Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1977 г. выпуск 16.
УДК.517.949.2.

ПОТОЧЕЧНАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ГИБРИДНЫХ СИСТЕМ

А.А.АХУНДОВ /Баку/

Исследуется задача поточечной управляемости систем, состоящих из совокупности дифференциально-разностных и разностных уравнений. Получены необходимые и достаточные условия поточечной управляемости.

1. Определения. Рассмотрим линейную гибридную систему:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ay(t) + A_1 x(t) + A_2 y(t-h) + A_3 x(t-h) + C_0 u(t), \\ y(t) = By(t-h) + B_1 x(t) + B_2 x(t-h) + Cu(t), \quad t \in T = [0, t_1] \end{cases} \qquad /1/$$

с начальными условиями:

$$x_0(\cdot) = \{x(\tau) = x_0(\tau),\ -h \leqslant \tau < 0,\ x(0) = x_0\},$$
$$y_0(\cdot) = \{y(\tau) = y_0(\tau),\ -h \leqslant \tau < 0\}. \qquad /2/$$

Здесь x, y и u - n, n_0 и r -мерные векторы соответственно, A, $A_i\ (i=1,2,3)$, C_0, B, $B_j\ (j=1,2)$, C - постоянные матрицы соответствующих размерностей, $x_0(\tau)$, $y_0(\tau)$, $\tau \in [-h, 0)$ кусочно-непрерывные функции.

Пусть $\alpha_i\ (i=\overline{0,\ell})$ - некоторая фиксированная последовательность чисел, удовлетворяющих неравенствам

$$0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_\ell, \quad t_1 - \alpha_\ell > 0. \qquad /3/$$

Гибридную систему управления /1/ назовем $x(y)$-поточечно управляемой по набору $\alpha_i\ (i=\overline{0,\ell})$ на отрезке $(0, t_1]$, если для любых начальных условий вида /2/ и $n\ (n_0)$ -мерных векторов $c_i\ (d_i)\ (i=\overline{0,\ell})$ существует кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in T$, такое, что соответствующая этим начальным условиям и управлению траектория $x(t) = x(t, x_0(\cdot), y_0(\cdot), u(\cdot))$ $(y(t) = y(t, x_0(\cdot), y_0(\cdot), u(\cdot)))$, $t \in T$, удовлетворяет условиям $x(t_1 - \alpha_i) = c_i$, $(y(t_1 - \alpha_i) = d_i)$ $(i=\overline{0,\ell})$.

Система /1/ называется $x(y)$ -поточечно управляемой, если она $x(y)$-поточечно управляема по всем наборам $\alpha_i\ (i=\overline{0,\ell})$, удовлетворяющим неравенствам /3/.

Гибридная система управления /1/ называется поточечно управляемой по набору $\alpha_i\ (i=\overline{0,\ell})$ на отрезке $(0, t_1]$, если для любых начальных условий вида /2/ и векторов c_i, d_i, $c_i \in R_n$, $d_i \in R_{n_0}\ (i=\overline{0,\ell})$, существует кусочно-непрерывное управление $u(t)$, $t \in T$, такое, что соответствующая этим начальным условиям и управлению траектория $x(t) = x(t, x_0(\cdot), y_0(\cdot), u(\cdot))$, $y(t) = y(t, x_0(\cdot), y_0(\cdot), u(\cdot))$, $t \in T$, удовлетворяет условиям $x(t_1 - \alpha_i) = c_i$, $y(t_1 - \alpha_i) = d_i\ (i=\overline{1,\ell})$. Здесь R_k - к-мерное евклидово пространство $(k = n, n_0)$.

Система /I/ называется поточечно управляемой [I] , если она поточечно управляема по всем наборам α_i $(i=\overline{0,\ell})$, удовлетворяющим неравенствам /3/.

2. Определяющая система уравнений гибридной системы управления получается путем использования соответствий [2,3,4] :

$$x(t) \longrightarrow X_K(s),\quad x(t-h) \longrightarrow X_K(s-h),\quad \dot{x}(t) \longrightarrow X_{K+1}(s),$$
$$y(t) \longrightarrow Y_K(s),\quad y(t-h) \longrightarrow Y_K(s-h),\quad u(t) \longrightarrow U_K(s):$$

$$\begin{cases} X_{K+1}(s) = AY_K(s) + A_1X_K(s) + A_2Y_K(s-h) + A_3X_K(s-h) + C_0U_K(s), \\ Y_K(s) = BY_K(s-h) + B_1X_K(s) + B_2X_K(s-h) + CU_K(s). \end{cases} \qquad /4/$$

Начальные условия зададим соотношениями:

$$U_0(0) = E_r;\quad U_0(s) \equiv 0_{rr}\ (s \neq 0);\quad U_K(s) \equiv 0_{rr},\ X_0(s) \equiv 0_{nr},$$
$$(-\infty < s < \infty,\ K = 1,2,\dots);\quad X_i(s) \equiv 0_{nr}, \qquad /5/$$
$$Y_i(s) \equiv 0_{n_0 r}\quad (-\infty < s < 0,\ i = 0,1,\dots),$$

где E_r – $r \times r$ -мерная единичная матрица, 0_{ij} - $i \times j$ -мерная нулевая матрица.

Из системы /4/,/5/ путем последовательных вычислений получаем общие формулы для определения членов последовательности

$$X_{K+1}(s) = \begin{cases} \sum\limits_{i_1} P_{i_1} U_0(s - i_1 h), & K = 0, \\ \sum\limits_{i_1 \dots i_K i_{K+1}} G_{i_1} \dots G_{i_K} P_{i_{K+1}} U_0\Big(s - \sum\limits_{j=1}^{K+1} i_j h\Big), & K = 1,2,\dots \end{cases} \qquad /6/$$

$$Y_K(s) = \begin{cases} \sum\limits_{i_0} B^{i_0} C U_0(s - i_0 h), & K = 0, \\ \sum\limits_{i_0 i_1} K_{i_0} P_{i_1} U_0(s - (i_0 + i_1)h), & K = 1, \\ \sum\limits_{i_0 i_1 \dots i_K} K_{i_0} G_{i_1} \dots G_{i_{K-1}} P_{i_K} U_0\Big(s - \sum\limits_{j=0}^{K} i_j h\Big), & K = 2,3,\dots \end{cases} \qquad /7/$$

Здесь символ $\sum\limits_{\alpha\beta\dots\gamma}$ означает сумму $\sum\limits_{\alpha=0}^{m}\sum\limits_{\beta=0}^{m}\dots\sum\limits_{j=0}^{m}$, число m определяется соотношением $t_1 \in (mh, (m+1)h]$, $P_0 = AC + C_0$,

$$P_j = [AB + A_2]\, B^{j-1} C,\quad G_0 = AK_0 + A_1,\quad G_1 = AK_1 + A_2K_0 + A_3,$$
$$G_i = AK_i + A_2K_{i-1},\quad K_0 = B_1,\quad K_K = B^{K-1}[BB_1 + B_2]$$
$$(i = \overline{2,m};\quad K, j = \overline{1,m}).$$

3. Критерии поточечной управляемости. Ниже предполагается, что $t_1<(m+1)\cdot h$. При $t_1=(m+1)h$ во всех критериях число m следует увеличить на единицу.

Теорема I. Система /I/ x - поточечно управляема по набору α_i $(i=\overline{0,l})$ на отрезке $(0,t_1]$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left\{\begin{matrix} X_{k+1}(s-\alpha_p), & \\ p=\overline{0,l} & k=\overline{0,n(m+1)-1},\ s\in\delta \end{matrix}\right\}=n(l+1),$$

где $\delta=\left\{ih+\alpha_j:\ i=\overline{0,m};\ j=\overline{0,l}\right\}$

символом $\left\{\begin{matrix} A_{pk}, & k=0,1,\dots \\ p=0,1,\dots & \end{matrix}\right\}$

обозначена матрица

$$\begin{bmatrix} A_{00} & \dots & A_{0k} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{p0} & \dots & A_{pk} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}.$$

Теорема 2. Система /I/ y - поточечно управляема по набору α_i $(i=\overline{0,l})$ на отрезке $(0,t_1]$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left\{\begin{matrix} Y_k(s-\alpha_p), & \\ p=\overline{0,l} & k=\overline{0,n(m+1)},\ s\in\delta \end{matrix}\right\}=n_0(l+1).$$

Теорема 3. Система /I/ поточечно управляема по набору α_i $(i=\overline{0,l})$ на отрезке $(0,t_1]$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left\{\begin{matrix} X_k(s-\alpha_p)\xi_{\{0\}}(i_0), \\ Y_k(s-\alpha_p),\ k=\overline{0,n(m+1)-1},\ s\in\delta_0,\ i_0=\overline{0,m} \\ p=\overline{0,l} \end{matrix}\right\}=(n+n_0)(l+1),$$

где $\xi_{\{0\}}(i_0)$ - характеристическая функция

$$\xi_{\{0\}}(i_0)=\begin{cases}1, & i_0=0, \\ 0, & i_0\neq 0;\end{cases}$$

число i_0 имеет тот же смысл, что в формуле /7/, $\delta_0=\left\{\delta+i_0h:\ i_0=\overline{0,m}\right\}$.

Имеют место следствия:

Следствие I. Система /I/ x - поточечно управляема на отрезке $(0,t_1]$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left\{\begin{matrix} X_{k+1}(s-ph), & \\ p=\overline{0,q};\ q=\left[\frac{\alpha_l}{h}\right] & ,k=\overline{0,n(m+1)-1},\ s\in T \end{matrix}\right\}=n(q+1).$$

С л е д с т в и е 2. Система /I/ y - поточечно управляема на отрезке $(0,t_1]$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left\{\begin{array}{l} Y_k\ (s-ph), \qquad k=\overline{0,n(m+1)}\ ,\ s\in T \\ p=\overline{0,q}\ ;\ q=\left[\frac{\alpha\ell}{h}\right] \end{array}\right\}=n_0(q+1).$$

С л е д с т в и е 3. Система /I/ поточечно управляема на отрезке $(0,t_1]$ тогда и только тогда, когда

$$\operatorname{rank}\left\{\begin{array}{l} X_k(s-ph)\xi_{\{0\}}(i_0), \\ Y_k(s-(p-i_0)h), \quad k=\overline{0,n(m+1)},\ s\in T,\ i_0=\overline{0,m} \\ p=\overline{0,q}\ ;\ q=\left[\frac{\alpha\ell}{h}\right]\ . \end{array}\right\}=(n+n_0)(q+1).$$

4.П р и л о ж е н и е. Справедливость утверждения теоремы I-3, доказывается путем сведения исходной задачи к проблеме моментов, решением ее и представлением неявного критерия поточечной управляемости, полученного как решение проблемы моментов, через решения определяющей системы уравнений /4/,/5/. Поэтому ограничимся приведением доказательства одной из теорем I-3, например теоремы 2.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Функция $y(t)$, $t\in T$, участвующая в системе /I/, определяется формулой [3] :

$$y(t)=\sum_i B^i Cu(t-ih)+\int_0^t S^0(t,\tau)u(\tau)d\tau+$$

$$+s(x_0(\cdot),y_0(\cdot),u(0),t),\quad t\in T, \qquad /8/$$

где $s(x_0(\cdot),y_0(\cdot),u(0),t)=s^0(x_0(\cdot),y_0(\cdot),t)-\sum_{i=1}^m \xi_{\{ih\}}(t)B^iCu(0)$, $s^0(x_0(\cdot),y_0(\cdot),t)$ - некоторая функция, полностью определяемая начальными данными /2/, $S^0(t,\tau)=\sum_{ij} K_i F(t,\tau+(i+j)h)P_j$,

$$\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial\tau}=-\sum_i F(t,\tau+ih)G_i\ ;\ F(t,t-0)=E_n,\ F(t,\tau)\equiv O_{nn},\ \tau>t.$$

Сделаем замену переменных в формуле /8/: $y(t_1-\alpha_i)=\eta_i(t_1)$, $u(t_1-\alpha_i)=w_i(t_1)$ $(i=\overline{0,\ell})$ и введем обозначения:

$$\Phi(t_1,\tau)=\begin{bmatrix} F(t_1,\tau)F(t_1,\tau+h)\dots F(t_1,\tau+mh) \\ F(t_1,\tau+h) \qquad\qquad \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ \vdots \qquad \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ F(t_1,\tau+mh) \qquad\qquad 0 \end{bmatrix},\ P=\begin{bmatrix} P_0\\ P_1\\ \vdots\\ P_m\end{bmatrix},\ \eta=\begin{bmatrix}\eta_0\\ \eta_1\\ \vdots\\ \eta_m\end{bmatrix},\ w=\begin{bmatrix}w_0\\ w_1\\ \vdots\\ w_m\end{bmatrix},$$

$$B_0^j=\begin{bmatrix} B^j & & 0\\ & B^j & \\ 0 & \ddots & B^j\end{bmatrix},\qquad C^0=\begin{bmatrix} C & & 0\\ & C & \\ 0 & \ddots & C\end{bmatrix},$$

$$K^{o\prime}(x_o(\cdot), y_o(\cdot), t_1) =$$

$$= [s^{o\prime}(x_o(\cdot), y_o(\cdot), t_1),\ s^{o\prime}(x_o(\cdot), y_o(\cdot), t_1-\alpha_1), \ldots, s^{o\prime}(x_o(\cdot), y_o(\cdot), t_1-\alpha_\ell)] ,$$

$$\xi^{o\prime}(t_1, B^K C) = [O_{r n_o},\ \xi_{\{Kh\}}(t_1-\alpha_1)(B^K C)', \ldots, \xi_{\{Kh\}}(t_1-\alpha_\ell)(B^K C)'] ,$$

$$Q^{s\prime} = [O_{n(m+1), n_o s},\ K',\ O_{n(m+1), n_o(\ell-s)}],\quad K = [K_o, K_1, \ldots, K_m],$$

$$K^o(t_1,\tau) = \begin{cases} Q^o \Phi(t_1,\tau) P, & \tau \in (t_1-\alpha_1, t_1] , \\ \cdots & \\ \sum\limits_{s=0}^{\varkappa} Q^s \Phi(t_1, \tau+\alpha_s) P, & \tau \in (t_1-\alpha_{\varkappa+1}, t_1-\alpha_\varkappa] , \\ \cdots & \\ \sum\limits_{s=0}^{\ell} Q^s \Phi(t_1, \tau+\alpha_s) P, & \tau \in [0, t_1-\alpha_\ell] , \end{cases}$$

$$M = \{t_1 - ih - \alpha_s ;\ i=\overline{0,m} ;\ s=\overline{0,\ell}\} \quad (j=\overline{0,m};\ K=\overline{1,m} ;\ s=\overline{0,\ell}),$$

где q – $n_o(\ell+1)$ - вектор, w - $r(\ell+1)$ -вектор, B_o^j $(j=\overline{0,m})$-матрица размерности $n_o(\ell+1) \times n_o(\ell+1)$, C^o -матрица размерности $n_o(\ell+1) \times r(\ell+1)$,символ " $'$ " (штрих) означает операцию транспонирования.

При этих обозначениях вектор $q'(t_1) = [y'(t_1), y'(t_1-\alpha_1), \ldots, y'(t_1-\alpha_\ell)]$ принимает следующий вид:

$$q(t_1) = \int\limits_{T \setminus M} K^o(t_1,\tau) u(\tau) d\tau + \sum_i B_o^i C^o w(t_1 - ih) -$$
$$- \sum_{K=1}^{m} \xi^o(t_1, B^K C) u(0) + K^o(x_o(\cdot), y_o(\cdot), t_1). \qquad /9/$$

Проблема моментов /9/ разрешима тогда и только тогда, когда для любого $n_o(\ell+1)$ -мерного вектора g , $\|g\| \neq 0$, выполняется хотя бы одно из следующих условий:

1) существует индекс i $(i=\overline{0,m})$ такой, что $g' B_o^i C^o \neq 0$,

2) $g' K^o(t_1,\tau) \not\equiv 0$, $\tau \in T \setminus M$.

Условие 1) эквивалентно равенству $\operatorname{rank}\{B_o^i C^o,\ i=\overline{0,m}\} = n_o(\ell+1)$, которое при помощи /7/ решений определяющего уравнения /4/, /5/ можно записать в виде

$$\operatorname{rank} \left\{ \begin{matrix} Y_c(s-\alpha_p), \\ p=\overline{0,\ell} \end{matrix} \quad s \in b \right\} = n_o(\ell+1).$$

Так же как в [3,4], выясняем, что функция $g'K^{\circ}(t_1,\tau)$, $\tau\in T$, удовлетворяет однородному линейному дифференциальному уравнению порядка $n(m+1)$. Замечая, что матрица

$$\left\{ \begin{matrix} Y_k(s-\alpha_p), \\ p=\overline{0,l} \end{matrix} \quad k=\overline{1,n(m+1)}, \quad s\in b \right\}$$

полностью описывает скачки функции $g'K^{\circ}(t_1,\tau)$, $\tau\in T$, и ее производных по τ до $n(m+1)-1$ - го порядка включительно в точках $t_1-ih-\alpha_j$, $i=\overline{0,m}$; $j=\overline{0,l}$, убеждаемся в справедливости утверждения теоремы 2.

Замечание 1. Система /1/ не является y -поточечно управляемой, если $m<\frac{n_0-1}{l}$, ибо в противном случае матрица

$$\left\{ \begin{matrix} Y_k(s-\alpha_p), \\ p=\overline{0,l} \end{matrix} \quad k=\overline{0,n(m+1)}, \quad s\in b \right\}$$

не имела бы $n_0(l+1)\times n_0(l+1)$ - мерного минора.

Замечание 2. Имеет место равенство

$$\operatorname{rank}\left\{ \begin{matrix} Y_0'(s-\alpha_p), \\ p=\overline{0,l} \end{matrix} \quad s\in b \right\} = \operatorname{rank}\left\{ Y_0(ih),\ i=\overline{0,m} \right\}(l+1). \qquad /10/$$

Доказательство справедливости равенства /10/ очевидным образом следует из вида матриц B_0^j ($j=\overline{0,m}$) и C°.

Поступила в ред.-изд.отдел
29 сентября 1976 г.

Литература

1. Минюк С.А. Две задачи управляемости для линейной системы с последействием.Вестник БГУ,сер.физ-мат.мех.наук,1972,№1,стр.8-11.

2. Габасов Р.Ф. ,Кириллова Ф.М. Качественная теория оптимальных процессов. М., "Наука", 1971 г.

3. Ахундов А.А. Управляемость линейных гибридных систем.В кн.: Управляемые системы, Новосибирск 1975, вып. 14, стр.4-10.

4. Ахундов А.А.Наблюдаемость линейных гибридных систем, Известия АН БССР, сер.физ-мат.наук, 1975, № 5,стр.53-57.