Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1976 г. выпуск I5.

УДК.519.95

МЕТОД И ПРОГРАММА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Л.Л.Кузина

Некоторые задачи оптимального распределения ресурсов сводятся к задаче оптимального управления дискретной системой вида

$$x_i(t+1)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k(t), \qquad /1/$$

$$i=1,\dots,n;\ t=0,\dots,T-1,$$

с ограничениями на управляющие переменные:

$$\sum_{k=1}^{m} u_k(t)=1, \quad u_k(t)\geqslant 0. \qquad /2/$$

Соотношение /I/ описывает динамику развития системы для любых допустимых управлений $u(t)=(u_1(t),\dots,u_m(t))$. При этом допустимыми считаются управления, удовлетворяющие соотношению /2/. Для заданного начального состояния $x_i(0)=x_i^0$ системы /I/ требуется распределить ресурс $u(t)$ между n предприятиями по m позициям так, чтобы в заданный конечный момент времени получить минимум затрат $J(u)$, где

$$J(u)=\mathcal{F}(x(T)). \qquad /3/$$

Функция $\mathcal{F}(x)$ предполагается гладкой и выпуклой.

В статье приводится метод решения задачи /I/-/3/, основанный на результатах работы [I]. Целевая функция /3/ рассматривается как функционал следующего вида:

$$\mathcal{F}(x(T)) = \sum_{t=0}^{T-1}\left[\mathcal{F}(x(t+1)) - \mathcal{F}(x(t)) + \mathcal{F}(x(0)\right) =$$

$$= \sum_{t=0}^{T-1}\left[\mathcal{F}(y(x(t),u(t)))-\mathcal{F}(x(t))\right]+\mathcal{F}(x(0)), \qquad /3/$$

где

$$y_i(x,u) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k(t).$$

Для системы /I/ и функционала /3/ выписывается функция Гамильтона

$$\mathcal{H}(x(t),p(t),u(t))= -\mathcal{F}(y(x(t),u(t))+\mathcal{F}(x(t)) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} p_i(t+1)\left[\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t)+\sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k(t)\right] \qquad /4/$$

и сопряженная система

$$p_i(t)=\sum_{j=1}^{n} a_{ji}p_j(t+1) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial \mathcal{F}(y(x(t),u(t)))}{\partial x_j(t)} + \frac{\partial \mathcal{G}(x(t))}{\partial x_i(t)} \qquad /5/$$

$$p_i(T)=0; \quad i=1,\dots,n; \quad t=T-1,\dots,1.$$

В работе [I] доказывается, что на оптимальном управлении функция $u^*(t)$ достигает максимального значения. При этом оптимальное управление определяется однозначно. Для отыскания оптимального управления предлагается следующий алгоритм:

I°. Выбирается произвольный вектор $u^0(t)$, удовлетворяющий ограничениям /2/.

2°. По выбранному $u^0(t)$ находится $x(u^0(t),t)$ - решение системы /1/ и $\mathcal{J}^0(u^0(t))$ - соответствующее значение целевой функции /3/.

3°. Сопряженная система /5/ решается справа налево при граничных условиях $p_i(T)=0$.

4°. При найденных значениях $x(u^0(t),t)$ и $p(u^0(t),t)$ отыскивается вектор управления $v(t)$, доставляющий максимум функции Гамильтона /4/. Максимум функции /4/ ищется методом типа покоординатного спуска.

5°. Строится линейная комбинация $u^1(t)=s u^0(t)+(1-s)\,v(t)$ управлений $u^0(t)$ и $v(t)$, где величина $0<s\leqslant 1$ такова, что управление $u^1(t)$ доставляет минимум $\mathcal{J}^1(u^1(t))$ целевой функции /3/.

6°. Сравниваются между собой $\mathcal{J}^0$ и $\mathcal{J}^1$. Если $|\mathcal{J}^0-\mathcal{J}^1|>e1$, где $e1$ - заданная малая величина, то вектор $u^1(t)$ выбирается в качестве $u^0(t)$ и вычисления повторяются с п. 2°. В противном случае задача считается решенной.

По описанному алгоритму составлена программа на языке АЛГОЛ-60.

Перечень исходной информации, необходимой для работы программы:

n - число уравнений в исходной системе /I/;

m - число управляющих переменных;

t - заданный момент времени, к которому необходимо иметь минимум (максимум) целевой функции /3/;

a - $n\times n$ - матрица коэффициентов a_{ij} системы /I/, записанная по строкам;

b - $n\times m$ - матрица коэффициентов b_{ik} системы /I/, записанная по строкам;

$x0$ - вектор начального состояния $\{x_i(0)\}$ системы /I/;

e - точность вычисления масимума функции /4/;

$e0$ - точность вычисления аргумента в процедуре МАКС;

$e1$ - точность вычисления целевой функции /3/.

Если требуется найти максимум целевой функции /3/, то необходимо положить $\ni$ = I, в противном случае $\ni$ = –I.

Описание выводимых на печать результатов

До начала процесса решения задачи на печать выводится для контроля вся вводимая информация. После работы программы производится вывод результатов в следующей последовательности:

it – число итераций;

Координаты – траектория $x_i(t)$ системы /I/, соответствующая оптимальному управлению;

Оптимальное управление – вектор $w(t)$ (см. 5° и программу), определяемый как линейная выпуклая комбинация управлений $u(t)$ и $v(t)$;

s – параметр, при котором получено оптимальное управление как выпуклая линейная комбинация управлений $u(t)$ и $v(t)$;

$\varphi 1$ – оптимальное значение целевой функции /3/.

Контрольный пример

Ниже приводятся результаты просчета для случая, когда система /I/ имеет вид:

$$\begin{cases} x_1(t+1) = x_1(t) + u_1(t), \\ x_2(t+1) = 2x_2(t) + u_2(t), \\ x_3(t+1) = 3x_3(t) + u_3(t), \end{cases}$$

$$x_i(0) = 0 \quad (i=1,2,3), \quad n=3, \quad m=3, \quad 0 < t \leq T-1.$$

Из допустимой области /2/ требуется найти такие управляющие переменные $u_1(t), u_2(t), u_3(t)$, которые к моменту времени T = 3 доставляют минимальное значение функционалу

$$J = (x_1(T) - 10.5)^2 + (x_2(T) - 9.5)^2 + (x_3(T) - 6.5)^2.$$

Точные значения вектора управления, доставляющее минимальное значение заданному функционалу J, и траектории $x_i(t)$, соответствующей этому управлению, сведены в следующую таблицу.

u, x \ t	0	I	2	3
$u_1(t)$	0	0	I	-
$u_2(t)$	I05/I94	I	0	-
$u_3(t)$	89/I94	0	0	-
$x_1(t)$	0	0	0	I
$x_2(t)$	0	I05/I94	2 I6/I94	4 32/I94
$x_3(t)$	0	89/I94	I 73/I94	4 25/I94

Исходная информация представляется следующим образом:

$$n = 3, \quad m = 3, \quad T = 3,$$

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x0 = (0,\ 0,\ 0),$$

$$e = 10^{-6}, \quad e0 = e1 = 10^{-8}, \quad э = -1.$$

Оптимальные значения вектора $u(t)$ и траектории $x(t)$, полученные в результате работы программы, представляем в следующей таблице:

u, x \ t	0	I	2	3
$u_1(t)$	0	0	I	-
$u_2(t)$	0.5412	I	I	-
$u_3(t)$	0.4588	0	0	-
$x_1(t)$	0	0	0	I
$x_2(t)$	0	0.5412	2.0825	4.1649
$x_3(t)$	0	0.4588	1.3763	4.1289

Число итераций (it), за которое получено минимальное значение функционала, равно 77. Значение параметра $\mathfrak{J}$ равно 0.9888. При данном оптимальном векторе $u(t)$ минимальное значение функционала (ФI)равно 124,335. Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-6.

Решение этого примера тем же методом без использования модификации, рассматриваемой в [I], после 2546 итераций представлено следующей таблицей

$u_i(x)$ \ t	0	I	2	3
$u_1(t)$	0,0001	0.0001	0.9997	-
$u_2(t)$	0.5412	0.9995	0.0001	-
$u_3(t)$	0.4587	0.0003	0.0001	-
$x_1(t)$	0	0.0001	0.0003	I
$x_2(t)$	0	0.5412	2.0819	4.1639
$x_3(t)$	0	0.4587	1.3764	4.1293

Значение целевой функции при полученном векторе $u(t)$ равно I24, 3445 и отличается от оптимального на 0.0094.

По полученным результатам можно судить об эффективности метода при использовании модификации, предложенной в [I] .

Числовые значения в двух последних таблицах приведены с точностью до четвертого знака.

Ниже приведена программа, реализующая описанный выше алгоритм.

```
_BEGIN _INTEGER N,M,T; INPUT(N,M,T);
OUTPUT('T','N=','E',N,'T','M=','E',M,'T','T=','E',T,'3/');
_BEGIN _INTEGER I,J,K,L,TA,IT;
_REAL AL,E,E0,E1,Ф,Ф1,Ф2,Ф3,C,D,S,Э;
_ARRAY A[1:N,1:N],B[1:N,1:M],У,X0,G[1:N],P[1:N,1:T],U,V,
W[1:M,0:T-1],X[1:N,0:T];
INPUT(A,B,X0,E,E0,E1,Э);
OUTPUT('T','МАССИВ A','/','E',A'2/','T','МАССИВ B','/',
'E',B,'2/','T','МАССИВ X0','/','E',X0,'2/','T','E=','E',E,
'T','E0=','E',E0,'T','E1=','E',E1,'T','Э=','E',Э,'6/');
_BEGIN _PROCEDURE KP(U);_VALUE U;_ARRAY U;
  _BEGIN _INTEGER I,J,TA;_REAL C,D;
  _FOR TA:=0_STEP 1_UNTIL T-1_DO _FOR I:=1_STEP 1_UNTIL N_DO
   _BEGIN C:=D:=0;_FOR J:=1_STEP 1_UNTIL N_DO
   C:=C+A[I,J]×X[J,TA];_FOR J:=1_STEP 1_UNTIL M_DO
   D:=D+B[I,J]×U[J,TA]; X[I,TA+1]:=C+D
   _END
  _END ;
 _REAL _PROCEDURE F(X);
  _BEGIN _REAL S;
  S:=********** 1)
  F:=Э×S
 _END ;
```

1) Здесь должна быть записана в символах АЛГОЛА формула вычисления целевой функции /3/.

```
_PROCEDURE DF(X,G);_VALUE X;_ARRAY X,G;
 _BEGIN
  G[1]:=**********
  . . . . . . . . .
  G[M]:=********** 2)
 _END ;
_REAL _PROCEDURE LAM(S);_VALUE C;_REAL S;
 _BEGIN _INTEGER I,J;_FOR I:=1 _STEP 1 _UNTIL M_DO
  _FOR J:=0_STEP 1_UNTIL T-1 _DO
   _BEGIN W[I,J]:=S×U[I,J]+(1-S)×V[I,J];
    _IF W[I,J]<₁₀-8_THEN W[I,J]:=0
   _END ;
  KP(W);_FOR I:=1_STEP 1_UNTIL N_DO X0[I]:=X[I,T];
  LAM:=F(X0)
 _END ;
_REAL RPOCEDURE DH(S);_VALUE S;_REAL S;
 _BEGIN _INTEGER I,J;_REAL Э,Ю,Я;Я:=0;V[K,TA]:=_IF S<E0_THEN 0
  _ELSE S;V[L,TA]:=_IF (D-S)<E0_THEN 0_ELSE D-S;
  _FOR I:=1_STEP 1_UNTIL N_DO
   _BEGIN Э:=Ю:=0;_FOR J:=1_STEP 1_UNTIL N_DO Э:=Э+A[I,J]×
    X[J,TA];_FOR J:=1_STEP 1_UNTIL M_DO Ю:=Ю+B[I,J]×V[J,TA];
    Я:=Я+P[I,TA+1]×Ю;У[I]:=Э+Ю
   _END ;
  DH:=F(У)+Я
 _END ;
_PROCEDURE МАКС(Q,R,CH);_VALUE Q;_REAL Q,CH;
 _REAL  _PROCEDURE R;
  _BEGIN _REAL S0,S1,S2,S3;
```

---

2) Здесь должны быть записаны в символах АЛГОЛА формулы вычисления частных производных целевой функции /3/.

```
S:=0;S1:=(1-AL)×Q;S2:=AL×Q;S3:=Q;
M1: _IF R(S2)>R(S1)_THEN
 _BEGIN S:=S2;S0:=S1;S1:=S2;S2:=AL×S3+(1-AL)×S0
 _END _ELSE
  _BEGIN S:=S1;S3:=S2;S2:=S1;S1:=AL×S0+(1-AL)×S3
  _END ;
_IF S2-S1>E0_THEN _GOTO M1;_IF R(S0)>R(S)_THEN S:=S0;
_IF R(S3)>R(S)_THEN S:=S3;CH:=R(S)
_END ;
 _BEGIN AL:=(SQRT(5)-1)/2;IT:=0;_FOR I:=1_STEP 1_UNTIL N_DO
 X[I,0]:=X0[I];_FOR I:=1_STEP 1_UNTIL M_DO
 _FOR J:=0_STEP 1_UNTIL T-1_DO U[I,J]:=1/M;KP(U);
 _FOR J:=1_STEP 1_UNTIL N_DO X0[J]:=X[J,T];Φ:=Э×F(X0);
 M5: IT:=IT+1;DF(X0,G);_FOR I:=1_STEP 1_UNTIL N_DO P[I,T]:=0;
 TA:=T-1; M2: _FOR J:=1_STEP 1_UNTIL N_DO X0[J]:=X[J,TA];
 DF(X0,У);_FOR I:=1_STEP 1_UNTIL N_DO X0[I]:=X[I,TA+1];
 DF(X0,G);_FOR I:=1_STEP 1_UNTIL N_DO
  _BEGIN C:=D:=0;_FOR J:=1_STEP 1_UNTIL N_DO
   _BEGIN C:=A[J,I]×P[J,TA+1];D:=D+A[I,J]×G[J]
   _END ;P[I,TA]:=C+D+У[I]
  _END ;
 TA:=TA-1;_IF TA>1_THEN _GOTO M2;TA:=S:=D:=0;K:=L:=1;
 _FOR I:=1_STEP 1_UNTIL M_DO _FOR J:=0_STEP 1_UNTIL T-1_DO
 V[I,J]:=0;Φ3:=DH(S); M3: _FOR I:=1_STEP 1_UNTIL M_DO
  _BEGIN K:=I;L:=_IF I=M_THEN 1_ELSE I+1;C:=0;
  _FOR J:=1_STEP 1_UNTIL M_DO
   _BEGIN _IF J≠K∧J≠L_THEN C:=C+V[J,TA]
   _END ;_IF C<E0_THEN
    _BEGIN C:=0;D:=1
    _END _ELSE D:=1-C;_IF D<E0_THEN
     _BEGIN V[K,TA]:=0;V[L,TA]:=0;_GOTO M4
     _END ;MAKC(D,DH,Φ2); M4:
  _END ;_IF  ABS(Φ2-Φ3)>E_THEN
```

```
_BEGIN Ф3:=Ф2;_GOTO M3
_END ;
TA:=TA+1;_IF TA<T-1_THEN
_BEGIN Ф3:=Ф2;_GOTO M3
_END ;
D:=1;МАКС(D,LAM,Ф1);Ф1:=Ф1×Э;_IF ABS(Ф-Ф1)<E1_THEN _GOTO M7;
Ф:=Ф1;_FOR I:=1_STEP 1_UNTIL M_DO _FOR J:=0_STEP 1_UNTIL T-1
_DO U[I,J]:=W[I,J];_GOTO M5;
M7: OUTPUT('T','IT=','E',IT,'/','T','КООРДИНАТЫ','/','E',X,
'2/','T','ОПТИМАЛЬНОЕ  УПРАВЛЕНИЕ','/','E',W,'2/','T','S=',
'E',S,'T','Ф=','E',Ф1,'/')
_END
_END
_END
_END
```

Поступила в ред.-изд.отдел
20 апреля 1976 г.

Литература

1. Яковлев В.М. Один подход к решению задачи оптимизации конечного состояния линейных дискретных управляемых систем.- Настоящий сборник, стр.

2. Пропой А.И. Элементы теории оптимальных дискретных процессов. "Наука", М., 1973.