Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1976 г. выпуск 15.
УДК.519.1.

О ВЗАИМНОЙ СВОДИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ГРАФОВ

А.И.Сердюков

Рассмотрим n - вершинный неориентированный связный граф $G=(X,U)$, у которого каждому ребру $u_{ij} \in U$, $1 \le i$, $j \le n$, приписан вес ρ_{ij}, где ρ_{ij} - вещественные положительные числа. Пусть $G_1=(X_1, U_1)$ - произвольный частичный подграф графа G. Требуется указать замкнутый маршрут L в графе G обхода всех вершин и ребер частичного подграфа G_1 с минимальным весом $\rho(L)=\sum_{u_{ij}\in L}\rho_{ij}$ (здесь учитывается кратность прохождения ребер). Выделим два частных случая этой задачи:

З а д а ч а A. $G_1 = G$ - задача китайского почтальона [4], [6].

З а д а ч а $Б$. $G_1=(X, \varnothing)$ - задача минимального обхода вершин графа [3].

В настоящей работе доказано, что задачу A на n - вершинном графе G можно свести к задаче $Б$ на некотором m - вершинном графе, $m \le 2n$, и приводятся оценки этого сведения. Причем по пути сведения задачи A к задаче $Б$ устанавливается ряд промежуточных результатов.

Все термины, относящиеся к теории графов и используемые в настоящей работе, можно найти в книге [2].

§ 1. Эквивалентные постановки задач A и $Б$.

Помимо задач A и $Б$ на графе G рассмотрим следующие три задачи:

З а д а ч а C. Взвешенная задача о покрытии [1], [5].

З а д а ч а $\mathcal{D}$. Задача о минимальном совершенном паросочетании [4], [5].

З а д а ч а E. Задача коммивояжера [1], [2].

О п р е д е л е н и е. Будем говорить, что имеет место импликация $A[n] \to Б[m]$, если задачу A на графе размерности n можно свести к задаче $Б$ на графе размерности m, при этом трудоемкость сведения задачи A к задаче $Б$ обозначим через $\tau_{AБ}$ (элементарных операций). Это определение касается также любых выше перечисленных задач.

В работах [4], [5] установлено, что

$$A[n] \to \mathcal{D}[m], \quad m \le n, \quad \tau_{A\mathcal{D}} = O(n^3),$$

$$\mathcal{D}[n] \to A[m], \quad m = n, \quad \tau_{\mathcal{D}A} = O(n^2),$$

$$\mathcal{D}[n] \to C[m], \ m = n, \ \tau_{\mathcal{D}C} = O(n^2),$$
$$C[n] \to \mathcal{D}[m], \ m = 2n, \ \tau_{C\mathcal{D}} = O(n^3).$$

Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а I. Имеет место следующая импликация:

$$Б[n] \to E[m], \ m = n, \text{при} \ \tau_{БE} = O(n^3).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Построим полный n - вершинный граф $\tilde{G} = (X, \tilde{U})$, у которого каждому ребру $\tilde{u}_{ij} \in \tilde{U}$, $1 \leq i$, $j \leq n$, приписан вес $\tilde{p}_{ij}$, равный весу кратчайшей цепи между вершинами с номерами i и j на графе G. Обозначим через $\tilde{L}$ минимальный маршрут задачи $Б$ на графе $\tilde{G} = (X, \tilde{U})$. Так как всякое ребро, входящее в минимальный маршрут L задачи $Б$ на графе G, является кратчайшей цепью между своими вершинами, то необходимо выполнение равенства:

$$p(L) = \tilde{p}(\tilde{L}). \qquad /1/$$

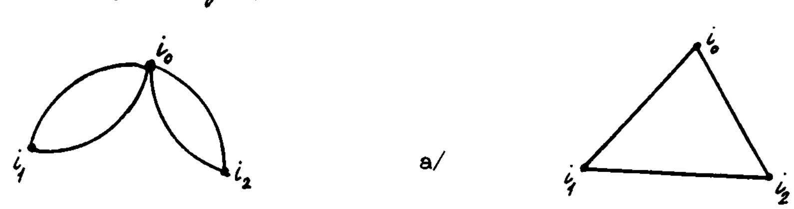
Л е м м а I. Существет гамильтонов цикл K на графе $\tilde{G}$, являющийся минимальным маршрутом задачи $Б$ на графе $\tilde{G}$.

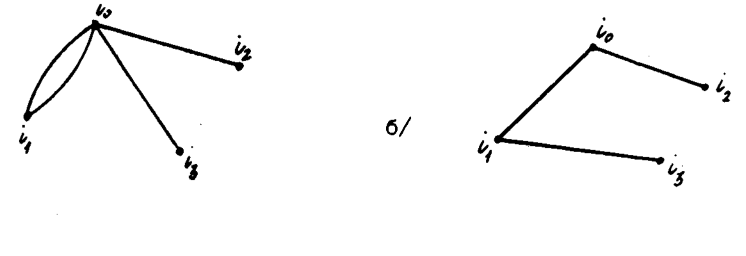
Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное, то есть не существует гамильтонова цикла на графе $\tilde{G}$, являющегося минимальным маршрутом задачи $Б$ на графе $\tilde{G}$. Пусть $\tilde{L}_0$ - минимальный маршрут задачи $Б$ на графе $\tilde{G}$, имеющий минимальное число ребер (здесь учитывается кратность прохождения ребер). В силу основного предположения должна существовать вершина i_0 на графе $\tilde{G}$, инцидентная, по крайней мере, четырем ребрам маршрута $\tilde{L}_0$ (здесь учитывается кратность прохождения ребер .

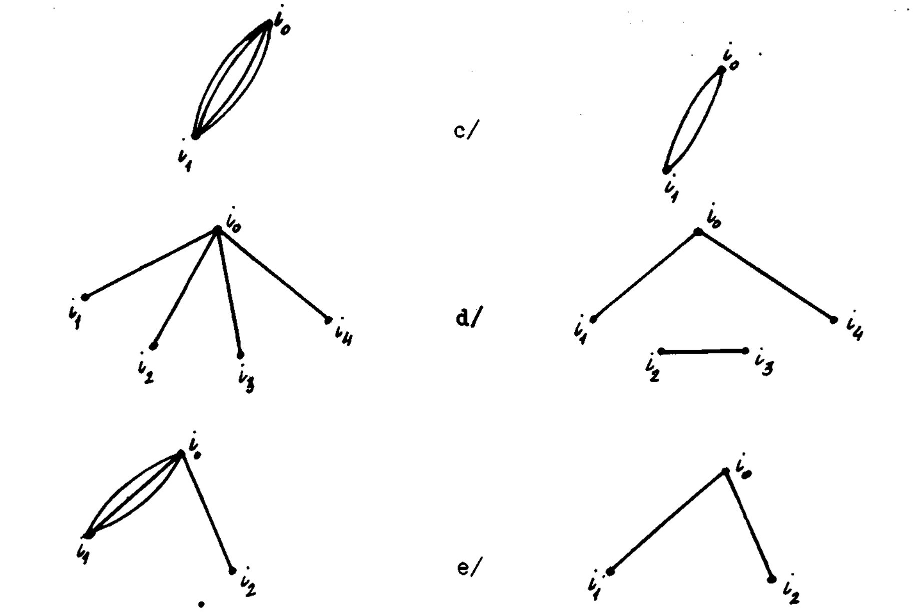
З а м е ч а н и е. I. В графе $\tilde{G}$ выполнено неравенство треугольника:

$$\tilde{p}_{ij} \leq \tilde{p}_{ik} + \tilde{p}_{kj} \ . \qquad /2/$$

Пользуясь неравенством /2/ и полнотой графа $\tilde{G}$, преобразуем маршрут $\tilde{L}_0$ в некоторый замкнутый маршрут $\tilde{L}_1$ обхода всех вершин графа $\tilde{G}$ без увеличения веса (см. рис. I) . (На этом рисунке показаны только те ребра маршрута $\tilde{L}_0$, которые подвергаются преобразованию).







Множество ребер маршрута $\tilde{L}_0$ до преобразования

Множество ребер маршрута $\tilde{L}_1$ после преобразования

Рис. I.

На рис. I перечислены все возможные случаи преобразования маршрута $\tilde{L}_0$. Покажем, что $\tilde{L}_1$ является замкнутым маршрутом обхода всех вершин графа. $\tilde{G}$. Для этого достаточно показать после каждого конкретного случая преобразования маршрута $\tilde{L}_0$ четность степени каждой вершины в маршруте $\tilde{L}_1$ и связность маршрута $\tilde{L}_0$. Первое следует из того, что в маршруте $\tilde{L}_0$ все вершины имели четную степень. Второе выполнено в случаях а), в), с), е). Рассмотрим случай $d)$. В этом случае помимо выделенных ребер в маршруте $\tilde{L}_0$ должна существовать цепь, соединяющая вершину i_2 с одной из четырех оставшихся вершин, показанных на рисунке I. Без ограничения общности можно считать, что такая цепь связывает вершину i_2 с вершиной i_0, либо с вершиной i_1, откуда и следует связность маршрута $\tilde{L}_1$. Однако маршрут $\tilde{L}_1$ содержит по крайней мере на одно ребро меньше, чем маршрут $\tilde{L}_0$ и для него выполнено неравенство:

$$\tilde{\rho}(\tilde{L}_1) < \tilde{\rho}(\tilde{L}_0).$$

Получили противоречие основному предположению. Лемма I доказана.

Доказательство теоремы I: Опишем сведение задачи $Б$ к задаче E. Основными этапами такого сведения являются:

I) построение графа $\tilde{G}$ по исходному графу;

2) построение минимального маршрута L задачи $Б$ на графе G по минимальному гамильтонову циклу на графе $\tilde{G}$ (каждому ребру минимального гамильтонова цикла на графе $\tilde{G}$ сопоставляется кратчайшая цепь в графе G).

Минимальность построенного таким образом маршрута L задачи $Б$ на графе G гарантируется леммой I, равенством /I/ и определением весов ребер на графе $\tilde{G}$. Далее, заметим, что на этапах I), 2) сведения задачи $Б$ к задаче E требуется не более $O(n^3)$ элементарных операций. Теорема I доказ... полностью.

Лемма 2. Имеет место им...кация:

$$E[n] \to Б[m], \quad m = n, \text{ при } \tau_{EБ} = O(n^2).$$

Доказательство. Пусть G - исходный граф. Припишем графу G новые веса:

$$\rho^*_{ep} = n \cdot \max_{u_{ij} \in U} \rho_{ij} + \rho_{ep}, \quad u_{ep} \in U, \ 1 \le e, \ p \le n.$$

Заметим, что минимальный гамильтонов цикл на графе G с исходными весами ребер является минимальным гамильтоновым циклом на графе G с новыми весами ребер, а минимальный маршрут задачи $Б$ на графе с новыми весами ребер является минимальным гамильтоновым циклом на графе G с исходными весами ребер. Это верно в случае, когда граф G содержит гамильтонов цикл. В противном случае показывается, что гамильтонова цикла в графе G не существует). Лемма 2 доказана.

§ 2. Связь задачи A с задачей $Б$.

Докажем следующую теорему:

Теорема 2. Имеет место следующая импликация:

$$C[n] \to E[m], \quad m = 2n, \quad \text{при } \tau_{CE} = O(n^3).$$

Доказательство. Рассмотрим граф $\tilde{G} = (X, \tilde{U})$. В работе [5] установлено равенство для весов покрытий M и $\tilde{M}$, являющихся минимальными соответственно для графов G и $\tilde{G}$, то есть

$$\rho(M) = \tilde{\rho}(\tilde{M}). \qquad /3/$$

Там же установлен следующий результат.

Лемма 3. Среди всех минимальных покрытий в графе $\tilde{G}$ существует стандартное покрытие $\tilde{M}_0$, связные компоненты которого состоят не более чем из двух ребер.

Построим полный m - вершинный, $m = 2n$, неориентированный граф $H = (Y, V)$, у которого каждому ребру $v_{ij} \in V$, $1 \le i$, $j \le m$, приписан вес ρ^*_{ij}, где

$$\rho^*_{ij} = \begin{cases} \tilde{\rho}_{ij}, & \text{если } 1 \le i, \quad j \le n \\ 0, & \text{если } 1 \le i \le n, \ j = i + n, \\ n \cdot \max\limits_{u_{ep} \in \tilde{U}} \tilde{\rho}_{ep}, & \text{если } 1 \le i \le n, \ n+1 \le j \le m, \ j \ne i + n, \\ 0, & \text{если } n+1 \le i, \ j \le m. \end{cases}$$

Обозначим через K_0 минимальный гамильтонов цикл на графе H ,а через $\tilde{K}_1$ - след на графе $\tilde{G}$ цикла K_0 , то есть

$$\tilde{K}_1 = \{\tilde{u}_{ij} / v_{ij} \in K_0,\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant n\}.$$

(заметим, что если $1 \leqslant i \leqslant n,\ n+1 \leqslant j \leqslant m,\ j \neq i+n$, то $v_{ij} \in K_0$), который является покрытием графа $\tilde{G}$. Тогда мы имеем:

$$\tilde{p}(\tilde{M}_0) \leqslant \tilde{p}(\tilde{K}_1) = p^*(K_0). \qquad /4/$$

обратное неравенство следует из того, что добавляя к множеству $K_2 = \{v_{ij} / u_{ij} \in \tilde{M}_0,\ 1 \leqslant i,\ j \leqslant n\}$ определенные ребра нулевого веса в графе H , получим гамильтонов цикл на графе H . Тогда выполнено следующее неравенство:

$$p^*(K_0) \leqslant p^*(K_2) = \tilde{p}(\tilde{M}_0). \qquad /5/$$

Сопоставляя неравенство /4/ с неравенством /5/, получим равенство:

$$\tilde{p}(\tilde{M}_0) = p^*(K_0). \qquad /6/$$

Опишем сведение задачи C к задаче E . Основными этапами этого сведения являются:

I) построение графа $\tilde{G}$ по исходному графу G ;

2) построение графа H ;

3) построение следа на графе $\tilde{G}$ минимального гамильтонова цикла для графа H ;

4) построение покрытия на графе G (по каждому ребру $\tilde{u}_{ij} \in \tilde{K}_1$, $1 \leqslant i,\ j \leqslant n$, строится кратчайшая цепь между вершинами i и j в графе G) . Минимальность построенного таким образом покрытия гарантируется равенствами /3/, /6/ и леммой 3. Далее, заметим, что на этапах I/, 2/, 3/, 4/ сведения задачи C к задаче E требуется не более $O(n^3)$ элементарных операций. Теорема 2 доказана полностью.

С л е д с т в и е I. Имеет место следующая импликация:

$$\mathcal{D}[n] \to E[m],\ m = 2n, \text{ при } \tau_{\mathcal{D}E} = O(n^3).$$

С л е д с т в и е 2. Имеют место следующие импликации:

$$A[n] \to E[m],\ m \leqslant 2n, \text{ при } \tau_{AE} = O(n^3);$$
$$A[n] \to Б[m],\ m \leqslant 2n, \text{ при } \tau_{AБ} = O(n^3).$$

С л е д с т в и е 3. Имеют место следующие импликации:

$$\mathcal{D}[n] \to Б[m],\ m = 2n, \text{ при } \tau_{\mathcal{D}Б} = O(n^3);$$
$$C[n] \to Б[m],\ m = 2n, \text{ при } \tau_{CБ} = O(n^3).$$

Основной результат, полученный в настоящей работе, можно изобразить на рис. 2 следующим образом:

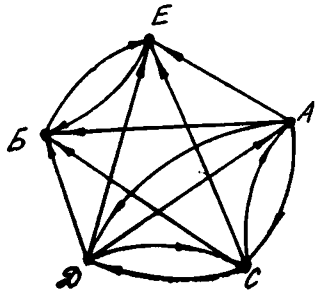


Рис. 2.

В заключение автор выражает благодарность В.А.Перепелице, под руководством которого была написана работа.

Поступила в ред-изд.отдел
27 января 1976 г.

Литература

1.Корбут А, Финкельштейн Ю. Дискретное программирование. М., "Наука" 1969.

2. Берж К. Теория графов и ее применение. М., И.Л., 1962.

3. Гимади Э.Х., Перепелица В.А. О статистически эффективных алгоритмах для некоторых экстремальных задач теории графов. В кн: Тезисы Ш Всесоюзной конференции по проблемам теоретической кибернетики, ИМ СО АН СССР, Новосибирск, 1974, стр. 125.

4. Сердюков А.И. О задаче нахождения минимального эйлерова мальтиграфа. В кн: Управляемые системы, Новосибирск, "Наука", 1974, вып.12.

5. Сердюков А.И. К задаче о покрытии. В кн: Управляемые системы, Новосибирск, "Наука" 1975, вып. 14.

6. Chistofides Nicos. The optimum traversal of a graph. "Omega", 1973, 1, N6.