Управляемые системы, ИМ СО АН СССР, 1975 г. выпуск 15.
УДК.519.83.

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ

С.Е.Гвоздев

Задачу о ранце как задачу целочисленного линейного программирования можно решать методом Гомори [1] и методом ветвей и границ [2, 3]. Применение метода ветвей и границ к задаче о ранце с дополнительными ограничениями рассматривалось в работах [4, 5, 6]. Однако оценка трудоемкости известных к настоящему времени методов точного решения задачи о ранце в общем случае является неудовлетворительной. Есть основания предполагать, что принципиально не может быть создан алгоритм, гарантирующий решение задачи о ранце с объемом вычислительных операций, являющимся степенной функцией от длины записи исходной информации [7].

Иногда для задачи, в которой коэффициенты матрицы ограничений заданы целыми числами, может быть применен метод динамического программирования (д.п.). В рекуррентных соотношениях (р.с.), используемых в методе д.п., применяют принцип оптимальности, позволяющий существенно сократить объем вычислений.

В данной работе показано, как можно применить метод д.п. для задачи о ранце с дополнительными "блочными" ограничениями на переменные. Здесь развиваются идеи подхода, изложенного в [8, 9].

Под обобщенной задачей о ранце понимается задача отыскания максимума функции:

$$F_n(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow max \qquad /1/$$

при соблюдении ограничений:

$$\sum_{j=1}^{n} b_j x_j \leq B; \qquad /2/$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad j=\overline{1,n}; \qquad /3/$$

$$l_{0k} \leq \sum_{j\in J_k} x_j \leq l_{1k}, \quad k=\overline{1,N}; \qquad /4/$$

$$\bigcup_{k=1}^{N} J_k = \{1,2,\ldots,n\}; \quad J_{k_1} \cap J_{k_2} = \emptyset, \quad k_1 \neq k_2. \qquad /5/$$

Здесь все c_j, b_j - неотрицательные числа, b_j - целые, а ограничения /4/,/5/ показывают, что переменные x_j разбиты на N блоков и что из k-го блока в оптимальный план должны попасть не более l_{1k} переменных и не менее l_{0k}, $k=\overline{1,N}$.

Без ограничения общности можно считать, что B, l_{0k}, l_{1k} $(k=\overline{1,N})$ - целые.

Обозначим $m_k = |J_k|$, $k=\overline{1,N}$. Для определенности далее будем предполагать, что $J_K=\{\rho_{K-1}+1,\dots,\rho_K\}$, где $\rho_K=\sum\limits_{t=1}^{K} m_t, (K=\overline{1,N}), \rho_0=0$.

Алгоритм решения задачи /I/- /5/ состоит из двух этапов. На первом этапе находится оптимальное значение F_n^* целевой функции /I/ задачи /I/-/5/. На втором этапе устанавливается допустимый набор переменных x_j^*, $j=\overline{1,n}$, при котором

$$F_n^*=F_n(x^*)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*.$$

Для построения алгоритма $\mathcal{A}$ решения задачи /I/-/5/ нам понадобится рассмотреть следующую вспомогательную задачу.

Найти набор $\sigma=(s^m_{l_0 l_1}(0), s^m_{l_0 l_1}(1),\dots, s^m_{l_0 l_1}(B))$ значений оптимумов задач /6/-/9/ для $\beta=0,1,\dots,B$:

$$s^m_{l_0 l_1}(\beta)=\max\sum_{t=1}^{m} c_t x_t, \qquad /6/$$

$$\sum_{t=1}^{m} b_t x_t\le\beta, \qquad /7/$$

$$l_0\le\sum_{t=1}^{m} x_t\le l_1, \qquad /8/$$

$$x_t\in\{0,1\},\quad t=\overline{1,m}. \qquad /9/$$

Ниже будет описан алгоритм $\mathcal{A}'$ отыскания значений оптимумов $s^\gamma_{\alpha_0\alpha_1}(\beta)$ целевых функций соответственно измененных задач /6/-/9/, при значениях $\gamma=\overline{1,m}$; $\alpha_0=\overline{0,l_0}$; $\alpha_1=\overline{1,l_1}$; $\beta=\overline{0,B}$, а также приведено конструктивное доказательство того, что оценка трудоемкости вычисления набора σ имеет вид:

$$\mathcal{K}\sim[l_1(m-l_0+1)-(l_1-l_0)^2]\times B \quad \text{(операций)} \qquad /10/$$

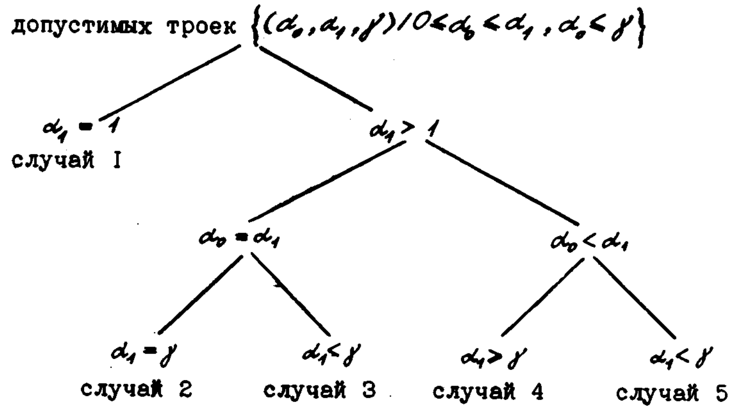
при требуемой памяти

$$\Pi\sim B\times\Delta^m_{l_0 l_1} \quad \text{(ячеек)}, \qquad /11/$$

где $\Delta^m_{l_0 l_1}=\min\{l_1,\ m-l_0+1,\ m-(l_1-l_0)+1\}$.

Рассмотрим множество всевозможных троек α_0,α_1,γ по следующей схеме:

Множество допустимых троек $\{(\alpha_0,\alpha_1,\gamma)/0\le\alpha_0\le\alpha_1,\ \alpha_0\le\gamma\}$



Определим величины $s^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta)$ для всевозможных значений $\alpha_0, \alpha_1, \gamma$.

1. $\alpha_1 = 1$.

Обозначим $$\tau^{\gamma}_{i1}(\beta) = \begin{cases} -C_\infty, & \beta < b_\gamma, \\ c_\gamma, & \beta \geq b_\gamma, \end{cases} \quad i = 0,1, \qquad /12/$$

где C_∞ - достаточно большое число.

Непосредственно из /6/-/9/ следует, что

$$s^{\gamma}_{i1}(\beta) = \max\left\{ s^{\gamma-1}_{i1}(\beta),\ \tau^{\gamma}_{i1}(\beta)\right\},\ i = 0,1, \qquad /13/$$

где $s^{0}_{i1}(\beta) = -C_\infty$.

2. $1 < \alpha = \alpha_0 = \alpha_1 = \gamma$.

Если число переменных равно α и в оптимальное решение необходимо включить не менее чем α переменных, то единственное решение задачи - это включение всех α переменных в оптимальный план. Тогда

$$s^{\alpha}_{\alpha\alpha}(\beta) = \begin{cases} -C_\infty, & \beta < b_\alpha, \\ s^{\alpha-1}_{\alpha-1\,\alpha-1}(\beta - b_\alpha) + c_\alpha, & \beta \geq b_\alpha. \end{cases} \qquad /14/$$

3. $1 < \alpha_0 = \alpha_1 < \gamma$.

При рассмотрении переменной с номером γ есть только две возможности:

либо не включать переменную с номером γ в оптимальный план задачи /6/-/9/, т.е. $x_\gamma = 0$, тогда

$$s^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_0}(\beta) = s^{\gamma-1}_{\alpha_0\alpha_0}(\beta);$$

либо включить ее в оптимальный план, т.е. $x_\gamma = 1$, при этом необходимо выполнение $\beta > b_\gamma$, и тогда

$$s^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_0}(\beta) = s^{\gamma-1}_{\alpha_0-1\,\alpha_0-1}(\beta - b_\gamma) + c_\gamma.$$

Введя обозначение

$$\tau^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_0}(\beta) = \begin{cases} -C_\infty, & \beta < b_\gamma, \\ s^{\gamma}_{\alpha_0-1\,\alpha_0-1}(\beta - b_\gamma) + c_\gamma, & \beta > b_\gamma, \end{cases} \qquad /15/$$

получим р.с.

$$s^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_0}(\beta) = \max\left\{ s^{\gamma-1}_{\alpha_0\alpha_0}(\beta),\ \tau^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_0}(\beta)\right\}. \qquad /16/$$

4. $\alpha_0 < \alpha_1,\ \gamma \leq \alpha_1$.

Если число γ имеющихся переменных не превосходит α_1, то при вычислении $s^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta)$ ограничение α_1 на число входящих в оптимальный план переменных можно заменить на γ:

$$s^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta) = s^{\gamma}_{\alpha_0\gamma}(\beta). \qquad /17/$$

5. $0 \leq \alpha_0 < \alpha_1 < \gamma,\ 1 < \alpha_1$.

Переменную с номером γ можно либо не включать в оптимальный план ($x_\gamma = 0$), тогда $s^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta) = s^{\gamma-1}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta)$, либо включать ($x_\gamma = 1$), при этом необходимо выполнение неравенства $\beta \geq b_\gamma$.

Разберем подробней случай, когда переменная с номером γ войдет в оптимальный план. Из определения $S^{\gamma}_{\alpha\alpha_1}(\beta)$ следует, что в оптимальное решение может войти любое число переменных, заключенное между α_0 и α_1, тогда $S^{\gamma}_{\alpha\alpha}(\beta)$ отвечает задаче, в оптимальный план которой входит ровно α переменных. Из сказанного ясно, что для нахождения $S^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta)$ достаточно определить $\max\limits_{\alpha=\alpha_0,\dots,\alpha_1} S^{\gamma}_{\alpha\alpha}(\beta)$.

На основании этого запишем следующую цепочку равенств:

При $\alpha_0 \geqslant 1$

$$S^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta)=S^{\gamma-1}_{\alpha_0-1\alpha_1-1}(\beta-b_\gamma)+c_\gamma=\max\left[S^{\gamma-1}_{\alpha_1-1\alpha_1-1}(\beta-b_\gamma),\dots,S^{\gamma-1}_{\alpha_0-1\alpha_0-1}(\beta-b_\gamma)\right]+$$
$$+c_\gamma=\max\left\{\max\left[S^{\gamma-1}_{\alpha_1-1\alpha_1-1}(\beta-b_\gamma),\dots,S^{\gamma-1}_{\alpha_0\alpha_0}(\beta-b_\gamma)\right]+c_\gamma,\ S^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_0}(\beta)\right\}=$$
$$=\max\left\{S^{\gamma-1}_{\alpha_0\alpha_1-1}(\beta-b_\gamma)+c_\gamma,\ S^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_0}(\beta)\right\}. \qquad /18/$$

Продолжая преобразование, получим еще один вид этого р.с.

$$S^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta)=\max\left\{\max\left[S^{\gamma-1}_{\alpha_1-1\alpha_1-1}(\beta-b_\gamma),\dots,S^{\gamma-1}_{\alpha_0\alpha_0}(\beta-b_\gamma)\right]+c_\gamma,\right.$$
$$\left.\max\left[S^{\gamma-1}_{\alpha_1-2\alpha_1-2}(\beta-b_\gamma),\dots,S^{\gamma-1}_{\alpha_0-1\alpha_0-1}(\beta-b_\gamma)\right]+c_\gamma\right\}=\max\left\{S^{\gamma-1}_{\alpha_0\alpha_1-1}(\beta-b_\gamma)+c_\gamma,\ S^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1-1}(\beta)\right\}.$$

Для случая $\alpha_0 = 0$ имеет место соотношение:

$$S^{\gamma}_{0\alpha_1}(\beta)=\max\left\{S^{\gamma}_{\alpha_1\alpha_1}(\beta),\dots,S^{\gamma}_{11}(\beta),S^{\gamma}_{00}(\beta)\right\}=\max\left\{\max\left[S^{\gamma}_{\alpha_1\alpha_1}(\beta),\dots,S^{\gamma}_{11}(\beta)\right],S^{\gamma}_{00}(\beta)\right\}.$$

Здесь $S^{\gamma}_{00}(\beta)$ - величина оптимума вырожденной задачи:

если имеется γ переменных и ни одну из них нельзя включить в оптимальный план, то естественно допустить, что

$$S^{\gamma}_{00}(\beta)=\max\left\{S^{\gamma-1}_{00}(\beta),\ \tau^{\gamma}_{00}(\beta)\right\},$$

где $\tau^{\gamma}_{00}(\beta)=\begin{cases}-c_\infty, & \beta< b_\gamma,\\ 0, & \beta\geqslant b_\gamma.\end{cases}$

На основании /12/,/13/ справедливо неравенство $S^{\gamma}_{01}(\beta)\geqslant S^{\gamma}_{00}(\beta)$, при $\beta=0,1,\dots,B$.

Отсюда следует, что при включении в оптимальный план переменной γ выполняется

$$S^{\gamma}_{0\alpha_1}(\beta)=\max\left\{S^{\gamma-1}_{0\alpha_1-1}(\beta-b_\gamma)+c_\gamma,\ S^{\gamma}_{00}(\beta)\right\}=\max\left\{S^{\gamma-1}_{0\alpha_1 1}(\beta-b_\gamma)+c_\gamma,\ S^{\gamma}_{01}(\beta)\right\}$$

Чтобы получить общий вид р.с. для нахождения $S^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta)$, введем обозначение:

$$\tau^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta)=\begin{cases}-c_\infty, & \beta< b_\gamma,\\ S^{\gamma-1}_{\alpha_0\alpha_1-1}(\beta-b_\gamma)+c_\gamma, & \beta\leqslant b_\gamma.\end{cases}$$

При $\alpha_0\geqslant 1$

$$S^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta)=\max\left\{S^{\gamma-1}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta),\ \tau^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta),\ S^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_0}(\beta)\right\} \qquad /19/$$

или

$$S^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta)=\max\left\{S^{\gamma-1}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta),\ \tau^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta),\ S^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1-1}(\beta)\right\}. \qquad /19'/$$

Если $\alpha_0 = 0$, то

$$s^{\gamma}_{0\alpha_1}(\beta) = \max\left\{ s^{\gamma-1}_{0\alpha_1}(\beta),\ \tau^{\gamma}_{0\alpha_1}(\beta),\ \tau^{\gamma}_{01}(\beta) \right\}, \qquad /19^{\circ}/$$

поскольку $s^{\gamma-1}_{0\alpha_1}(\beta) \geq s^{\gamma-1}_{01}(\beta)$.

Объединяя р.с. /19/ и /19°/, получим при $\alpha_0 \geq 0$

$$s^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta) = \max\left\{ s^{\gamma-1}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta),\ \tau^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta),\ \operatorname{sign}\alpha_0\, s^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_0}(\beta) + (1-\operatorname{sign}\alpha_0)\tau^{\gamma}_{01}(\beta) \right\}. \qquad /20/$$

В результате для всех значений параметров $\alpha_0, \alpha_1, \gamma, \beta$ р.с. /13/-/17/, /19'/, /20/ позволяют определить величину $s^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta)$ через соответствующие величины с меньшими значениями параметров.

Описание алгоритма $\mathcal{A}'$ вычисления компонент вектора $h^{m}_{\ell_1}$

Для удобства описания алгоритма переобозначим:

$$h^{\gamma}_{\alpha\beta} = \begin{cases} s^{\gamma}_{\alpha\alpha}(\beta), & \alpha < \ell_0, \\ s^{\gamma}_{\ell_0\alpha}(\beta), & \alpha > \ell_0, \end{cases}$$

для всех значений $\gamma = \overline{1,m}$, $\beta = \overline{0,B}$. Тогда $h^{m}_{\ell_1\beta} = s^{m}_{\ell_0\ell_1}(\beta)$, $\beta = \overline{0,B}$.

Используя р.с. /13/, /16/, /20/, /19'/, из определения $h^{\gamma}_{\alpha\beta}$ следуют р.с.

$$h^{\gamma}_{\alpha\beta} = \max\left\{ h^{\gamma-1}_{\alpha\beta},\ h^{\gamma-1}_{\alpha-1\,\beta-b_\gamma} + c_\gamma \right\}, \qquad 1 \leq \alpha \leq \ell_0, \qquad /21/$$

$$h^{\gamma}_{\alpha\beta} = \max\left\{ h^{\gamma-1}_{\alpha\beta},\ h^{\gamma-1}_{\alpha-1\,\beta-b_\gamma} + c_\gamma,\ \operatorname{sign}\ell_0\, h^{\gamma}_{\ell_0\beta} + (1-\operatorname{sing}\ell_0)\tau^{\gamma}_{01}(\beta) \right\}, \alpha > \ell_0, \qquad /22/$$

$$h^{\gamma}_{\alpha\beta} = \max\left\{ h^{\gamma-1}_{\alpha\beta},\ h^{\gamma-1}_{\alpha-1\,\beta-b_\gamma} + c_\gamma,\ h^{\gamma}_{\alpha-1\,\beta} \right\}, \qquad \alpha > \ell_0 \neq 0. \qquad /23/$$

Через h^{γ}_{α} обозначим вектор $(h^{\gamma}_{\alpha 0}, h^{\gamma}_{\alpha 1}, \ldots, h^{\gamma}_{\alpha B}) \in R^{B+1}$. Очевидно, что набор σ полностью определяется компонентами вектора $h^{m}_{\ell_1}$. Покажем, что для вычисления компонент этого вектора достаточно предварительного вычисления компонент векторов из множества:

$$H = \left\{ h^{\gamma}_{\alpha} \in R^{B+1} / (\gamma,\alpha) \in \mathfrak{M}_0 \setminus (\mathfrak{M}_1 \cup \mathfrak{M}_2) \right\},$$

где

$$\mathfrak{M}_0 = \left\{ (\gamma,\alpha) \,/\, \gamma = 1,2,\ldots,m;\ \alpha = 1,2,\ldots,\min[\gamma,\ell_1] \right\},$$

$$\mathfrak{M}_1 = \left\{ (\gamma,\alpha) \,/\, \gamma = m-(\ell_1-\ell_0)+2,\ldots,m;\ \alpha = \ell_0+1,\ldots,\gamma-[m-(\ell_1-\ell_0)+1] \right\},$$

$$\mathfrak{M}_2 = \left\{ (\gamma,\alpha) \,/\, \gamma = m-\ell_0+2,\ldots,m;\ \alpha = 1,2,\ldots,\gamma-(m-\ell_0+1) \right\}.$$

Для этого проанализируем р.с. /21/-/23/. Прежде всего заметим, что для вычисления компонент вектора h^{γ}_{α} достаточно использовать только векторы $h^{\gamma'}_{\alpha'}$ со значениями $\gamma' < \gamma$, $\alpha' \leq \alpha$. Непосредственно из постановки задачи /6/-/9/ и определения h^γ_α следует, что при $\gamma \le \alpha_0 < l_0$ задача решения не имеет, а при $l_0 < \gamma < \alpha$ соотношение /17/ позволяет записать равенство

$$h^\gamma_{\alpha\beta} = h^\gamma_{\gamma\beta}. \qquad /17'/$$

Следовательно, для получения вектора $h^m_{l_1}$ достаточно использовать векторы из множества $H_0 = \{h^\gamma_\alpha/(\gamma,\alpha)\in\mathfrak{M}_0\}$. Кроме того, р.с. /21/ показывает, что при вычислении вектора $h^m_{l_0}$ используются векторы $h^{m-1}_{l_0}$, $h^{m-1}_{l_0-1}$, требующие в свою очередь значения $h^{m-2}_{l_0}, h^{m-2}_{l_0-1}, h^{m-2}_{l_0-2}$ и так далее, т.е. для вычисления набора векторов $\{h^\gamma_{l_0}/\gamma=1,2,\ldots,m\}$ можно обойтись без элементов множества $H_2=\{h^\gamma_\alpha/(\gamma,\alpha)\in\mathfrak{M}_2\}$. Аналогичным образом р.с. /22/ позволяет обойтись без элементов множества $H_1 = \{h^\gamma_\alpha/(\gamma,\alpha)\in\mathfrak{M}_1\}$. Таким образом, для нахождения компонент вектора $h^m_{l_1}$ достаточно предварительно вычислить только элементы множества H /рис. I/.

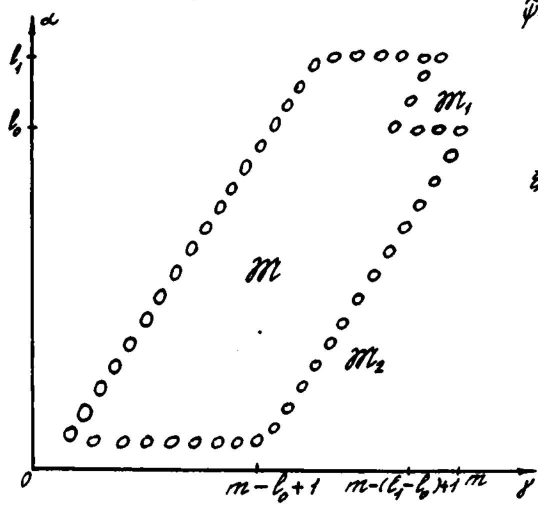


Рис. I. Проекция множества H в координатной системе (γ,α).

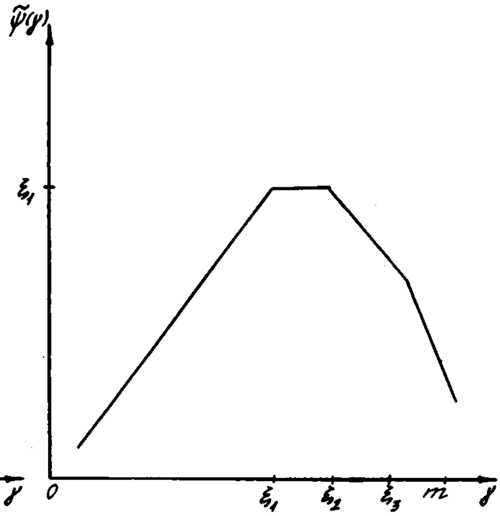


Рис. 2. График функции $\tilde\varphi(\gamma)$; ξ_1, ξ_2, ξ_3 - точки излома.

Чтобы закончить описание алгоритма $\mathcal{A}'$, осталось лишь указать порядок вычисления элементов множества H, для удобства предварительно его перестроив.

Введем

О п р е д е л е н и е. Множество M, элементами которого являются целочисленные точки вещественного пространства R^n, будем называть целочисленно-выпуклым, если вместе с любыми своими элементами a и b множество M содержит все целочисленные точки, лежащие на отрезке, соединяющем a и b.

Множество $\mathfrak{M}$ не является целочисленно-выпуклым (например, оно не содержит целочисленные точки (γ,α) при $m-(l_1-l_0)+1<\gamma$, $l_0<\alpha<l_1$, лежащие на отрезке, соединяющем точки $(\gamma, l_0)\in\mathfrak{M}$ и $(\gamma, l_1)\in\mathfrak{M}$).

Преобразуем множество $\mathfrak{M}$ в выпуклое целочисленное множество $\hat{\mathfrak{M}}$. Заметим, что при $1 \leq \gamma \leq m-(l_1-l_0)+1$ элементы $(\gamma,\alpha) \in \mathfrak{M}$ образуют выпуклое множество. В случае $m-(l_1-l_0)+2 \leq \gamma \leq m$ выпуклость множества $\mathfrak{M}$ нарушается потому, что из множества $\mathfrak{M}$ удалены элементы множества $\mathfrak{M}_1$. Поэтому любой элемент $(\gamma,\alpha) \in \mathfrak{M}$, для которого $\alpha > \alpha'$, где $(\gamma,\alpha') \in \mathfrak{M}_1$, отобразим на место элемента $(\gamma, \alpha-((l_1-l_0)-m+\gamma)+1)$.

Заметим, что произведенное отображение позволяет описать связь между элементами множества $\hat{H}=\{\hat{h}^{\gamma}_{\alpha} / (\gamma,\alpha) \in \hat{\mathfrak{M}}\}$ при помощи р.с. /2I/-/24/:

$$\hat{h}^{\gamma}_{\alpha\beta} = \max\{\hat{h}^{\gamma-1}_{\alpha+1\beta}, \hat{h}^{\gamma-1}_{\alpha\beta-b_\gamma}+c_\gamma, \operatorname{sign} l_0\, \hat{h}^{\gamma}_{\alpha-1\beta}+(1-\operatorname{sign} l_0)\tau^{\gamma}_{0\beta}\}, \qquad /24/$$

т.е. объединить р.с. /22/ и /23/ в одно при $\gamma > m-(l_1-l_0)+2$.

Произведем перестройку множества $\hat{\mathfrak{M}}$. Для этого элемент $(\gamma,\alpha) \in \hat{\mathfrak{M}}$ при $\gamma \geq m-l_0+2$ отобразим на место элемента $(\gamma, \alpha-(l_0-m+\gamma)+1) \in \mathfrak{M}_2$. Получившееся множество обозначим через $\tilde{\mathfrak{M}}$; нетрудно проверить, что оно целочисленно-выпукло.

В определении множества $\mathfrak{M}_i,\ i=0,1,2,$ параметр α зависит от γ. Через $\varphi_i(\gamma),\ i=0,1,2,$ обозначим максимальное значение параметра α при заданном γ. В дальнейшем будет удобно рассматривать функции $\varphi_i(\gamma)$, $i=0,1,2,$ при значениях аргумента $\gamma=1,2,\ldots,m$. Исходя из определения множеств $\mathfrak{M}_i,\ i=0,1,2,$ доопределим функции $\varphi_i(\gamma),\ i=0,1,2$:

$$\tilde{\varphi}_0(\gamma) = \min\{\gamma, l_1\},$$
$$\tilde{\varphi}_1(\gamma) = \max\{0, \gamma-m+(l_1-l_0)-1\},$$
$$\tilde{\varphi}_2(\gamma) = \max\{0, \gamma-(m-l_0)-1\},$$

где γ может принимать значения от I до m.

Поскольку множество $\tilde{\mathfrak{M}}$ сформировано на основе множеств $\mathfrak{M}_i, i=0,1,2$, запишем для него аналогичную функцию $\tilde{\varphi}(\gamma)$:

$$\tilde{\varphi}(\gamma) = \tilde{\varphi}_0(\gamma) - \tilde{\varphi}_1(\gamma) - \tilde{\varphi}_2(\gamma) = \min\{\gamma, l_1\} - [\gamma-m+(l_1-l_0)-1]^+ - [\gamma-(m-l_0)-1]^+,$$

где под $[\alpha]^+$ понимается $\max\{0,\alpha\}$.

Нетрудно видеть, что кусочно-линейная функция $\tilde{\varphi}(\gamma)$ может иметь не более трех точек излома $l_1,\ m-(l_1-l_0)+1,\ m-l_0+1$. Обозначим

$$\xi_1 = \min\{l_1, m-(l_1-l_0)+1, m-l_0+1\}, \quad \xi_3 = \max\{l_1, m-(l_1-l_0)+1, m-l_0+1\},$$
$$\xi_2 = \{l_1, m-(l_1-l_0)+1, m-l_0+1\} \setminus (\xi_1 \cup \xi_3).$$

График функции $\tilde{\varphi}(\gamma)$ изображен на Рис. 2.

Укажем порядок вычисления элементов множества $\tilde{H} = \{\tilde{h}^{\gamma}_{\alpha} \in R^{B+1} / (\gamma,\alpha) \in \tilde{\mathfrak{M}}\}$. Для этого рассмотрим сечение множества $\tilde{H}$ при фиксированном параметре γ. Нетрудно видеть, что в сечении образуются матрицы $\tilde{H}^{\gamma}$, $\gamma=1,2,\ldots,m$, строками которых являются векторы $\tilde{h}^{\gamma}_1, \tilde{h}^{\gamma}_2, \ldots, \tilde{h}^{\gamma}_{\tilde{\varphi}(\gamma)}$.

Заметим, что в силу р.с. /2I/-/24/ и отображения элементов множества $\mathfrak{M}$ параллельно оси α для вычисления элементов матрицы $\tilde{H}^{\gamma}$

требуются только элементы матрицы $\tilde{H}^{\gamma-1}$. С учетом произведенной перестройки множества $\mathfrak{M}$ связь между элементами строк матрицы $\tilde{H}^{\gamma}$ и матрицы $\tilde{H}^{\gamma-1}$ бедет осуществляться по р.с. /21/-/24/, измененным следующим образом.

Для $\gamma=m-\ell_0+2,\ldots,m-(\ell_1-\ell_0)+1$ р.с. /21/ принимает вид:

$$\tilde{h}^{\gamma}_{\alpha\beta}=\max\left\{\tilde{h}^{\gamma-1}_{\alpha+1\beta},\ \tilde{h}^{\gamma-1}_{\alpha\beta-b_\gamma}+c_\gamma\right\},\qquad /25/$$

при $\gamma=m-(\ell_1-\ell_0)+2,\ldots,m-\ell_0+1$ р.с. /22/ нужно заменить на р.с./24/, при $\gamma>\max\{m-(\ell_1-\ell_0)+1, m-\ell_0+1\}$ вместо р.с. /21/ нужно использовать р.с. /25/, а р.с. /24/ нужно заменить на р.с.

$$\tilde{h}^{\gamma}_{\alpha\beta}=\max\left\{\tilde{h}^{\gamma-1}_{\alpha+2\beta},\ \tilde{h}^{\gamma-1}_{\alpha+1\beta-b_\gamma}+c_\gamma,\ \operatorname{sign}\ell_0\,\tilde{h}^{\gamma}_{\alpha-1\beta}+(1-\operatorname{sign}\ell_0)\,\tau^{\gamma}_{0\beta}\right\}.\qquad /26/$$

Таким образом, алгоритм отыскания компонент искомого вектора состоит из последовательного вычисления матриц $\tilde{H}^{\gamma}=\{\tilde{h}^{\gamma}_{\alpha\beta}/ \alpha=1,2,\ldots,\tilde{\varphi}(\gamma);\beta=0,1,\ldots,B\},\gamma=1,2,\ldots,m$. Вычисление элементов матрицы $\tilde{H}^{\gamma}$ ведется справа налево и сверху вниз из матрицы $\tilde{H}^{\gamma-1}$ по р.с. /21/- - /26/, и по формулам /14/, /17'/ в зависимости от значений α,γ. При этом вновь вычисленный элемент $\tilde{h}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ записывается на место элемента $\tilde{h}^{\gamma-1}_{\alpha\beta}$, за исключением случая $\gamma\leqslant\xi_1$, когда из элементов $\tilde{h}^{\gamma}_{\gamma\beta},\ \beta=0,1,\ldots,B$, формируется дополнительная строка.

Доказательство оценок /10/, /11/ трудоемкости алгоритма $\mathcal{A}'$

Вспомним, что алгоритм решения задачи /6/-/9/ состоит из последовательного вычисления матриц $\tilde{H}^{\gamma}=\{\tilde{h}^{\gamma}_{\alpha}/\alpha=1,2,\ldots,\tilde{\varphi}(\gamma)\}$. Для нахождения вектора $\tilde{h}^{\gamma}_{\alpha}$ достаточно порядка B аддитивных операций, поскольку для вычисления компоненты $\tilde{h}^{\gamma}_{\alpha\beta}$ требуется фиксированное число аддитивных операций, определяемое р.с. /21/-/23/. Оценим совокупное количество всех строк матриц $\tilde{H}^{\gamma},\ \gamma=1,2,\ldots,m$:

$$\sum_{\gamma=1}^{m}\tilde{\varphi}(\gamma)=\sum_{\gamma=1}^{m}\min\{\gamma,\ell_1\}-\sum_{\gamma=1}^{m}[\gamma-(m-(\ell_1-\ell_0))-1]^{+}-\sum_{\gamma=1}^{m}[\gamma-(m-\ell_0)-1]^{+}=$$

$$=\sum_{\gamma=1}^{\ell_1}\gamma+\ell_1(m-\ell_1)-\sum_{\gamma=m-(\ell_1-\ell_0)+2}^{m}(\gamma-(m-(\ell_1-\ell_0))-1)-\sum_{\gamma=m-\ell_0+2}^{m}(\gamma-(m-\ell_0)-1)=$$

$$=\frac{\ell_1(\ell_1-1)}{2}-\ell_1(m-\ell_1)-\frac{(\ell_1-\ell_0-1)(\ell_1-\ell_0)}{2}-\frac{\ell_0-1}{2}\ell_0=\ell_1(m-\ell_0-1)-(\ell_1-\ell_0)^2.$$

Получаем оценку /10/ числа операций

$$\mathcal{K}\sim B\times[\ell_1\cdot(m-\ell_0+1)-(\ell_1-\ell_0)^2].$$

Для доказательства оценки /11/ покажем, что $\Delta^{m}_{\ell_0\ell_1}>\max\limits_{\gamma=1,2,\ldots,m}\tilde{\varphi}(\gamma)$. Действительно, $\tilde{\varphi}(\gamma)$ - кусочно-линейная функция, вогнутая по γ, имеющая не более трех точек излома $l_1,\ m-(l_1-l_0)+1,\ m-l_0+1$. Непосредственной проверкой убеждаемся, что максимальное значение функции $\tilde{\varphi}(\gamma)$ достигается в двух соседних точках излома ξ_1 и ξ_2 (рис.2), а следовательно, и на отрезке, соединяющем эти точки, и не превосходит $\Delta^m_{l_0 l_1}$. Таким образом, количество строк матрицы $\tilde{H}^\gamma$ ограничено величиной $\Delta^m_{l_0 l_1}$.

Поскольку при вычислении матрицы $\tilde{H}^\gamma$ достаточно знать матрицу $\tilde{H}^{\gamma-1}$ и в процессе счета элементы матрицы $\tilde{H}^\gamma$ записываются на место элементов матрицы $\tilde{H}^{\gamma-1}$, то на каждом шаге необходима память для хранения не более одной матрицы.

С учетом того, что матрица $\tilde{H}^\gamma$ содержит B столбцов, получаем оценку /II/ величины памяти

$$\mathcal{N} \sim B \times \Delta^m_{l_0 l_1}.$$

Тем самым оценк. /IO/, /II/ доказаны.

З а м е ч а н и е. Для облегчения вычислительной работы можно использовать различные модификации алгоритма $\mathcal{A}'$ в зависимости от значения величины ξ_1.

Укажем некоторые из них.

Перестройку множества $\hat{\mathfrak{M}}$ можно производить, отображая элемент $(\gamma,\alpha) \in \hat{\mathfrak{M}}$ в элемент $(\gamma-\alpha+1,\alpha)$, т.е. параллельно оси γ. Получившееся множество обозначим через $\bar{\mathfrak{M}}$, а соответствующее множество векторов через $\bar{H}$, $\bar{H}=\{\bar{h}^\gamma_\alpha \in R^{B+1} / (\gamma,\alpha) \in \bar{\mathfrak{M}}\}$.

Учитывая осуществленное отображение, р.с. /2I/-/23/ для связи элементов множества $\bar{H}$ запишутся в виде:

$$\bar{h}^\gamma_{\alpha\beta} = max\left\{\bar{h}^{\gamma-1}_{\alpha\beta},\ \bar{h}^\gamma_{\alpha-1\beta-b_\gamma}+c_\gamma\right\},\quad 1 \leqslant \alpha \leqslant l_0; \qquad /27/$$

$$\bar{h}^\gamma_{\alpha\beta} = max\left\{\bar{h}^{\gamma-1}_{\alpha\beta},\ \bar{h}^\gamma_{\alpha-1\beta-b_\gamma}+c_\gamma,\ sign\,l_0 \times \bar{h}^{\gamma+1}_{\alpha-1\beta}\ (1-sign\,l_0)\pi^{\gamma+\alpha+1}\right\}, \alpha > l_0 \qquad /28/$$

$$\bar{h}^\gamma_{\alpha\beta} = max\left\{\bar{h}^{\gamma-2}_{\alpha+1\beta},\ \bar{h}^{\gamma-1}_{\alpha\beta-b_\gamma}+c_\gamma,\ \bar{h}^{\gamma+1}_{\alpha-1\beta}\right\},\ \alpha > l_0+0. \qquad /29/$$

В случае $\xi_1 = m-l_0+1$ множество $\bar{\mathfrak{M}}$ представимо в виде:

$$\bar{\mathfrak{M}} = \left\{(\gamma,\alpha) / \alpha=1,2,\dots,\xi_2;\ \gamma=1,2,\dots,min\left\{m-l_0+1,\ m-l_0+2-2\alpha\right\}\right\},$$

а

$$\bar{H} = \Big(\bigcup_{\alpha=1}^{l_0} G^\alpha_1\Big) \cup \Big(\bigcup_{\alpha=l_0+1}^{l_1} G^\alpha_2\Big),$$

где

$$G^\alpha_1 = \left\{g^\alpha_\gamma = \bar{h}^\gamma_\alpha / \gamma=1,2,\dots,m-l_0+1\right\},\ \alpha=1,2,\dots,l_0;\quad G^\alpha_2 = \left\{g^\alpha_\gamma\right\},\ \alpha=l_0+1,l_0+2,\dots,l_1,$$

и

$$g^\alpha_\gamma = \begin{cases} \bar{h}^\gamma_\alpha, & \gamma=1,2,\dots,m-(l_1-l_0)+2-\alpha; \\ \bar{h}^\gamma_\alpha, & \gamma=m-(l_1-l_0)+2-\alpha-2\alpha',\ \alpha'=\alpha-1,\alpha-2,\dots,l_0+1. \end{cases}$$

Алгоритм $\mathcal{A}$ будет состоять в последовательном вычислении элементов матриц G_1^{α} по р.с. /27/, а затем элементов матриц G_2^{α} по р.с. /28/, /29/. При работе алгоритма по р.с. /27/ всегда получаем матрицы, содержащие $m-l_0+1$ строк. Перейдя к вычмслению элементов матриц G_2^{α} , первые $m-(l_1-l_0)+2-\alpha$ строк предыдущей матрицы пересчитываем по р.с. /28/, а строки с номерами
$[m-(l_1-l_0)+2-\alpha]+2,\ [m-(l_1-l_0)+2-\alpha]+4, \ldots, m-(l_1+l_0)+\alpha$
уже по р.с. /29/. Если окажется, что $m-(l_1-l_0)+2-\alpha<0$, то при вычислении элементов матрицы G_2^{α} необходимо пересчитывать только строки с номерами $\alpha-[m-(l_1-l_0)],\ \alpha-[m-(l_1-l_0)]+2, \ldots, m-(l_1-l_0)+\alpha$ матрицы $G_2^{\alpha-1}$. Вновь вычисленная справа налево матрица всякий раз записывается на место предыдущей.

Нетрудно видеть, что максимальное значение величины $m-(l_1+l_0)+\alpha$ не превосходит $m-l_0+1$ и достигается при $\alpha=l_1$. Таким образом, для работы алгоритма $\mathcal{A}'$ достаточна память для хранения матрицы размерностью $B\times(m-l_0+1)$.

В случае $\xi_1=m-(l_1-l_0)+1,\ l_0=0$, множество $\overline{\mathfrak{M}}$ представимо в виде $\overline{\mathfrak{M}}=\{(\gamma,\alpha)\,/\,\alpha=1,2,\ldots,l_1;\ \gamma=1,2,\ldots,m-l_1+1\}$.

Соответственно алгоритм будет состоять в последовательном вычислении элементов матрицы $G^{\alpha}=\{g_{\gamma}^{\alpha}=\bar{h}_{\alpha}^{\gamma}\,/\,\gamma=1,2,\ldots,m-l_1+1\},\ \alpha=1,2,\ldots,l_1$ по р.с. /28/, причем вычисление элементов матрицы G^{α} ведется справа налево и сверху вниз и вновь полученный элемент g_{γ}^{α} записывается на место элемента $g_{\gamma}^{\alpha-1}$ матрицы $G^{\alpha-1}$.

Если $\xi_1=l_1$ и, кроме того, $l_1=l_0$ либо $l_0=0$, то $\overline{\mathfrak{M}}=\{(\gamma,\alpha)/\alpha=1,2,\ldots,l_1;\gamma=1,2,\ldots,m-l_1+1\}$. Алгоритм будет состоять в последовательном вычислении матриц $\bar{H}^{\gamma}=\{\bar{h}_{\alpha}^{\gamma}/\alpha=1,2,\ldots,l_1\},\ \gamma=1,2,\ldots,m-l_1+1,$ по р.с. /27/, если $l_1=l_0$, и по р.с. /28/, если $l_0=0$. В процессе счета вновь вычисленная матрица записывается на место предыдущей.

Отметим, что при любом значении ξ_1 , если $l_1=l_0$ либо $l_0=0$, в процессе работы модифицированных алгоритмов будут получаться матрицы одинаковой размерности, что удобно при программной реализации.

Нетрудно видеть, что во всех случаях оценки /10/, /11/ справедливы.

Описанию алгоритма решения задачи /1/-/5/ предпосылается следующая

Лемма. Для нахождения оптимального значения целевой функции задачи /1/-/5/ достаточно N раз применить алгоритм $\mathcal{A}'$, при этом незначительно модифицировав его.

Доказательство. Проведем индукцию по числу блоков. Одновременно покажем, что достаточно внести следующие изменения в р.с /12/ - /13/, лежащие в основе алгоритма $\mathcal{A}'$:

$$S_{i_k 1_k}^{\rho_{k-1}+\gamma}(\beta)=\max\left\{S_{i_k 1_k}^{\rho_{k-1}+\gamma-1}(\beta),\ \tau_{i_k 1_k}^{\rho_{k-1}+\gamma}(\beta)\right\},\quad i=0,1, \qquad /13'/$$

где

$$s^{\rho_{K-1}+\gamma}_{\alpha_{0K}\alpha_{1K}}(\beta) = \max_{\sum_{t=1}^{K} \beta'_t \le \beta} \left(\sum_{t=1}^{K-1} s^{m_t}_{\ell_{0t}\ell_{1t}}(\beta'_t) + s^{\gamma}_{\alpha_{0K}\alpha_{1K}}(\beta'_K) \right),$$

$$v^{\rho_{K-1}+\gamma}_{i_K 1_K}(\beta) = \begin{cases} (1-i)s^{\rho_{K-1}}_{\ell_{0K-1}\ell_{1K-1}}(\beta) - iC_\infty, & \beta < b_{\rho_{K-1}+\gamma}, \\ & i = 0,1, \\ s^{\rho_{K-1}}_{\ell_{0K-1}\ell_{1K-1}}(\beta - b_{\rho_{K-1}+\gamma}) + c_{\rho_{K-1}+\gamma}, & \beta \ge b_{\rho_{K-1}+\gamma}, \end{cases} \qquad /12'/$$

а

$$s^{\rho_{K-1}}_{i_K 1_K}(\beta) = (1-i)s^{\rho_{K-1}}_{\ell_{0K-1}\ell_{1K-1}}(\beta) - iC_\infty, \quad i = 0,1.$$

Модифицированный алгоритм обозначим через $\mathcal{A}''$. В результате его применения для первого блока получим набор значений $s^{m_1}_{\ell_{01}\ell_{11}}(0), \ldots, s^{m_1}_{\ell_{01}\ell_{11}}(B)$, причем $s^{m_1}_{\ell_{01}\ell_{11}}(B) = F_{m_1}(x)$. Предположим, что мы уже $K-1$ раз применили алгоритм $\mathcal{A}''$ последовательно для блоков с номерами $1,2,\ldots,K-1$ и получили набор значений $s^{\rho_{K-1}}_{\ell_{0K-1}\ell_{1K-1}}(0), \ldots, s^{\rho_{K-1}}_{\ell_{0K-1}\ell_{1K-1}}(B)$.

Применим этот алгоритм к K-му блоку так, чтобы при вычислении величин $s^{\rho_{K-1}+\gamma}_{\alpha_{0K}\alpha_{1K}}(\beta)$, $\gamma = 1,2,\ldots,m_K$; $\alpha_{0K} = 0,1,\ldots,\ell_{0K}$, $\alpha_{1K} = 1,2,\ldots,\ell_{1K}$, учитывались и все переменные предыдущих блоков. Если величины, стоящие под знаком максимума в р.с. /12/-/20/, содержат в себе информацию о всех переменных из первых $K-1$ блоков, то и $s^{\gamma}_{\alpha_0\alpha_1}(\beta)$ будет учитывать переменные с номерами $1,2,\ldots,\rho_{K-1}$. Таким образом, достаточно переопределить только величины $s^{\rho_{K-1}+\gamma}_{0_K 1_K}(\beta)$ и $s^{\rho_{K-1}+\gamma}_{1_K 1_K}(\beta)$, чтобы $s^{\rho_{K-1}+\gamma}_{\alpha_{0K}\alpha_{1K}}(\beta)$ содержало в себе информацию о предыдущих переменных.

Поскольку множество $\{x_j \mid j = 1,2,\ldots,\rho_{K-1}+\gamma\}$ принадлежит не только K-му блоку но и блокам с номерами $1,2,\ldots,K-1$, и может иметь место условие $s^{\rho_{K-1}+\gamma}_{0_K 0_K}(\beta) \ne 0$, то естественно определить $s^{\rho_{K-1}+\gamma}_{0_K 0_K}(\beta) = s^{\rho_{K-1}}_{\ell_{0K-1}\ell_{1K-1}}(\beta)$ для $\gamma = 1,2,\ldots,m_K$; $\beta = 0,1,\ldots,B$.

Отсюда, в частности, следует справедливость соотношений /12'/-/13'/

Применение алгоритма $\mathcal{A}''$ для K-го блока дает набор $(s^{\rho_K}_{\ell_{0K}\ell_{1K}}(0), \ldots, s^{\rho_K}_{\ell_{0K}\ell_{1K}}(B))$, причем $s^{\rho_K}_{\ell_{0K}\ell_{1K}}(B) = F^*_{\rho_K}(x)$.

В результате дальнейшей работы этого алгоритма последовательно на блоках $K+1, K+2, \ldots, N$ получим величину $F^*_n(x)$ оптимума задачи /1/-/5/. Доказательство леммы закончено.

<u>Алгоритм $\mathcal{A}$ решения задачи /1/ - /5/</u>

На основании леммы алгоритм первого этапа $\mathcal{A}_I$ решения этой задачи состоит из N шагов, $L = 1,2,\ldots,N$. Заключительная стадия расчетов на $(L-1)$-м шаге является начальной для последующего L-го шага, благодаря чему происходит "склейка" блока с номером L со всеми предыдущими блоками.

На L -м шаге работает алгоритм $\mathcal{A}'$ вспомогательной задачи, причем при $L=2,3,\dots,N$ его модификация заключается в замене соотношений /I2$'$/, /I3$'$/ на соотношения

$$\tau_{i\beta}^{\rho_{k-1}+\gamma} = \begin{cases} (1-i)h_{\ell_{k-1}\beta}^{\rho_{k-1}} - iC_\infty, & \beta < b_{\rho_{k-1}+\gamma}, \\ h_{\ell_{k-1}\beta - b_{\rho_{k-1}+\gamma}}^{\rho_{k-1}} + c_{\rho_{k-1}+\gamma}, & \beta \geq b_{\rho_{k-1}+\gamma}, \end{cases} \quad i=0,1,$$

$$h_{1\beta}^{\rho_{k-1}+\gamma} = \max\left\{h_{1\beta}^{\rho_{k-1}+\gamma-1}, \tau_{i\beta}^{\rho_{k-1}+\gamma}\right\},$$

где при $\gamma = 1$ полагаем

$$h_{i\beta}^{\rho_{k-1}+\gamma-1} = (1-i)h_{\ell_{k-1}\beta}^{\rho_{k-1}} - iC_\infty, \quad i=0,1.$$

На последнем шаге $(L=N)$ получаем величину $h_{\ell_N B}^{\rho_N}$, равную значению оптимума F_n^* задачи /I/-/5/.

Переходим к рассмотрению второго этапа решения основной задачи.

Покажем, как найти один из оптимальных наборов x_j^*, $j=\overline{1,n}$, при которых

$$F_n^* = F_n(x^*) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*.$$

Так как в процессе работы первого этапа промежуточные результаты не запоминались, то второй этап будет состоять в последовательном повторении $\mathcal{D}$ раз алгоритма $\mathcal{A}_I$ первого этапа, где $\mathcal{D}$ - число шагов, равное числу переменных, входящих в оптимальный план, и $\mathcal{D} < \sum_{k=1}^{N} \ell_{1k}$. Расчеты по алгоритму $\mathcal{A}_I$ на каждом шаге второго этапа заканчиваются только после выполнения условий /4/, /5/, поскольку оптимальное значение целевой функции может соответствовать и набору переменных, не удовлетворяющих "блочным" ограничениям.

Допустим, что переменные x_j^*, $j \in J_p$, $p=\overline{k+1,N}$, входящие в оптимальный план, уже найдены. Опишем алгоритм нахождения переменных x_j^*, где $j \in J_k$. Пусть μ - число уже восстановленных элементов в k -м блоке. Значение целевой функции на невосстановленных элементах $\{x_j\}$ $j=1,2,\dots,\rho_k-\mu$, в силу принципа оптимальности д.п. равно $F_{\rho_k-\mu}^* = F_n^* - \sum_{j=\rho_k-\mu+1}^{n} c_j x_j^*$, а значение правой части ограничения /2 / равно $B_{\rho_k-\mu} = B - \sum_{j=\rho_k-\mu+1}^{n} b_j x_j^*$. Обозначим $\ell_k^* = \sum_{\eta=0}^{\mu-1} x_{\rho_k-\eta}^*$. Отыскание x_j^* для $j=\rho_{k-1}+1,\dots,\rho_k-\mu$ осуществляется при помощи алгоритма $\mathcal{A}_I$.

В случае $\ell_k^* < \ell_{0k}$ вычисления производятся до того момента, пока не получим λ-ю $(\lambda = \ell_{0k} - \ell_k^*)$ строку матрицы $H^{\rho_{k-1}+\lambda}$, в которой необходимо определить лишь элементы $h_{\lambda\beta}^{\rho_{k-1}+2}$, $\beta=0,1,\dots,B_{\rho_k-\mu}$.

При $l_k^* > l_{0k}$ расчеты по алгоритму A_I продолжаются до тех пор, пока не получим $l_{0k'}$ -ю строку матрицы $H^{\mu'}$, где $\mu'=\rho_{k'}+l_{0k'}$, $\rho_{k'}=\max_{t=1,2,\dots,k-1}\{\rho_t / l_{0t}\neq 0\}$.

Дальнейшая работа алгоритма A_I в обоих случаях сопровождается проверкой выполнения равенства

$$h_{\alpha B_{\rho_k-\mu}}^{\eta} = F_{\rho_k-\mu}^{*}, \qquad /30/$$

где η соответственно может принимать значения от $\rho_{k-1}+2$ до $\rho_k-\mu$ или от μ' до $\rho_k-\mu$.

При выполнении равенства /30/ полагаем $x_\eta=1$, $x_{\eta+1}=0,\dots,x_{\rho_k-\mu}=0$. В случае $\eta>\rho_{k-1}$ производим дальнейшее восстановление элементов в k -м блоке при $\mu=\rho_k-\eta+1$. Если $\eta\leq\rho_{k-1}$, то все элементы в k -м блоке уже восстановлены, и переходим к блоку с номером l, где l определяется условием $\rho_{l-1}<\eta\leq\rho_l$. Соответствующее значение μ полагается равным $\rho_l-\eta+1$.

Оценим трудоемкость работы первого и второго этапов.

Об оценке трудоемкости алгоритма решения задачи /I/ - /5/

Т е о р е м а. При помощи описанного алгоритма A задача /I/-/5/ может быть решена за

$$T_\Sigma \sim n^2 l B \qquad /31/$$

аддитивных операций при наличии памяти

$$\Pi_\Sigma \sim B\,k \max_{k=1,2,\dots,N} \Delta_{0k}^{m_k} l_{1k} \qquad /32/$$

ячеек, где $l=\max_{k=1,2,\dots,N} l_{1k}$; $\Delta_{l_{0k}l_{1k}}^{m_k}=\min\{l_{1k}, m_k-l_{0k}+1, m_k-(l_{1k}-l_{0k})+1\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оценим число операций T_Σ. Первый этап решения задачи /I/-/5/ состоит в последовательном применении схемы алгоритма решения вспомогательной задачи для блоков с номерами $1,2,\dots,N$. При этом для осуществления "склейки" блоков при $k=2,3,\dots,N$ соотношения /I2/,/I3/ заменяются на соотношения /I2$'$/, /I3$'$/. Это изменение не может привести к какому-либо существенному увеличению оценки числа операций алгоритма A' при применении его схемы для блока с номером k, $k=1,2,\dots,N$. Оценку числа операций T_I первого этапа можно получить, складывая трудоемкости применения схемы алгоритма A' на каждом шаге.

$$T_I \sim \sum_{k=1}^{N}\left[l_{1k}(m_k-l_{0k}+1)-(l_{1k}-l_{0k})^2\right]\times B.$$

На каждом шаге второго этапа, состоящего из повторения алгоритма A_I, определяется ровно одна переменная со значением, равным единице. Из /4/ следует, что число переменных, которое может войти в оптимальный план, ограничено величиной $\sum_{K=1}^{N} \ell_{1K}$. Тогда $\mathcal{K}_{II} \leq \sum_{K=1}^{N} \ell_{1K} \times \mathcal{K}_{I}$. В результате получим искомую оценку /31/ числа операций

$$\mathcal{K}_{\Sigma} = \mathcal{K}_{I} + \mathcal{K}_{II} \sim \sum_{K=1}^{N} \ell_{1K} \Big(\sum_{K=1}^{N} \big[\ell_{1K} (m_K - \ell_{0K} + \cdot (\ell_{1K} - \ell_{0K})^2 \big] \Big) \times B \sim nN\ell^2 B \sim n^2 \ell B .$$

Оценим объем памяти $\mathcal{N}_{\Sigma}$. Связь между K-м и $(K-1)$-м шагами алгоритма $\mathcal{A}_I$ осуществляется только при вычислении векторов $h_{1\beta}^{\rho_{K-1}+\gamma}$, $\gamma = 1, 2, \ldots, m_K$; $\beta = 0, 1, \ldots, B$. Далее работает схема алгоритма решения вспомогательной задачи на блоке с номером K независимо от $(K-1)$-го шага. Таким образом, память $\mathcal{N}_I$, необходимая для первого этапа решения задачи /1/-/5/, равна $B \times \max_{K=1,2,\ldots,N} \Delta_{\ell_{0K}\ell_{1K}}^{m_K}$. Поскольку второй этап это лишь повторение алгоритма $\mathcal{A}_I$, то для его реализации достаточна память не большая чем $\mathcal{N}_I$. Оценка /32/ объема памяти $\mathcal{N}_{\Sigma}$, необходимой для решения задачи /1/-/5/, доказана. Этим завершается доказательство теоремы.

З а м е ч а н и я.

1. На практике часто встречается случай, когда число переменных блока, которые могут попасть в оптимальный план, не превосходит единицы, т.е. $\ell_{1K} = 1$, $\ell_{0K} = 0$ или 1, $K = 1, 2, \ldots, N$.

В этом случае оценки /31/, /32/ примут вид:

$$\mathcal{K}_{\Sigma} \sim nNB, \quad \mathcal{N}_{\Sigma} \sim B .$$

Отсюда следует, что наличие "блочных" ограничений позволяет решать задачу /1/-/5/ ($\ell_{1K} = 1$, $\ell_{0K} = 0$ или 1, $K = 1, 2, \ldots, N$) с меньшими затратами машинного времени по сравнению с обычной задачей о ранце [10].

2. Описанная выше схема алгоритма применена и для решения задачи /1'/, /2/-/5/, целевая функция которой име вид

$$\sum_{j=1}^{n} f_j(b_j) x_j \longrightarrow \max , \qquad /1'/$$

где $f_j(b_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n$ - произвольные вещественнозначные функции положительного целочисленного аргумента.

При этом все сказанное относительно множества H и структуры взаимосвязей его элементов сохраняется. Однако, поскольку оптимальное значение целевой функции формируют $f_j(b_j)$, где $b_j = 0, 1, \ldots, B$, необходимо во всех р.с. элемент $h_{\alpha\beta - b_\gamma}^{\gamma-1} + c_\gamma$ стоящий под знаком максимума, заменить на величину $\max_{b_\gamma = 0,1,\ldots,\beta} \{ h_{\alpha\beta - b_\gamma}^{\gamma-1} + f_\gamma(b_\gamma) \}$.

Тогда для вычисления каждого элемента $h_\alpha^\gamma = \{ h_{\alpha 0}^\gamma, h_{\alpha 1}^\gamma, \ldots, h_{\alpha B}^\gamma \}$ множества H потребуется $\sim B^2$ аддитивных операций.

Общая оценка трудоемкости решения задачи /1'/, /2/-/5/ будет иметь вид.

$$\mathcal{X}'_{\Sigma} \sim \mathcal{X}_{\Sigma} \cdot B \sim \sum_{K=1}^{N} \ell_{1K} \Big(\sum_{K=1}^{N} \big[\ell_{1K}(m_K - \ell_{0K} + 1) - (\ell_{1K} - \ell_{0K})^2 \big] \Big) \times B^2 \quad \text{(операций)},$$

при памяти

$$\mathcal{N}'_{\Sigma} = \mathcal{N}_{\Sigma} \sim B \times \max_{K=1,2,\dots,N} \Delta_{\ell_{0K}}^{m_K} \ell_{1K} \quad \text{(ячеек)}.$$

3. Рассмотренный алгоритм также можно использовать для решения задачи о сейфах, которая заключается в следующем. Найти

$$\sum_{t=1}^{m} x_t \longrightarrow \min \qquad /33/$$

при ограничениях:

$$\sum_{t=1}^{m} a_t x_t \geq A, \qquad /34/$$

$$\sum_{t=1}^{m} b_t x_t \geq B, \qquad /35/$$

$$x_t \in \{0,1\}, \; t = \overline{1,m}. \qquad /36/$$

Здесь все b_t неотрицательные целые.

Вместо задачи /33/-/36/ рассмотрим задачу /35/-/38/, где

$$f_\ell = \sum_{t=1}^{m} a_t x_t \longrightarrow \max, \qquad /37/$$

$$\sum_{t=1}^{m} x_t \leq \ell. \qquad /38/$$

При помощи описанного выше подхода можно решить задачу /35/-/38/, однако знак $\geq$ в ограничении /35/ требует замены во всех р.с. элемента $h^{\gamma-1}_{\alpha\beta - b_\gamma} + c_\gamma$ величиной $h^{\gamma-1}_{\alpha 0} + c_\gamma$ лишь в случае $\beta < b_\gamma$.

Необходимые для расчетов величины $h^{\gamma}_{1\beta}$ определяются р.с.

$$h^{\gamma}_{1\beta} = s^{\gamma}_{i1}(\beta) = \max\left\{ s^{\gamma-1}_{i1}(\beta), \bar{\tau}^{\gamma}_{i1}(\beta) \right\},$$

где

$$\bar{\tau}^{\gamma}_{i1}(\beta) = \begin{cases} c_\gamma, & \beta \leq b_\gamma, \\ -C_\infty, & \beta > b_\gamma, \end{cases} \quad i = 0,1.$$

Замена одного элемента другим не приводит к изменению трудоемкости алгоритма.

Далее, применив дихотомию по ℓ, найдем такое ℓ_0, что $f_{\ell_0} \geq A$ и $f_{\ell_0 - 1} < A$, ясно, что ℓ_0 является решением исходной задачи /33/-/36/.

В заключение автор выражает благодарность Э.Х.Гимади за внимание и постоянную помощь при написании данной работы.

Поступила в ред.-изд.отдел.
I апреля 1976 г.

Литература

1. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях М., "Мир", 1974.

2. Lawler E.L., Wood D.E. Branch and Bound Methods: a Survey.- "Operations Research", 1966, vol. 14, n.4, pp. 699-719.

3. Kolesar Peter J. A Branch and Bound Algorithm for the Knapsack Problem.-"Management Science", 1967, vol.13, N.9, pp.723-735.

4. Литвак Б.Г.,Найвельт А.В. Об отыскании верхней границы для задачи о ранце с дополнительными ограничениями. -"Кибернетика",1971, № 1, с. 149-150.

5. Krawczyk R. Die Anwendung der Methode "Branch and Bound" auf ein verallgemeinertes Knapsackproblem.-"Angewandte Information", 1971, Bd.13, N10, S.461-468.

6. Казакова М.Ф. Метод типа "ветвей и границ" для обобщенной задачи о ранце. -"Экономика и математические методы", 1971,т.7,№ 5, с. 737-741.

7. Karp R.M. Reducibility among Combinatorial problems, Complexity of computer computations. Proc. Symp. March 20-22, 1972, 85-103 Русский перевод: Карп Р.М. Сводимость комбинаторных проблем.- Кибернетический сборник, новая серия, вып. 12, М., 1975, с. 16-38 .

8. Гвоздев С.Е. О некоторых моделях и методах решения задачи о ранце с дополнительными ограничениями. - В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1974, вып. 13, с. 10-25.

9. Гвоздев С.Е. Об одном алгоритме с оценками для решения целочисленной задачи специализации и развития подотрасли.-"Электронная техника", серия 9, "Автоматизированные системы управления", М.,1975, вып. 2/14/, с. 31-38.

10. Manne A.S. Programming of Economic Lot Sizes.-"Management Sciece", 1958, vol.14, pp.115-135.