Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1976 г. выпуск 15.
УДК.512.25/26+519.3:303.115.

О ЗАДАЧЕ НАХОЖДЕНИЯ КРАТЧАЙШЕГО СВЯЗЫВАЮЩЕГО ДЕРЕВА С ОГРАНИЧЕНИЕМ

С.А.Морозов

Будем рассматривать связные неориентированные n - вершинные графы $G(\mathcal{U})$, у которых каждому ребру $u_{ij} \in \mathcal{U}$ приписано два вещественных числа: длина ℓ_{ij} и вес ρ_{ij}. Допустимым деревом для графа $G(\mathcal{U})$ называется такое связывающее этот граф дерево $\mathcal{D}$, для которого вес $\sigma_{\mathcal{D}} = \sum_{u_{ij} \in \mathcal{D}} \rho_{ij}$ не превосходит наперед заданного числа C

$$\sigma_{\mathcal{D}} \leq C . \qquad /1/$$

Множество всех допустимых деревьев для $G(\mathcal{U})$ обозначим через $\mathcal{M} = \{\mathcal{D}\}$.

Требуется для заданного графа $G(\mathcal{U})$ найти кратчайшее связывающее $\mathcal{D}^{\circ}$, то есть такое допустимое дерево, для которого сумма весов его ребер $L_{\mathcal{D}} = \sum_{u_{ij} \in \mathcal{D}} \ell_{ij}$ наименьшая

$$L_{\mathcal{D}^{\circ}} = \min_{\mathcal{D} \in \mathcal{M}} L_{\mathcal{D}} . \qquad /2/$$

Задача /1/-/2/ является обобщением задачи нахождения связывающего дерева минимального веса без ограничения /1/, для решения которой существует эффективный алгоритм Прима [3]. Что касается сформулированной выше задачи /1/-/2/, то она не решена в том смысле, что для нее не построены достаточно эффективные алгоритмы. В настоящей статье приводится описание приближенного метода решения задачи /1/-/2/ с обоснованием априорной оценки уклонения получаемого решения от оптимума.

Для обоснования указанных оценок сформулируем вспомогательную задачу. Пусть x - точка не отрицательной полуоси. Для каждого ребра $u_{ij} \in \mathcal{U}$ определим вещественную функцию.

$$f_{ij}(x) = \ell_{ij} + \rho_{ij} \cdot x . \qquad /3/$$

Обозначим через $\mathcal{P} = \{\mathcal{D}\}$ множество всех деревьев, связывающих граф $G(\mathcal{U})$, то есть всех таких деревьев, каждое из которых является суграфом данного графа $G(\mathcal{U})$. Ясно, что $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}$. Наша вспомогательная задача состоит из нахождения такого дерева $\mathcal{D} \in \mathcal{P}$, на котором достигает минимума целевая функция.

$$F_x(\mathcal{D}) = \sum_{u_{ij} \in \mathcal{D}} f_{ij}(x) = \sum_{u_{ij} \in \mathcal{D}} \ell_{ij} + x \sum_{u_{ij} \in \mathcal{D}} \rho_{ij} \to \min_{\mathcal{D} \in \mathcal{P}} . \qquad /4/$$

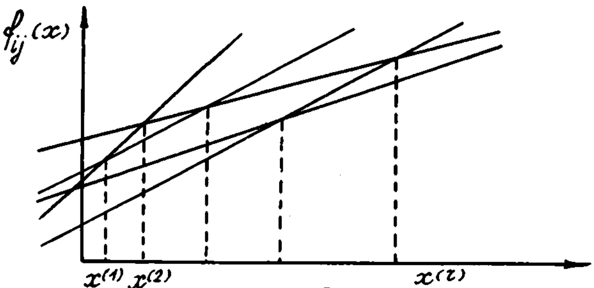

Рис. I

Рассмотрим графики функций $f_{ij}(x)$ для $u_{ij} \in \mathcal{U}$, построенные в положительном квадрате декартовых координат. Абсциссы точек пересечения графиков различных функций /3/ будем называть критическими точками.

Предположение I. Для всяких пар ребер $(u_{i_1j_1}, u_{i_2j_2})$ и $(u_{i_3j_3}, u_{i_4j_4})$ критические точки не совпадают. Для данного графа $G(\mathcal{U})$ упорядочим все $C^2_{|\mathcal{U}|}=m$ критических точек в монотонную строго возрастающую последовательность

$$0 < x^{(1)} < x^{(2)} < \ldots < x^{(r)} < \ldots < x^{(m)} < +\infty . \qquad /5/$$

Зафиксируем некоторое значение x и рассмотрим граф G_x, представляющий собой исходный граф $G(\mathcal{U})$, у которого ребрам u_{ij} приписан вес $f_{ij}(x)$. Если фиксированное x не является критической точкой из последовательности /5/, то для G_x можно выписать строго возрастающую последовательность весов его ребер

$$f_{ij}(x) < f_{kl}(x) < \ldots < f_{pq}(x) \qquad /6/$$

и соответствующую ей последовательность этих ребер

$$\mathcal{T}(x) = < u_{ij},\ u_{kl},\ \ldots,\ u_{pq} > . \qquad /7/$$

В условиях предположения I каждую критическую точку из /5/ можем заключить в отрезок $[a_2, b_2]$ такой, что никакая пара таких отрезков не будет пересекаться. Воспользовавшись для наглядности рис. I, в силу определения понятия критической точки можем сформулировать следующее

Замечание I. Для графов G_{a_2} и G_{b_2} можем указать такую пару ребер $u_{i_1j_1}, u_{i_2j_2} \in \mathcal{U}$, что

$$f_{i_1j_1}(a_2) < f_{i_2j_2}(a_2) \qquad \text{и} \qquad f_{i_1j_1}(b_2) > f_{i_2j_2}(b_2),$$

точнее, последовательность $\mathcal{T}(b_2)$ получается из последовательности

$$\mathcal{T}(a_2) = < u_{i_0j_0}, \ldots, u_{i_1j_1}, u_{i_2j_2}, \ldots, u_{p_0q_0} >$$

только взаимной перестановкой соседней пары ребер $u_{i_1j_1}$ и $u_{i_2j_2}$, а взаимный порядок для остальных ребер одинаков.

Введем следующие обозначения:

$\mathcal{D}_x$ - дерево $\mathcal{D} \in P$, являющееся оптимальным решением вспомогательной задачи /4/;

$\mathcal{U}_x$ - множество ребер дерева $\mathcal{D}_x$, $\{u_{ij}\}$ - одноэлементное множество, состоящее из ребра u_{ij}. В дальнейшем будем пользоваться также понятием разреза, то есть разделяющего множества, состоящего из всех ребер, которые соединяют некоторое множество вершин с его дополнением [1] . Ради краткости будем также писать a и b вместо a_2 и b_2 соответственно.

Т е о р е м а 1. При переходе значения x через критическую точку $x^{(r)} \in (a,b)$ оптимальное дерево $\mathcal{D}_x$ меняется не более, чем на одно ребро, то есть, если $\mathcal{D}_a$ и $\mathcal{D}_b$ - оптимальные решения задачи /4/ для графов G_a и G_b соответственно, то либо $\mathcal{U}_a = \mathcal{U}_b$, либо

$$\mathcal{U}_a \setminus \mathcal{U}_b = \{u_{i_1 j_1}\} \quad \text{и} \quad \mathcal{U}_b \setminus \mathcal{U}_a = \{u_{i_2 j_2}\} .$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим $\mathcal{U}_a \neq \mathcal{U}_b$. Рассмотрим ребро $u_{kl} \in \mathcal{U}_b \setminus \mathcal{U}_a$ и добавим его к дереву $\mathcal{D}_a$. В результате получим цикл K , состоящий из некоторых ребер дерева $\mathcal{D}_a$ (см.рис. 2, где эти ребра выделены жирными линиями) и ребра u_{kl} , замыкающих цепочку из этих ребер

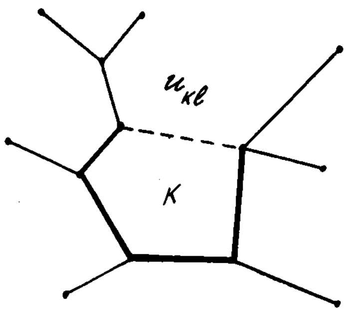

Рис. 2

З а м е ч а н и е 2. В силу оптимальности дерева $\mathcal{D}_a$ для графа G_a и того, что $x=a$ не является критической точкой для каждого ребра $u_{ij} \in K \cap \mathcal{U}_a$ выполняется строгое неравенство

$$f_{ij}(a) < f_{kl}(a). \qquad /8/$$

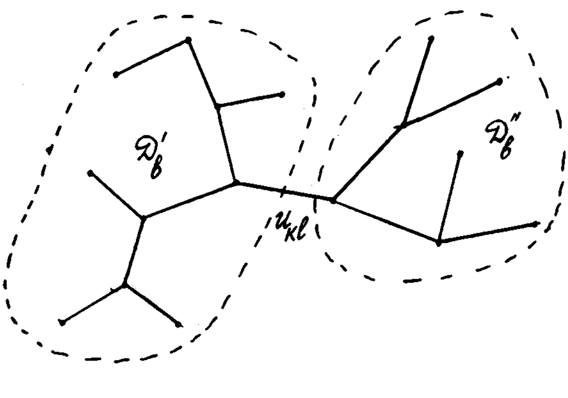

Рис. 3

Рассмотрим теперь оптимальное дерево $\mathcal{D}_b$, которому принадлежит ребро u_{kl}. При вычеркивании этого ребра дерево $\mathcal{D}_b$ распадается на две связных части $\mathcal{D}_b'$ и $\mathcal{D}_b''$ (см.рис.3), в частности $\mathcal{D}_b''$ может состоять из одной вершины.

Обозначим через V' и V'' множество вершин частей $\mathcal{D}_b'$ и $\mathcal{D}_b''$ соответственно. Пусть R - такой разрез графа $G(\mathcal{U})$, который разделяет V' и V'', причем

$$R \cap \mathcal{U}_b = \{u_{kl}\} .$$

По аналогии с замечанием 2 для каждого ребра $u_{ij} \in R \setminus \{u_{kl}\}$ выполняется строгое неравенство

$$f_{ij}(b) > f_{kl}(b). \qquad /9/$$

Вместе с тем разрез R по определению должен делить на две части цикл K, то есть мощность $|K \cap R| \geqslant 2$ и по построению $\mathcal{D}_a \cap K \cap R \neq \emptyset$. Следовательно, существует ребро $u_{st} \in \mathcal{D}_a \cap K \cap R$. С учетом /8/ имеем

$$f_{st}(a) < f_{kl}(a),$$

а с учетом /9/ имеем

$$f_{st}(b) > f_{kl}(b).$$

Принимая во внимание последние два неравенства, окончательно с учетом замечания I имеем, что дерево $\mathcal{D}_b$ получилось из суграфа $(\mathcal{D}_a \cap \{u_{kl}\})$ путем вычеркивания ребра u_{st} из цикла K, то есть $u_{i_1j_1} = u_{st}$, $u_{i_2j_2} = u_{kl}$. Теорема I доказана.

С л е д с т в и е I. Пусть $x^{(r)}$, $x^{(r+1)}$ две соседние критические точки для данного графа $G(\mathcal{U})$. Фиксируем произвольное x^* из интервала $(x^{(r)}, x^{(r+1)})$ и с помощью алгоритма Прима найдем оптимальное дерево $\mathcal{D}^*$ для задачи /4/. Тогда $\mathcal{D}^*$ является также оптимальным решением задачи /4/ для всякого

$$x \in (x^{(r)}, x^{(r+1)}).$$

Рассмотрим отрезок $[a, b]$ содержащий критическую точку $x^{(r)}$. Пусть $\mathcal{D}_a$ и $\mathcal{D}_b$ - связывающие граф $G(\mathcal{U})$ деревья, фигурирующие в условиях теоремы I, и l_{ij} - длина ребра $u_{ij} \in \mathcal{U}$. Покажем, что

$$\sum_{u_{ij} \in \mathcal{D}_a} l_{ij} \leqslant \sum_{u_{ij} \in \mathcal{D}_b} l_{ij} . \qquad /10/$$

Для этого рассмотрим графики $f_{ij}(x)$, $u_{ij} \in \mathcal{U}$ и их точки пересечения, то есть критические точки $x^{(r)}$, $r = 1,2,\dots,m$ (см.рис. I). Согласно предположению I и замечанию I на отрезке $[a, b]$ пересекается только пара графиков $f_{i_1j_1}(x)$ и $f_{i_2j_2}(x)$, то есть $f_{i_1j_1}(x^{(r)}) = f_{i_2j_2}(x^{(r)})$. Последнее равенство согласно /3/ означает

$$l_{i_1j_1} + p_{i_1j_1} x^{(r)} = l_{i_2j_2} + p_{i_2j_2} x^{(r)}. \qquad /11/$$

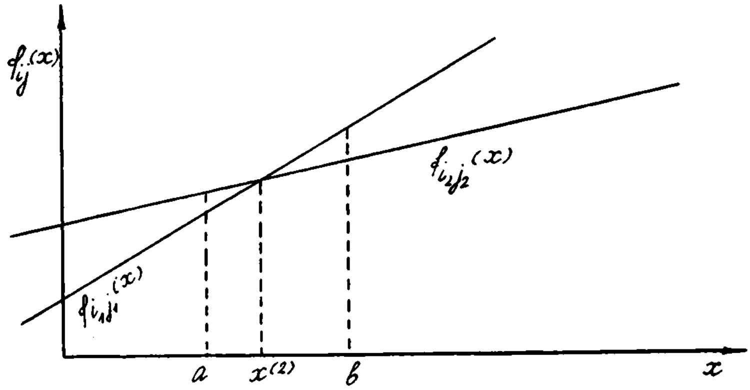

Рис. 4

Из определения $f_{ij}(x)$ (см.рис.4) имеем: $f_{i_1j_1}(x) < f_{i_2j_2}(x)$, если $x < x^{(r)}$ и $f_{i_1j_1}(x) > f_{i_2j_2}(x)$, если $x > x^{(r)}$. Следовательно в силу $a<x^{(r)}<b$ получим

$$l_{i_1j_1} + p_{i_1j_1}a < l_{i_2j_2} + p_{i_2j_2}a ,$$
$$l_{i_1j_1} + p_{i_1j_1}b > l_{i_2j_2} + p_{i_2j_2}b .$$

Последние два неравенства означают, что $(b-a)p_{i_1j_1} > (b-a)p_{i_2j_2}$, то есть $p_{i_1j_1} > p_{i_2j_2}$ откуда с учетом /II/ имеем

$$l_{i_1j_1} < l_{i_2j_2} . \qquad /12/$$

Согласно замечанию 1 оптимальные деревья $\mathcal{D}_a$ и $\mathcal{D}_b$ отличаются только парой ребер $u_{i_1j_1}$, $u_{i_2j_2}$. Отсюда с учетом /12/ следует справедливость соотношения /10/. В процессе обоснования /10/ мы показали, что

$$\sum_{u_{ij}\in\mathcal{D}_a} p_{ij} \geqslant \sum_{u_{ij}\in\mathcal{D}_b} p_{ij} . \qquad /13/$$

Таким образом, если обозначим $b^{(r)} = b_{\mathcal{D}_x} = \sum_{u_{ij}\in\mathcal{D}_x} p_{ij}$ – сумма весов и $L^{(r)} = L_{\mathcal{D}_x} = \sum_{u_{ij}\in\mathcal{D}_x} l_{ij}$ – сумма длин ребер оптимального в смысле /4/ дерева $\mathcal{D}_x$ при $x\in(x^{(r)}, x^{(r+1)})$, то для нашей последовательности критических точек

$$0 < x^{(1)} < x^{(2)} < \ldots < x^{(r)} < \ldots < x^{(m)} < x^{(m+1)} = +\infty .$$

На основании /10/ и /13/ можем записать:

$$b^{(1)} \geqslant b^{(2)} \geqslant \ldots \geqslant b^{(r)} \geqslant \ldots \geqslant b^{(m)} ,$$
$$L^{(1)} \leqslant L^{(2)} \leqslant \ldots \leqslant L^{(r)} \leqslant \ldots \leqslant L^{(m)} . \qquad /14/$$

При этом замечания 1 непосредственно следует, что для данного графа $G(U)$ и любого $r = 1, 2, \ldots , m$

$$L^{(r+1)} - L^{(r)} \leqslant \max_{u_{ij}\in U} l_{ij} - \min_{u_{ij}\in U} l_{ij} = \Delta . \qquad /15/$$

Обозначим $\mathcal{D}^{o}$ -оптимальное дерево задачи /1/+ /2/ и L^{o} и b^{o}- соответственно суммы длин и весов ребер дерева $\mathcal{D}^{o}$. Согласно /14/ и /15/ r^{o} такое, что $b^{(r_0-1)} > c \geqslant b^{(r_0)}$. Из свойств задачи /4/

имеем
$$L^{(\tau_0-1)}+\delta^{(\tau_0+1)}x^{(\tau_0)}\leq L^0+\delta^0\cdot x^{(\tau_0)}.$$
Тогда
$$L^{(\tau_0-1)}+x^{(\tau_0)}(\delta^{(\tau_0-1)}-\delta^0)\leq L^0$$
или, более точно, в силу того, что $\delta^0\leq C$ имеем
$$L^{(\tau_0-1)}+x^{(\tau_0)}(\delta^{(\tau_0-1)}-C)\leq L^0 \qquad /16/$$
и кроме того с учетом /14/
$$L^0\leq L^{(\tau_0)}.$$
Следовательно в этом случае
$$L^{(\tau_0-1)}<L^0\leq L^{(\tau_0)}. \qquad /17/$$
Таким образом, если найдем дерево $\mathcal{D}_x(\tau_0)$, то получим либо искомое оптимальное дерево $\mathcal{D}^0$, либо решение $\mathcal{D}_x(\tau_0)$ будет отличаться от искомого оптимума не более, чем на величину /15/.

Отыскание этого дерева $\mathcal{D}_x(\tau_0)$ осуществляется по этапам:

1. Для каждой пары ребер из $\mathcal{U}$ находится критическая точка. Затем найденные m критических точек упорядочиваются в последовательность /5/.

2. При нахождении искомой критической точки $x^{(\tau)}$ воспользуемся свойством последовательностей /14/ и применим дихотомию. Разобъем ряд /5/ пополам, для средней точки $x^{(\tau_1)}$ с помощью алгоритма Прима построим оптимальное в смысле /4/ дерево $\mathcal{D}_x(\tau_1)$, проверим, является ли оно допустимым, то есть удовлетворяет ли соотношению /1/. Если $\mathcal{D}_x(\tau_1)\in\mathcal{M}$, то искомая критическая точка в ряде /5/ находится слева, если $\mathcal{D}_x(\tau_1)\notin\mathcal{M}$, то справа. Далее удовлетворяющую нас половину ряда /5/ снова делим пополам и повторяем этот процесс до выявления искомого допустимого дерева $\mathcal{D}_x(\tau_0)$.

Трудоемкость первого этапа составляет $\sim n^4\ln n$ элементарных операций, а второго этапа $-\sim n^2\ln n$ операций.

В целях экономии памяти имеет смысл рассматривать не все m критических точек сразу, а группами по n^2 точек, в этом случае при той же эффективности память будет $\sim n^2$ ячеек.

Теперь рассмотрим случай, когда предложение 1 не выполняется, то есть равенство, аналогичное равенству /11/ в точке $x^{(\tau)}$ будет иметь вид:
$$f_{i_1j_1}(x^{(\tau)})=f_{i_2j_2}(x^{(\tau)})=\dots=f_{i_sj_s}(x^{(\tau)}). \qquad /18/$$
При этом, пусть
$$\rho_{i_1j_1}\geq\rho_{i_2j_2}\geq\dots\geq\rho_{i_sj_s}. \qquad /19/$$
Замечание 3. Если в графе $G(\mathcal{U})$ существует множество ребер $u_{i_{k_p}j_{k_p}}$ $(1\leq p\leq q)$ $(q\geq 2)$ такое, что при любом значении x имеем $f_{i_{k_1}j_{k_1}}(x)=f_{i_{k_p}j_{k_p}}(x)$ $p=1,2,\dots,q$, то вне критических

точек будем условно полагать:

$$f_{i_{k_\rho} j_{k_\rho}}(x) < f_{i_{k_{\rho+1}} j_{k_{\rho+1}}}(x) \quad \rho=1,2,\dots,q-1.$$

Пусть критическая точка $x^{(\tau)}$ принадлежит отрезку $[a,b]$ не содержащему других критических точек. Тогда в точке a упорядочение величин $f_{i_\vartheta j_\vartheta}(a)$ соотношения /18/ будет иметь вид:

$$f_{i_1 j_1}(a) < f_{i_2 j_2}(a) < \dots < f_{i_s j_s}(a).$$

Отождествим его с перестановкой

$$(1,2,\dots,s),$$

используя соответствие $(i_k, j_k) \longleftrightarrow k$. Это же упорядочение в точке b, имеющее вид

$$f_{i_1 j_1}(b) > f_{i_2 j_2}(b) > \dots > f_{i_s j_s}(b),$$

отождествим с перестановкой

$$(s, s-1, \dots, 1). \qquad /21/$$

Далее образуем последовательность перестановок, первым элементом которой является перестановка /20/, а последним - перестановка /22/, причем перестановки в последовательности таковы, что $(i+1)$- я образуется из i -й перестановкой в последней двух соседних элементов, если $(k_1,\dots,k_\vartheta,\rho,j,k_{\vartheta+3},\dots,k_s)$ - i -я перестановка, то $(k_1,\dots,k_\vartheta,j,\rho,k_{\vartheta+3},\dots,k_s)$-$(i+1)$-я перестановка, при этом $\rho<j$.

Пусть образованная последовательность перестановок состоит из t элементов. Сопоставим перестановке $(k_1,k_2,\dots,k_s)$ упорядочение $f_{i_{k_1} j_{k_1}}(x_\vartheta^{(\tau)}) < \dots < f_{i_{k_s} j_{k_s}}(x_\vartheta^{(\tau)})$, где ϑ - номер перестановки $(k_1, k_2,\dots,k_s)$ в образованной последовательности перестановок, где обозначению $x_{\vartheta}^{(\tau)}$ мы сопоставим упорядочение /22/.

Пусть $\mathcal{D}_k^{(\tau)}$ - оптимальное дерево задачи /4/ в точке $x_k^{(\tau)}$. Рассмотрим соседние точки $x_k^{(\tau)}$ и $x_{k+1}^{(\tau)}$; упорядочение в них отличается взаимным порядком значений $f_{ij}(x)$ только для двух ребер $u_{i_{\vartheta_1} j_{\vartheta_1}}$ и $u_{i_{\vartheta_2} j_{\vartheta_2}}$, то есть

$$f_{i_{\vartheta_1} j_{\vartheta_1}}(x_k^{(\tau)}) < f_{i_{\vartheta_2} j_{\vartheta_2}}(x_k^{(\tau)}),$$
$$f_{i_{\vartheta_1} j_{\vartheta_1}}(x_{k+1}^{(\tau)}) > f_{i_{\vartheta_2} j_{\vartheta_2}}(x_{k+1}^{(\tau)}).$$

При этом с учетом /19/ имеем

$$\rho_{i_{\vartheta_1} j_{\vartheta_1}} \geqslant \rho_{i_{\vartheta_2} j_{\vartheta_2}}.$$

Пусть $b_k^{(\tau)}$ и $L_k^{(\tau)}$ - сумма весов и длин ребер дерева $\mathcal{D}_k^{(\tau)}$. Из теоремы I следует, что $\mathcal{D}_k^{(\tau)}$ отличается от $\mathcal{D}_{k+1}^{(\tau)}$ не более чем одним ребром, и при этом

$$\mathcal{D}_k^{(\tau)} \setminus \mathcal{D}_{k+1}^{(\tau)} = \{u_{i_{\vartheta_1} j_{\vartheta_1}}\},\ \mathcal{D}_{k+1}^{(\tau)} \setminus \mathcal{D}_k^{(\tau)} = \{u_{i_{\vartheta_2} j_{\vartheta_2}}\}.$$

Отсюда:

$$b_{k+1}^{(\tau)} = b_k^{(\tau)} - \rho_{i_{\vartheta_1} j_{\vartheta_1}} + \rho_{i_{\vartheta_2} j_{\vartheta_2}}$$

и в силу того, что $\rho_{i_{\vartheta_1} j_{\vartheta_1}} \geqslant \rho_{i_{\vartheta_2} j_{\vartheta_2}}$ имеем $b_{k+1}^{(\tau)} \leqslant b_k^{(\tau)}$ аналогично можно показать, что $L_{k+1}^{(\tau)} \geqslant L_k^{(\tau)}$.

Далее, используя этот факт, что

$$L_K^{(r)} + x^{(r)} \cdot b_K^{(r)} = L^{(r)} + x^{(r)} \cdot b^{(r)} \qquad K = 1, \dots, t$$

получим неравенства, аналогичные неравенствам /I5/-/I7/, то есть если $b^{(r)} > c > b^{(r+1)}$ и $L^{(r+1)} - L^{(r)} > \Delta$, то существует K такое, что

$$L_K^{(r)} + x^{(r)}(b_K^{(r)} - c) \leqslant L^{\circ} \leqslant L_{K+1}^{(r)},$$

$$b_K^{(r)} > c \geqslant b_{K+1}^{(r)}.$$

Этот метод гарантирует точное решение в случае, если все веса или все длины ребер графа $G(\mathcal{U})$ принимают только два значения.

Рассмотрим тот случай, когда веса равны 0 или 1. В силу того, что $b^{(r)}$- целые и $b^{(r)} - b^{(r+1)} \leqslant 1$, существует K такое,что $b^{\circ} = b^{(K)}$,а отсюда $L^{\circ} = L^{(K)}$. Аналогично в случае $\ell_{ij} \in \{0,1\}$.

Несложно построить пример, когда описанный алгоритм не будет давать точное решение:

$$\ell_x = 2, \ p_x = 2, \ \ell_y = 3, \ p_y = 1, \ \ell_z = 1, \ p_z = 4.$$

Критическими точками здесь будут

$$x^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad x^{(2)} = \frac{2}{3}, \quad x^{(3)} = 1.$$

Соответственно

$$b^{(1)} = 6, \quad b^{(2)} = 6, \quad b^{(3)} = 3, \quad b^{(4)} = 3,$$
$$L^{(1)} = 3, \quad L^{(2)} = 3, \quad L^{(3)} = 5, \quad L^{(4)} = 5.$$

Описанный алгоритм дает решение при $c = 5$

$$L^{(3)} = 5, \quad b^{(3)} = 3.$$

Тогда как оптимальное дерево имеет длину $L^{\circ} = 4$ с суммой весов $b^{\circ} = 5$.

В заключение выражаю искреннюю признательность В.А. Перепелице и Н.И.Глебову за постановку задачи и ценные замечания.

Поступила в ред.-изд.отдел.
II июня 1974 г.

Л и т е р а т у р а

I.Васакер Р.,Саати Т. Конечные графы и сети. "Наука" 1974.

2.Кронрод М.А. Оптимальный алгоритм упорядочения без рабочего поля. ДАН, 186, № 6, 1969, 1256-1258.

3.Цой С.,Цхай С.М. Прикладная теория графов. "Наука" Каз.ССР, 1971.