_0, \qquad /1'/$$

$t \in [t_0, T]$, $t_0 < T < +\infty$, $z \in R^m$, $u(t)$, $v(t)$ - измеримые функции /управления/, определенные на $[t_0, T]$ и принимающие при почти всех t значения из компактных множеств $U \subset R^p$, $V \subset R^q$ соотвественно; такие управления будем называть допустимыми, пару допустимых управлений $(u(\cdot), v(\cdot))$ будем называть ситуацией.

Предполагается, что выполнены следующие условия:

1) $f(z, u, v)$ непрерывна в $R^m \times U \times V$;

2) $f(z, u, v)$ удовлетворяет условию Липшица по переменной z в любом шаре:

$$|f(z', u, v) - f(z'', u, v)| \leq k_1 |z' - z''| \qquad /2/$$

для всех $u \in U$, $v \in V$, $R > 0$, $|z'| < R$, $|z''| < R$, $k_1 = k_1(R) - const$;

3) Рост $f(z, u, v)$ по z ограничен:

$$|f(z, u, v)| \leq k_2 |z| + k_3 \qquad /3/$$

для всех $u \in U$, $v \in V$, $z \in R^m$, $k_2, k_3 - const$;

4) Одна из компонент $f(z, u, v)$ строго положительна, точнее

$$f_{i_0}(z, u, v) \geq c_{i_0} > 0 \qquad /4/$$

для некоторого $i_0 \in \overline{1, m}$ и для всех $z \in R^m$, $u \in U$, $v \in V$;

5) u и v раздельны в /1/:

$$f(z, u, v) = f^1(z, u) + f^2(z, v).$$

При выполнении условий 1) - 3) уравнение /1/-/1'/ имеет единственное решение, продолжимое на промежуток $[t_0, T]$ после подстановки в /1/ любой ситации [3].(Под решением дифференциального уравнения здесь и ниже понимается абсолютно непрерывная функция, при почти всех t удовлетворяющая этому уравнению.)

Пространством игры является выпуклая область $\mathcal{D}$, ограниченная поверхностью Ω класса C_2 , главные кривизны которой ограничены и которая разделяет R^m на две части: Ω^+, Ω^-, причем

$$\Omega^- \supset R^{i_0-1} \times [C_{i_0}, +\infty) \times R^{m-i_0}, \qquad /5/$$

где $C_{i_0} \leq c_{i_0}(T-t_0)+z_{i_0,0}$. Единичную нормаль к поверхности Ω в точке $\bar{z} \in \Omega$, направленную внутрь $\mathcal{D}$, обозначим через $\nu(\bar{z})$.

Партия в игре G считается оконченной в момент времени $t_f = t_f(u(\cdot), v(\cdot))$, в который траектория уравнения /I/-/I'/ впервые достигает поверхности Ω:

$$t_f = \min\{t : z(t) \in \Omega,\ z(t_0)=z_0,\ \dot{z}=f(z(t), u(t), v(t))\}.$$

Отметим, что в силу /4/,/5/ $t_f(u(\cdot),v(\cdot)) \leq T$ для всех $(u(\cdot),v(\cdot))$.

Платой в игре G является величина $\Phi(u(\cdot),v(\cdot))=\varphi(z(t_f))$, которую стремится максимизировать первый игрок, в распоряжении которого находится управление $u(\cdot)$, и минимизировать второй игрок, распоряжаясь выбором управления $v(\cdot)$. Скалярная функция $\varphi(z)$ задана на поверхности Ω, и имеет место условие

6) $\varphi(z)$ удовлетворяет условию Липшица:

$$|\varphi(z') - \varphi(z'')| \leq L|z'-z''| \qquad /6/$$

для всех $z' \in \Omega$, $z'' \in \Omega$.

Напомним, что в [I, 2] дифференциальная игра определялась при условии, что уравнение движения имеет вид

$$\dot{x} = f(t, x, u, v),$$
$$x(t_0) = x_0,$$

где функция $f(t,x,u,v)$ непрерывна на $[t_0, T] \times R^m \times U \times V$, удовлетворяет условию Липшица по переменной x, а также условию

$$|f(t,x,u,v)| \leq k_2'|x|+k_3', \quad k_2', k_3' - const,$$

т.е. удовлетворяет условиям I) - 4). Кроме того, терминальное множество Ω удовлетворяет условию вида

$$\Omega^- \supset [T_0, +\infty) \times R^m, \quad T_0 \in [t_0, T].$$

Нетрудно видеть, однако, что используемые определения и результаты работ [I, 2] применимы и в рассматриваемом случае.

Обозначим через S_R шар радиуса R, из которого не выходит ни одна траектория уравнения /I/-/I'/ за время $(T-t_0)$, и пусть

$$M = \sup_{R^m \times U \times V} |f(z,u,v)|.$$

Последнее требование не ограничивает общности, поскольку мы можем считать, что $f(z,u,v)=0$ вне достаточно большого шара, содержащего шар S_R.

Через Ω_ε обозначим множество

$$\Omega_\varepsilon = \{z \in R^m : z = \bar{z} + \lambda\nu(\bar{z}),\ \bar{z} \in \Omega,\ \lambda \in [0,\varepsilon]\}.$$

В силу требований на поверхность Ω, при достаточно малых $\varepsilon > 0$, $\lambda \in [0,\varepsilon]$ векторы $\bar{z}=\bar{z}(z) \in \Omega$, $\nu(\bar{z})$ и величина $\lambda=\lambda(z)$ в разложении $z=\bar{z}+\lambda\nu(\bar{z})$ будут непрерывно дифференцируемыми функциями аргумента z, если $z \in \Omega_\varepsilon$, причем $\rho(z) = \rho(z, \Omega) = \lambda$. Если же $z \in \Omega^-$, указанные свойства следуют из выпуклости пространства игры $\mathcal{D}$. Отметим, что в таком случае функция $\nu(\bar z)$ будет липшицевой по переменной z на любом компактном подмножестве множества $\Omega^- \cup \Omega_\varepsilon$.

Пусть $\varepsilon > 0$ достаточно мало. Рассмотрим уравнение

$$\dot z = \begin{cases} f(z, u, v), & z \in \Omega^+ \setminus \Omega_\varepsilon, \\ f(z, u, v) - 2M\nu(\bar z), & z \notin \Omega^+ \setminus \Omega_\varepsilon, \end{cases} \qquad /7/$$

$$z(t_0) = z_0. \qquad /7'/$$

Правая часть уравнения /7/ однозначно определена при всех $z \in R^m$ (и достаточно малых ε). Предположим, что выполнено условие

7) $N(z, u, v) = \nu(\bar z) f(z, u, v) < 0$

для всех $u \in U$, $v \in V$, $z \in \Omega_\varepsilon \setminus \Omega$, если ε достаточно мало.

Сформулированное условие означает, что величина $\rho(z(t)) = \rho(z(t), \Omega)$ убывает вдоль любой траектории $z(t)$ уравнения /1/-/1'/, если $z(t) \in int\,\Omega_\varepsilon$ (при достаточно малом ε)/. Нетрудно видеть, что при выполнении условий 1) - 3), 7) уравнение /7/-/7'/ также имеет единственное решение, продолжимое на промежуток $[t_0, T]$ при подстановке в правую часть /7/ произвольной ситуации.

Через τ_ε обозначим момент времени

$$\tau_\varepsilon = \tau_\varepsilon(u(\cdot), v(\cdot)) = \min\{t : z(t) \in \Omega_\varepsilon,\ z(t_0) = z_0,\ \dot z = f(z, u(t), v(t))\}.$$

В силу условия 7) для любой ситуации момент времени τ_ε однозначно определен.

Траектории уравнения /7/-/7'/ (при фиксированном ε) будем обозначать через $z_\varepsilon(t)$. Очевидно, для любой ситуации $(u(\cdot), v(\cdot))$

$$z(t) = z_\varepsilon(t), \qquad t \in [t_0, \tau_\varepsilon].$$

Траектория $z_\varepsilon(t)$ пересекает поверхность Ω в момент времени $t_{f\varepsilon}$, где $t_{f\varepsilon}(u(\cdot), v(\cdot))$ определяется аналогично t_f, причем

$$t_{f\varepsilon} - \tau_\varepsilon \leq \frac{\varepsilon}{M}. \qquad /8/$$

Возьмем неотрицательную гладкую финитную функцию $\beta_\varepsilon(s)$, носитель которой сосредоточен на промежутке $[0, \varepsilon]$, такую, что $\int\limits_0 \beta_\varepsilon(s)\,ds = 1$, и на траекториях уравнения /7/-/7'/ зададим функционал

$$\Phi_\varepsilon(u(\cdot), v(\cdot)) = -\int\limits_{t_0}^{T} \varphi(\bar z_\varepsilon(t))\beta_\varepsilon(\rho(z_\varepsilon(t)))(\nu(\bar z_\varepsilon(t)) f(z_\varepsilon(t), u(t), v(t)) - 2M)\,dt, \qquad /9/$$

где $\bar z$ есть непрерывное продолжение функции $\bar z = \bar z(z)$ ("проекции" точки z на Ω) с множества $(\Omega^- \cup \Omega_\varepsilon)$, на котором эта функция определена и непрерывна, на все пространство R^m.

2°. Рассмотрим антагонистическую дифференциальную игру G_ε двух игроков, динамика которой задается уравнением /7/-/7'/, интегральная плата - функционалом /9/, допустимые управления те же, что в игре $\mathcal{B}$.

Зафиксируем ситуацию $(u(\cdot), v(\cdot))$ и выясним, насколько различаются величины $\Phi(u(\cdot), v(\cdot))$, $\Phi_\varepsilon(u(\cdot), v(\cdot))$. При $t > \tau_\varepsilon$

$$\frac{d}{dt}\rho(z_\varepsilon(t)) = \nu(\bar{z}_\varepsilon(t))(f(z_\varepsilon(t), u(t), v(t)) - 2M\nu(\bar{z}_\varepsilon(t))) =$$
$$= \nu(\bar{z}_\varepsilon(t))f(z_\varepsilon(t), u(t), v(t)) - 2M \leq -M < 0,$$

поэтому $z_\varepsilon(t)$ при $t \geq \tau_\varepsilon$ будет однозначной непрерывной функцией от $\rho(z_\varepsilon(t))$. Возьмем ρ в качестве переменной интегрирования в /9/. Получим

$$\Phi_\varepsilon(u(\cdot), v(\cdot)) = \int_0^\varepsilon \varphi(\bar{z}_\varepsilon(t))\beta_\varepsilon(\rho)d\rho = \varphi(\bar{z}_\varepsilon(\theta_\varepsilon))\int_0^\varepsilon \beta_\varepsilon(\rho)d\rho = \varphi(\bar{z}_\varepsilon(\theta_\varepsilon)),$$

$\theta_\varepsilon \in [\tau_\varepsilon, t_{\varphi\varepsilon}]$.

Имеем, учитывая /6/,

$$|\Phi(u(\cdot), v(\cdot)) - \Phi_\varepsilon(u(\cdot), v(\cdot))| = |\varphi(z(t_\varphi)) - \varphi(\bar{z}_\varepsilon(\theta_\varepsilon))| \leq L|z(t_\varphi) - \bar{z}_\varepsilon(\theta_\varepsilon)|, \qquad /10/$$

$\theta_\varepsilon \in [\tau_\varepsilon, t_{\varphi\varepsilon}]$.

Так как

$$\bar{z}_\varepsilon(\theta_\varepsilon) = z_\varepsilon(\theta_\varepsilon) - \lambda\nu(\bar{z}_\varepsilon(\theta_\varepsilon)),$$

то из /10/

$$|\Phi(u(\cdot), v(\cdot)) - \Phi_\varepsilon(u(\cdot), v(\cdot))| \leq L|z(t_\varphi) - z_\varepsilon(\theta_\varepsilon)| + L\varepsilon, \qquad /11/$$

$\theta_\varepsilon \in [\tau_\varepsilon, t_{\varphi\varepsilon}]$.

При $t \geq \tau_\varepsilon$

$$|z(t) - z(\tau_\varepsilon)| = \left|\int_{\tau_\varepsilon}^t f(z(t), u(t), v(t))dt\right|,$$

$$|z_\varepsilon(t) - z_\varepsilon(\tau_\varepsilon)| = \left|\int_{\tau_\varepsilon}^t f(z_\varepsilon(t), u(t), v(t) - 2M\nu(\bar{z}_\varepsilon(t)))dt\right|,$$

откуда

$$|z(t_\varphi) - z(\tau_\varepsilon)| \leq M(t_\varphi - \tau_\varepsilon), \qquad /12/$$
$$|z_\varepsilon(\theta_\varepsilon) - z_\varepsilon(\tau_\varepsilon)| \leq 3M(\theta_\varepsilon - \tau_\varepsilon),$$

$\theta_\varepsilon \in [\tau_\varepsilon, t_{\varphi\varepsilon}]$,

т.е. из /8/

$$|z_\varepsilon(\theta_\varepsilon) - z_\varepsilon(\tau_\varepsilon)| \leq 3\varepsilon. \qquad /13/$$

Учитывая, что $z_\varepsilon(\tau_\varepsilon) = z(\tau_\varepsilon)$, получаем оценку

$$|z(t_\varphi) - z_\varepsilon(\theta_\varepsilon)| \leq M(t_\varphi - \tau_\varepsilon) + 3\varepsilon. \qquad /14/$$

Так как $t_\varphi - \tau_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то из /11/, /14/ вытекает

Л е м м а 1. При любой фиксированной ситуации $(u(\cdot), v(\cdot))$

$$\Phi_\varepsilon(u(\cdot), v(\cdot)) \to \Phi(u(\cdot), v(\cdot)) \qquad /15/$$

при $\varepsilon \to 0$.

Траектория $z_\varepsilon(t)$, реализующаяся в ситуации $(u(\cdot), v(\cdot))$, пересекает Ω в момент времени $t_{f\varepsilon}$ в точке $z_\varepsilon(t_{f\varepsilon})$.

Лемма 2.

$$|\varphi(z_\varepsilon(t_{f\varepsilon})) - \Phi_\varepsilon(u(\cdot), v(\cdot))| \to 0 \qquad /16/$$

при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Аналогично /10/ может быть получено соотношение

$$|\varphi(z_\varepsilon(t_{f\varepsilon})) - \Phi_\varepsilon(u(\cdot), v(\cdot))| \le L|z_\varepsilon(t_{f\varepsilon}) - z_\varepsilon(\theta_\varepsilon)| + L\varepsilon, \qquad /17/$$

$\theta \in [\tau_\varepsilon, t_{f\varepsilon}]$.

Рассуждая, как и при доказательстве леммы I, имеем

$$|z_\varepsilon(t_{f\varepsilon}) - z_\varepsilon(\theta_\varepsilon)| \le |z_\varepsilon(t_{f\varepsilon}) - z_\varepsilon(\tau_\varepsilon)| + |z_\varepsilon(\theta_\varepsilon) - z_\varepsilon(\tau_\varepsilon)| \le 6\varepsilon,$$

и из /17/

$$|\varphi(z_\varepsilon(t_{f\varepsilon})) - \Phi_\varepsilon(u(\cdot), v(\cdot))| \le 7L\varepsilon, \qquad /18/$$

откуда и следует /16/.

Лемма доказана.

Из доказательства леммы 2 вытекает, что величина

$$|\varphi(z_\varepsilon(t_{f\varepsilon})) - \Phi_\varepsilon(u(\cdot), v(\cdot))|$$

стремится к нулю равномерно по всем ситуациям $(u(\cdot), v(\cdot))$ при $\varepsilon \to 0$, в то время как в условиях леммы I указанная равномерность отсутствует.

Предположим, что выполнены условия:

8) множества $f(z, U, V) = \bigcup_{\substack{u \in U \\ v \in V}} \{f(z,u,v)\}$ выпуклы при всех $z \in R^m$.

9) Никакой отрезок любой траектории уравнения /I/-/I'/, содержащий точку z_0 и целиком лежащий в $\Omega^+ \cup \Omega$, не содержит различных точек поверхности Ω.

В таком случае можно показать, что разность $\Phi_\varepsilon(u(\cdot), v(\cdot)) - \Phi(u(\cdot), v(\cdot))$ равномерно по $(u(\cdot), v(\cdot))$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, иными словами, справедлива

Теорема I. Пусть выполнены условия I) - 4), 6) - 9). Тогда для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon(\delta) > 0$, что величины $\Phi(u(\cdot), v(\cdot)), \Phi_\varepsilon(u(\cdot), v(\cdot))$ отличаются менее чем на δ при любой ситуации $(u(\cdot), v(\cdot))$, если только $\varepsilon \in (0, \varepsilon(\delta))$.

Доказательство теоремы проведем, воспользовавшись оценкой

$$|\Phi_\varepsilon(u(\cdot), v(\cdot)) - \Phi(u(\cdot), v(\cdot))| \le LM(t_f - \tau_\varepsilon) + 4L\varepsilon, \qquad /19/$$

полученной при доказательстве леммы I.

Покажем, что в условиях теоремы

$$t_f - \tau_\varepsilon = t_f(u(\cdot), v(\cdot)) - \tau_\varepsilon(u(\cdot), v(\cdot)) \to 0 \qquad /20/$$

при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $(u(\cdot), v(\cdot))$.

Предположим, что /20/ неверно, т.е. найдется $\tau > 0$, удовлетворяющее условию: для любого $\varepsilon > 0$ существует ситуация $(u_\varepsilon(\cdot), v_\varepsilon(\cdot))$, которой отвечает такая траектория $z^{(\varepsilon)}(t)$ уравнения /I/-/I'/, что

$$t_\varphi^{(\varepsilon)} - \tau_\varepsilon^{(\varepsilon)} = t_\varphi(u_\varepsilon(\cdot), v_\varepsilon(\cdot)) - \tau_\varepsilon(u_\varepsilon(\cdot), v_\varepsilon(\cdot)) \geq \tau, \qquad /21/$$

при этом

$$z^{(\varepsilon)}(t_\varphi^{(\varepsilon)}) \in \Omega, \quad z^{(\varepsilon)}(\tau_\varepsilon^{(\varepsilon)}) \in \Omega_\varepsilon.$$

$$z^{(\varepsilon)}(t) \in \Omega^+ \cup \Omega, \ t \in [t_0, t_\varphi^{(\varepsilon)}]. \qquad /22/$$

Возьмем последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, и пусть $\{z_n(t)\}$ - последовательность траекторий уравнения /I/-/I'/, для которых выполнено /21/, /22/ при $\varepsilon = \varepsilon_n$.

Множество траекторий уравнения /I/-/I'/ компактно в $C[t_0, T]$ [4]. Поэтому мы можем считать, что

$$\sup_{t_0 \leq t \leq T} |z_n(t) - z_0(t)| \to 0, \quad n \to \infty,$$

где $z_0(t)$ -траектория уравнения /I/-/I'/, реализующая в ситуации $(u_0(\cdot), v_0(\cdot))$ [5]. При этом можно считать также, что

$$t_\varphi^{(\varepsilon_n)} \to t_\varphi^{(0)}, \quad \tau_{\varepsilon_n}^{(\varepsilon_n)} \to t_{\varphi\varphi}^{(0)},$$

причем из /21/ следует, что

$$t_\varphi^{(0)} - t_{\varphi\varphi}^{(0)} \geq \tau.$$

Таким образом, траектория $z_0(t)$, целиком находясь до момента времени $t_\varphi^{(0)}$ во множестве $\Omega^+ \cup \Omega$, соединяет различные точки $z_0(t_\varphi^{(0)})$, $z(t_{\varphi\varphi}^{(0)})$ поверхности Ω, что противоречит условию 9).

Полученное противоречие доказывает справедливость /20/.

Теорема доказана.

Введем на поверхности Ω псевдометрику

$$\mu_\varphi(z', z'') = |\varphi(z') - \varphi(z'')|, \qquad z', z'' \in \Omega.$$

Сформулируем следующее условие

9а).Никакой отрезок любой траектории уравнения /I/-/I'/, содержащий точку z_0 и целиком лежащий в $\Omega^+ \cup \Omega$, не содержит точек поверхности Ω, псевдорасстояние μ_φ между которыми строго положительно.

Теорема 2. Пусть выполнены условия I) - 4), 6)- 8), 9а).Тогда для любого $\delta > 0$ найдется такое $\varepsilon(\delta) > 0$, что величины $\Phi(u(\cdot), v(\cdot))$, $\Phi_\varepsilon(u(\cdot), v(\cdot))$ отличаются менее чем на δ при любой ситуации $(u(\cdot), v(\cdot))$, если только $\varepsilon \in (0, \varepsilon(\delta))$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть найдется такое $\rho > 0$, что при любом $\varepsilon > 0$ существует ситуация $(u_\varepsilon(\cdot), v_\varepsilon(\cdot))$, для которой

$$|\Phi(u_\varepsilon(\cdot), v_\varepsilon(\cdot)) - \Phi_\varepsilon(u_\varepsilon(\cdot), v_\varepsilon(\cdot))| \geq \rho. \qquad /23/$$

Возьмем последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n \to 0$, $n \to \infty$, и пусть $(u_n(\cdot), v_n(\cdot))$ - ситуация, для которой имеет место /23/ при $\varepsilon = \varepsilon_n$. Через $z^{(n)}(t)$, $z_{\varepsilon_n}^{(n)}(t)$ обозначим траектории уравнений /I/-/I'/;/7/-/7'/

соответственно, реализующиеся в ситациях $(u_n(\cdot), v_n(\cdot))$. Пусть

$$t_f^{(n)} = t_f(u_n(\cdot), v_n(\cdot)), \quad \tau_{\varepsilon_n}^{(n)} = \tau_{\varepsilon_n}(u_n(\cdot), v_n(\cdot)).$$

Из /19/, /23/ вытекает, что

$$t_f^{(n)} - \tau_{\varepsilon_n}^{(n)} > \tau \qquad /24/$$

для некоторого $\tau > 0$ при всех n.

Как и при доказательстве теоремы I, из /24/ следует, что уравнение /1/-/1'/ имеет траекторию $z^{(0)}(t)$, которая есть равномерный предел последовательности траекторий $z^{(n)}(t)$ и которая содержит различные точки $z^{(0)}(t_{ff}^{(0)})$, $z^{(0)}(t_f^{(0)})$ поверхности Ω, где

$$t_{ff}^{(0)} = \lim_{n\to\infty} \tau_{\varepsilon_n}^{(n)}, \quad t_f^{(0)} = \lim_{n\to\infty} t_f^{(n)},$$

причем $t_f^{(0)} - t_{ff}^{(0)} \geq \tau$.

Можно считать, что $\Phi(u_n(\cdot), v_n(\cdot)) \to \tilde{\Phi}$, $\Phi_{\varepsilon_n}(u_n(\cdot), v_n(\cdot)) \to \tilde{\tilde{\Phi}}$, откуда $|\tilde{\Phi} - \tilde{\tilde{\Phi}}| > \gamma$. Но $\Phi(u_n(\cdot), v_n(\cdot)) = \varphi(z^{(n)}(t_f^{(n)}))$, поэтому $\varphi(z^{(0)}(t_f^{(0)})) = \tilde{\Phi}$.

Далее,

$$|\bar{z}_{\varepsilon_n}^{(n)}(t) - \bar{z}_{\varepsilon_n}^{(n)}(\tau_{\varepsilon_n}^{(n)})| \leq C\varepsilon_n$$

при $t \in \left[\tau_{\varepsilon_n}^{(n)}, \tau_{\varepsilon_n}^{(n)} + \frac{\varepsilon_n}{M}\right]$ (см. доказательство леммы 2),

$$|\varphi(\bar{z}_{\varepsilon_n}^{(n)}(\tau_{\varepsilon_n}^{(n)})) - \Phi_{\varepsilon_n}(u_n(\cdot), v_n(\cdot))| \leq CL\varepsilon_n,$$

откуда $\varphi(z^{(0)}(t_{ff}^{(0)})) = \tilde{\tilde{\Phi}}$, так как

$$z^{(0)}(t_{ff}^{(0)}) = \lim_{n\to\infty} z^{(n)}(\tau_{\varepsilon_n}^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} z_{\varepsilon_n}^{(n)}(\tau_{\varepsilon_n}^{(n)}) = \lim_{n\to\infty} \bar{z}_{\varepsilon_n}^{(n)}(\tau_{\varepsilon_n}^{(n)}).$$

Мы видим, что траектория $z^{(0)}(t)$ соединяет точки $z = z^{(0)}(t_f^{(0)})$, $z' = z^{(0)}(t_{ff}^{(0)})$ поверхности Ω, причем $\mu_\varphi(z, z') \geq \gamma > 0$, что невозможно. Полученное противоречие и доказывает справедливость теоремы.

3°. В [2] показано, что существуют верхнее и нижнее значения игры G, вычисляемые как пределы

$$V^+ = \lim_{\delta\to 0} V^\delta, \qquad /25/$$

$$V^- = \lim_{\delta\to 0} V_\delta, \qquad /26/$$

где в качестве верхнего значения V^δ игры $\langle G\rangle^\delta$ берется величина

$$V^\delta = \inf_{u_1(\cdot)} \sup_{v_1(\cdot)} \ldots \inf_{v_s(\cdot)} \sup_{u_s(\cdot)} \Phi(u(\cdot), v(\cdot)),$$

в качестве нижнего значения V_δ игры $\langle G\rangle_\delta$ -величина

$$V_\delta = \sup_{u_1(\cdot)} \inf_{v_1(\cdot)} \ldots \sup_{u_s(\cdot)} \inf_{v_s(\cdot)} \Phi(u(\cdot), v(\cdot)).$$

Здесь через $u_j(\cdot)$, $v_j(\cdot)$ обозначено сужение управлений $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ на промежуток $I_j = [t_0 + (j-1)\delta, t_0 + j\delta)$, $j \in \overline{1,s}$, $s = 2^n$, $\delta = \frac{T - t_0}{s}$. [5].

Общее значение величин V^+, V^- (если они равны) называется значением V игры G .

Аналогично можно определить понятия верхнего и нижнего значений $V^+(\varepsilon)$, $V^-(\varepsilon)$, а также значения $V(\varepsilon)$ в случае игры G_ε .

На основании теоремы I (при выполнении ее условий) можно заключить, что

$$V^\delta(\varepsilon) \to V^\delta, \qquad /27/$$

$$V_\delta(\varepsilon) \to V_\delta \qquad /28/$$

при $\varepsilon \to 0$ при всех δ .

Возьмем последовательности $\{\delta_n\}$, $\{\varepsilon_n\}$, $\delta_n \searrow 0$, $\varepsilon_n \searrow 0$, $n \to \infty$. Рассмотрим последовательность $\{V_n\}$, $V_n = V_{\delta_n}(\varepsilon_n)$, тогда

$$|V_k - V_\ell| = |V_{\delta_k}(\varepsilon_k) - V_{\delta_\ell}(\varepsilon_\ell)| < |V_{\delta_k}(\varepsilon_k) - V_{\delta_k}(\varepsilon_\ell)| + $$
$$+ |V_{\delta_k}(\varepsilon_\ell) - V_{\delta_k}| + |V_{\delta_\ell}(\varepsilon_\ell) - V_{\delta_\ell}| + |V_{\delta_k} - V_{\delta_\ell}| . \qquad /29/$$

В силу /26/, /28/ каждое слагаемое в правой части /29/ может быть сделано сколь угодно малым при достаточно больших k, ℓ , т.е. последовательность $\{V_n\}$ фундаментальна и, стало быть, имеет предел при $n \to \infty$. Поскольку последовательности $\{\delta_n\}, \{\varepsilon_n\}$ произвольны, мы можем утверждать, что существует предел величины $V_\delta(\varepsilon)$ при $\delta \searrow 0, \varepsilon \searrow 0$. Но тогда

$$\lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\varepsilon \searrow 0} V_\delta(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \lim_{\delta \searrow 0} V_\delta(\varepsilon). \qquad /30/$$

Аналогично

$$\lim_{\delta \searrow 0} \lim_{\varepsilon \searrow 0} V^\delta(\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \lim_{\delta \searrow 0} V^\delta(\varepsilon). \qquad /31/$$

Из /27/, /28/, /30/, /31/ вытекает

Т е о р е м а 3. Пусть выполнены условия I)- 4), 6)- 9)(или 9а) и пусть для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ игра G_ε имеет значение при произвольном $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$. Тогда имеет значение и игра G , причем

$$V = \lim_{\varepsilon \searrow 0} V(\varepsilon).$$

Т е о р е м а 4. Пусть выполнены условия I)- 8). Тогда игра $\hat{G}_\varepsilon$ имеет значение (при любом достаточно малом ε).

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы проведем по схеме, предложенной в [1] .

Л е м м а 3. Пусть выполнены условия I)- 8), $k_1(z,u)$, $k_2(z,v)$ - функции, непрерывные на $R^m \times U$, $R^m \times V$ соответственно. Пусть $(u_\lambda(\cdot), v_\lambda(\cdot))$, $(u_\lambda(\cdot), \hat{v}_\lambda(\cdot))$ - произвольные последовательности ситуаций при $\lambda \in \{\lambda_i\}$, $\lambda_i \searrow 0$, $n \to \infty$, причем $\hat{v}_\lambda(t) = v_\lambda(t-\lambda)$, $t \in [t_0+\lambda, T]$ Обозначим через $\{z_{\varepsilon\lambda}(t)\}, \{\hat{z}_{\varepsilon\lambda}(t)\}$ последовательности траекторий, реализующиеся в ситуациях $(u_\lambda(\cdot), v_\lambda(\cdot))$, $(u_\lambda(\cdot), \hat{v}_\lambda(\cdot))$ соответственно.

Тогда можно указать такую бесконечную последовательность

$\{\lambda_{n'}\}\subset\{\lambda_n\}$, что

$$\sup_{t_0\le t\le T}|\hat{z}_{\varepsilon\lambda}(t)-z_{\varepsilon\lambda}(t)|\to 0, \qquad /32/$$

$$\left|\int_{t_0}^{T}k_1(\hat{z}_{\varepsilon\lambda}(t),u_\lambda(t))dt-\int_{t_0}^{T}k_1(z_{\varepsilon\lambda}(t),u_\lambda(t))dt\right|\to 0, \qquad /33/$$

$$\left|\int_{t_0}^{T}k_2(\hat{z}_{\varepsilon\lambda}(t),\hat{v}_\lambda(t))dt-\int_{t_0}^{T}k_2(z_{\varepsilon\lambda}(t),v_\lambda(t))dt\right|\to 0 \qquad /34/$$

при $\lambda=\lambda_{n'}\searrow 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем уравнение /7/-/7 /в виде

$$\dot{z}_\varepsilon=f(z_\varepsilon,u,v)+g_\varepsilon(z_\varepsilon),$$
$$z_\varepsilon(t_0)=z_0,$$

где

$$g_\varepsilon(z_\varepsilon)=\begin{cases}0, & z_\varepsilon\in\Omega^+\setminus\Omega_\varepsilon,\\ -2M\nu(\bar{z}_\varepsilon), & z_\varepsilon\notin\Omega^+\setminus\Omega_\varepsilon.\end{cases}$$

Обозначим

$$\eta_{\varepsilon\lambda}(t)=|\hat{z}_{\varepsilon\lambda}(t)-z_{\varepsilon\lambda}(t)|.$$

Так же, как в [1], извлекая из семейства траекторий $\{z_{\varepsilon\lambda}(t)\}$ последовательность $\{z_{\varepsilon\lambda_{n'}}(t)\}$, равномерно на $[t_0,T]$ сходящуюся к функции $z_{\varepsilon 0}(t)$, получим оценку

$$\eta_{\varepsilon\lambda}(t)\le K_1\int_{t_0}^{t}\eta_{\varepsilon\lambda}(t)dt+2\gamma_\varepsilon(\lambda)+\delta_\varepsilon(\lambda)+C_\varepsilon\lambda+\left|\int_{t_0}^{t}g_\varepsilon(\hat{z}_{\varepsilon\lambda}(t))dt-\int_{t_0}^{t}g_\varepsilon(z_{\varepsilon\lambda}(t))dt\right|, \qquad /35/$$

где $\gamma_\varepsilon(\lambda)\to 0$, $\delta_\varepsilon(\lambda)\to 0$ при $\lambda=\lambda_{n'}\to 0$, C_ε - const.

Обозначим $\tau_{\varepsilon\lambda}=\tau_\varepsilon(u_\lambda(\cdot),v_\lambda(\cdot))$, $\hat{\tau}_{\varepsilon\lambda}=\tau_\varepsilon(u_\lambda(\cdot),\hat{v}_\lambda(\cdot))$. Сравнивая различные случаи взаиморасположения точек $\tau_{\varepsilon\lambda}$, $\hat{\tau}_{\varepsilon\lambda}$, t на отрезке $[t_0,T]$, получаем

$$\left|\int_{t_0}^{t}g_\varepsilon(\hat{z}_{\varepsilon\lambda}(t))dt-\int_{t_0}^{t}g_\varepsilon(z_{\varepsilon\lambda}(t))dt\right|\le 2M|\hat{\tau}_{\varepsilon\lambda}-\tau_{\varepsilon\lambda}|+2M\int_{\max\{\tau_{\varepsilon\lambda},\hat{\tau}_{\varepsilon\lambda}\}}^{t}|\nu(\bar{\hat{z}}_{\varepsilon\lambda}(t))-\nu(\bar{z}_{\varepsilon\lambda}(t))|dt\le$$
$$\le 2M|\hat{\tau}_{\varepsilon\lambda}-\tau_{\varepsilon\lambda}|+2MK\int_{t_0}^{t}\eta_{\varepsilon\lambda}(t)dt,$$

где K - постоянная Липшица для $\nu(\bar{z})$.

Покажем, что

$$\tau_\varepsilon(\lambda)=|\hat{\tau}_{\varepsilon\lambda}-\tau_{\varepsilon\lambda}|\to 0 \qquad /36/$$

при $\lambda=\lambda_{n'}\searrow 0$.

В самом деле, пусть $\hat{\tau}_{\varepsilon\lambda}\to\hat{\tau}_{\varepsilon 0}$, $\tau_{\varepsilon\lambda}\to\tau_{\varepsilon 0}$ при $\lambda=\lambda_{n'}\searrow 0$, и (для определенности) $\hat{\tau}_{\varepsilon 0} > \tau_{\varepsilon 0}$.

Траектории $\hat{z}_{\varepsilon\lambda}(t)$, $z_{\varepsilon\lambda}(t)$ до моментов $\hat{\tau}_{\varepsilon\lambda}$, $\tau_{\varepsilon\lambda}$ соответственно совпадают с траекториями $\hat{z}_\lambda(t)$, $z_\lambda(t)$ уравнения /I/-/I′/ , реализующимися в ситуациях $(u_\lambda(\cdot), v_\lambda(\cdot)), (u_\lambda(\cdot), \hat{v}_\lambda(\cdot))$. На основании леммы 4 из [I] мы можем считать, что

$$\sup_{t_0 \le t \le T} |\hat{z}_\lambda(t) - z_\lambda(t)| \to 0,$$
$$\sup_{t_0 \le t \le T} |\hat{z}_\lambda(t) - z_0(t)| \to 0,$$
$$\sup_{t_0 \le t \le T} |z_\lambda(t) - z_0(t)| \to 0$$

при $\lambda = \lambda_n \searrow 0$, где $z_0(t)$ - некоторая траектория уравнения /I/-/I′/. Рассуждая, как и при доказательстве теоремы I настоящей работы, получаем, что траектория $z_0(t)$ вплоть до момента времени $\hat{\tau}_{\varepsilon 0}$ лежит в замкнутом множестве $(\overline{\Omega^+ \setminus \Omega_\varepsilon})$ и соединяет различные точки $z_0(\tau_{\varepsilon 0})$ $z_0(\hat{\tau}_{\varepsilon 0})$ такие, что $\rho(z_0(\tau_{\varepsilon 0})) = \rho(z_0(\hat{\tau}_{\varepsilon 0})) = \varepsilon$.С другой стороны, из условия 7)следует, что у уравнения /I/-/I′/ отсутствуют траектории, обладающие таким свойством.

Полученное противоречие доказывает /36/.

Оценка /35/, таким образом, может быть записана в виде

$$\eta_{\varepsilon\lambda}(t) \le (K_1 + 2Mk)\int_{t_0}^{t} \eta_{\varepsilon\lambda}(t)dt + 2\gamma_\varepsilon(\lambda) + \delta_\varepsilon(\lambda) + C_\varepsilon\lambda + 2M\tau_\varepsilon(\lambda),$$

где $\gamma_\varepsilon(\lambda)$, $\delta_\varepsilon(\lambda)$, C_ε, $\tau_\varepsilon(\lambda)$ не зависят от t и $\gamma_\varepsilon(\lambda) \to 0$, $\delta_\varepsilon(\lambda) \to 0$, $\tau_\varepsilon(\lambda) \to 0$ при $\lambda = \lambda_{n'} \searrow 0$, откуда и вытекает /32/.

Утверждения /33/, /34/ доказываются так же, как в [I] .

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 4 в таком случае повторяет доказательство аналогичной теоремы в I.

4°. Доказанные в п.2° теоремы позволяют с любой степенью точности (в смысле разницы в плате) заменить рассмотрение дифференциальных игр на выживание рассмотрением игр с интегральной платой и фиксированной длительностью игры. Напомним, что обратная задача (сведение игр с интегральной платой к играм с терминальной платой) была решена еще в [7] , поэтому полученный результат представляет и самостоятельный интерес.

Из результатов [I] вытекает существование значения в игре G при выполнении услсвий I)- /6), 8), 9), существование значения в играх G_ε при выполнении условий I)- 9)(или 9a)) следует из теоремы 4 настоящей работы. Таким образом, теорема 3 дает возможность приближенной замены решения задачи об отыскании значения в игре на выживание G решением задачи об отыскании значения в играх G_ε (при достаточно малых ε).

Автор выражает глубокую признательность И.А.Крассу за постановку задачи и внимание к работе, а также В.С.Пацко за критические замечения.

Поступила в ред.-изд.отдел
15 сентября 1976 г.

Литература

1. **Friedman A. On the difinition of differential games and the existence of value and of saddle ppints.** - Journal of differential equations, 1970, v. 7,N1, p. 69-91.

Русский перевод в кн.: Кибернетический сборник. Новая серия. М., "Мир",1972, вып.9, с.103-126 .

2. **Friedman A. Existence of value and of saddle points for differential games of sur vival. - Journal of differential equations, 1970, v.7, N1, p.111-125.**

Русский перевод там же, с.146-160 .

3. Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М., "Мир",1970.

4. **Kikuchi N. On contingent equations. In: Lecture Notes in Mathematics. 243. Berlin a.o., 1971, p.169-181.**

5. Филиппов А.Ф. О некоторых вопросах теории оптимального регулирования.-"Вестник МГУ",Серия математика,механика,физика". 1959, № 2, с.25-32.

6. **Danskin J.M. Values in differential games. - Bull. Amer. Math. Soc., 1974, v.80, N3, p.449-455.**

7. Айзекс Р. Дифференциальные игры. М., "Мир", 1967.