Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1975 г. выпуск 14.

УДК.51.

О РЕШЕНИИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В.Н.Шевченко /г.Горький/

Пусть R -поле рациональных чисел, Z -кольцо целых чисел, R^m- m -мерное эвклидово пространство над R , (a,b) - скалярное произведение векторов a и b из R^m, Z^m -множество векторов из R^m с целочисленными компонентами.

Рассмотрим следующую задачу

$$\max(b,u) \qquad /1/$$

$$(a_j,u)\leq c_j \quad (j=1,\ldots,m) \qquad /2/$$

$$u\in Z^m. \qquad /3/$$

Пусть $A=(a_{ij})$ - матрица, j -ый столбец которой равен a_j $(j=1,\ldots,m)$, $c=(c_1,\ldots,c_m)$, $\Delta=|\det A|$.

Задачу /1/ - /3/ будем называть элементарной задачей целочисленного линейного программирования (ЭЗЦЛП) , если

$$a_j\in Z^m \ (j=1,\ldots,m),\ c\in R^m,\ \Delta\neq 0,\ b\in Z^m,\ \beta=A^{-1}b\geqslant 0.$$

Будем говорить, что ЭЗЦЛП /1/ - /3/ имеет канонический вид, если

$$a_{ii}>0 \ (i=1,\ldots,m),\ a_{ij}\leq 0 \ (i\neq j) \qquad /4/$$

$$A^{-1}\geqslant 0 \qquad /5/$$

$$b\geqslant 0 \qquad /6/$$

Для приведения ЭЗЦЛП к каноническому виду можно пользоваться перестановкой π неравенств /2/, что равносильно умножению матрицы A справа на матрицу Q перестановки π , и заменой переменных $u=P^Tv$, где P - унимодулярная (т.е. целочисленная с $|\det P|=1$) матрица, что равносильно умножению A на P слева. Основным результатом данной работы является доказательство того,что этих средств достаточно (теорема 1) . Аналогичные вопросы рассматривались в работах А.А.Вотякова [1,2] , получившего соответствующие результаты, если отбрасывать условия /5/ или /6/.

<u>Лемма Эрмита</u> [3,4] . Для всякой целочисленной невырожденной матрицы A существует такая унимодулярная матрица P , что элементы b_{ij} $(i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,m)$ матрицы $B=PA$ удовлетворяют условиям

$$b_{ii}>0 \quad (i=1,\ldots,m) \qquad /7/$$

$$b_{ij}=0 \quad (i>j) \qquad /8/$$

$$0\leq b_{ij}<b_{jj} \quad (i<j) \qquad /9/$$

Незначительным изменением доказательства предыдущего результата может быть получена

Л е м м а I. Для всякой целочисленной невырожденной матрицы A существует такая унимодулярная матрица P, что элементы b_{ij} $(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,m)$ матрицы $B=PA$ удовлетворяют условиям /7/, /8/ и

$$-b_{jj} < b_{ij} \leqslant 0. \qquad /10/$$

З а м е ч а н и е. Если B удовлетворяет условиям /7/, /8/ и /10/, то $B^{-1} \geqslant 0$.

Для доказательства заметим, что элементы матрицы B удовлетворяют /4/ и все ее главные миноры положительны, что, как известно [5], обеспечивает неотрицательность элементов матрицы B^{-1}.

Хорошо известен [2, 3] также следующий результат.

Л е м м а 2. Если наибольший общий делитель /НОД/ компонент b_i $(i=1,\dots,m)$ вектора b равен d, то существует такая унимодулярная матрица P, что $Pb=de_1$, где e_1 - вектор, у которого первая компонента равна I, а остальные-0.

Л е м м а 3. [6]. Для всякой ЭЗЦЛП существует вектор v такой, что выполняются /2/ и /3/, причем

$$0 \leqslant c_j-(a_j,v) < \Delta-1 \qquad (j=1,\dots,m). \qquad /11/$$

Л е м м а 4. Пусть $\bar{A}=(a_{ij})(i=2,\dots,m;j=2,\dots,m)$ подматрица $(m-1)$-го порядка матрицы $A=(a_{ij})$ $(i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,m)$, $x=A^{-1}e_1$. Если $\bar{A}^{-1}\geqslant 0$, удовлетворяет условию /4/, $\bar{A}^{-1}\geqslant 0$, $x \geqslant 0$, то $A^{-1}\geqslant 0$.

Так как $\bar{A}^{-1}\geqslant 0$, то найдутся такие $y_2,\dots,y_m$, что $y_j > 0$ $(j=2,\dots,m)$ и $\sum_{j=2}^{m} a_{ij}y_j > 0$ $(i=2,\dots,m)$. Не уменьшая общности, можно считать, что $|\sum_{j=2}^{m} a_{ij}y_j| < 1$, так как в противном случае y_j $(j=2,\dots,m)$ можно поделить на достаточно большое число. Пусть x_j - j-ая компонента вектора x, $y_1=0$, $z_j=x_j+y_j$ $(j=1,\dots,m)$. Тогда $z_j \geqslant 0$ и $\sum_{j=1}^{m} a_{ij}z_j > 0 (i=1,\dots,m)$, откуда по теореме 6.3 из [5], следует требуемое утверждение.

Т е о р е м а I. Если A целочисленная невырожденная матрица порядка m, b -вектор, i-ая компонента которого $b_i \in Z$ $(i=1,\dots,m)$, такой, что $\beta=A^{-1}b>0$ и НОД$\{b_1,\dots,b_m\}=d$ (при $b=0$ $d=0$), то существуют такие унимодулярная матрица P и матрица Q перестановки π, что $A'=PAQ$ удовлетворяет условиям /4/ и /5/ и $Pb=de_1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что при $d=0$ утверждение теоремы следует из леммы I, и рассмотрим случай $d>0$.

При $m=1$ достаточно положить $P=(1)$ при $a_{11}>0$ и $P=(-1)$ при $a_{11}<0$. Предположим теорему доказанной при $m=n-1$ и рассмотрим случай $m=n$.

Не уменьшая общности, будем считать, что $b=de_1$, так как в противном случае достаточно воспользоваться леммой 2. Пусть $\bar{a}_j$ получается из a_j отбрасыванием первой компоненты $(j=1,\dots,n)$ и β_j -

j -ая компонента вектора β, тогда

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j \bar{a}_j = \bar{0}. \qquad /12/$$

Так как A невырожденная матрица, то ранг системы векторов $\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n$ равен $n-1$ и, следовательно, найдется такое k, что матрица $\bar{A} = (\bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_{k-1}, \bar{a}_{k+1}, \ldots a_n)$ невырождена и $\bar{\beta} = \bar{A}^{-1}(-\bar{a}_k) \geqslant 0$. Пусть $d_1 =$ НОД $\{a_{2k}, \ldots, a_{nk}\}$ или 0 и $\bar{e}_1 - (n-1)$- мерный вектор, первая компонента которого равна I, а остальные -нули. Тогда по предположению индукции найдутся такие унимодулярная матрица $\bar{P}$ и матрица $\bar{Q}$ перестановки $\bar{\pi}$, что $\bar{A}_1 = \bar{P}\bar{A}\bar{Q}$ удовлетворяет условиям /4/ и /5/ и $\bar{P}\bar{a}_k = -d_1\bar{e}_1$.

Пусть $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{Q} \end{pmatrix}$, $P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \bar{P} \end{pmatrix}$, Q_2 - матрица, ставящая на I место k -ый столбец, на 2-ое - I-ый, на 3-е - 2-ой и так далее, на k -ое - $(k-1)$ -ый, и оставляющая остальные столбцы на своих местах; $A_1 = P_1 A Q_2 Q_1$ и a'_{ij} -элемент матрицы A_1 $(i = 1, \ldots, n;\ j = 1, \ldots, n)$.

Как и в [2], рассмотрим систему неравенств

$$\sum_{i=2}^{n} a'_{ij} u_i \leqslant -a'_{1j} \quad (j = 2, \ldots, n). \qquad /13/$$

По лемме 3 она имеет целочисленное решение $v = (v_2, \ldots, v_n)$. Пусть $\bar{E}$ -единичная матрица порядка $n-1$, $P_2 = \begin{pmatrix} 1 & v \\ 0 & \bar{E} \end{pmatrix}$, $A_2 = P_2 A_1$.

Покажем, что элементы a''_{ij} матрицы A_2 удовлетворяют неравенствам /4/. Действительно, при $i \neq 1$, $j \neq 1$ это верно в силу выбора матриц $\bar{P}$ и $\bar{Q}$; при $i = 1$, $j \neq 1$ -так как v удовлетворяет системе неравенств /13/; при $i \neq 1$, $j = 1$ имеем $a''_{21} = -d_1 \leq 0$, $a''_{i1} = 0 (i = 2, \ldots n)$.

Осталось показать, что $a''_{11} > 0$. Заметим, что из равенства $b = A\beta$ и вида матриц P_1 и P_2 следует, что $d = \sum_{j=1}^{n} \beta'_j a''_{1j}$, где β'_j - j -ая компонента вектора $\beta' = Q_1^{-1} Q_2^{-1} \beta$ $(j = 1, \ldots, n)$, и предположение $a''_{11} \leq 0$ привело бы нас к противоречию с тем, что $d > 0$, $\beta_j \geqslant 0$, $a''_{1j} \leq 0$ $(j = 2, \ldots, n)$.
Так как матрица A_2 удовлетворяет всем предположениям леммы /4/, то $A_2^{-1} \geqslant 0$. Таким образом теорема доказана полностью.

Как обычно, неравенство

$$(a, u) \leq \gamma \qquad /14/$$

назовем правильным отсечением, если для всякого v, удовлетворяющего условиям /2/ и /3/, неравенство /14/ справедливо и существует удовлетворяющий /2/ вектор u' такой, что $(a, u') > \gamma$.

Пусть $u^0 = (u_1^0, \ldots, u_m^0)$- решение системы уравнений $A^T u = c$, $d_i^0 = [u_i^0]$ - наибольшее целое, не превосходящее u_i^0 $(i = 1, \ldots, m)$.

Для решения ЭЗЦЛП /I/ - /3/, приведенной к каноническому виду, предложим алгоритм подвижки (ср. [I]), основанный на следующих леммах.

Л е м м а 5. [2,7]. Если найдется $i \in \{1,\dots,m\}$ такое, что $u_i^0 \notin \mathbb{Z}$, то $u_i^0 \leq d_i^0$ - правильное отсечение.

Л е м м а 6. Пусть $d=(d_1,\dots,d_m) \in \mathbb{Z}^m$. Если неравенства $u_i \leq d_i$ $(i=1,\dots,m)$ выполняются для всех v, удовлетворяющих /2/ и /3/, и существует j такое, что $(a_j, d) > c_j$, то $u_j \leq d_j - 1$ -правильное отсечение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для доказательства к неравенству $(a_j, u) \leq c_j$ прибавим неравенства $u_i \leq d_i$, умноженные на неотрицательные числа $(-a_{ij})$ $(i \neq j)$. Получим $a_{jj} u_j \leq c_j - \sum\limits_{i \neq j} a_{ij} d_i = c_j - (a_j, d) + a_{jj} d_j$, откуда с учетом условия /3/ и неотрицательности a_{jj} следует утверждение леммы.

Алгоритм подвижки.

Шаг 0. Найти u^0 и $d_i^0 = [u_i^0]$ $(i=1,\dots,m)$. Положить $d^0=(d_1^0,\dots,d_m^0)$ и $s=1$.

Шаг s. Если $(a_i, d^{s-1}) \leq c_i$ $(i=1,\dots,m)$, то $d^{s-1}=(d_1^{s-1},\dots,d_m^{s-1})$ - решение /I/ - /3/, стоп. В противном случае найти $j=\min\{i \mid (a_i, d^{s-1}) > c_i\}$ и положить $d_i^s = d_i^{s-1}$ $(i \neq j)$, $d_j^s = d_j^{s-1} - 1$. Перейти к шагу $s+1$.

Т е о р е м а 2. Решение ЭЗЦЛП /I/ - /3/, приведенной к каноническому виду, требует не более $\sigma(\Delta-1)$ шагов, где σ есть сумма элементов матрицы A^{-1}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. По лемме 3 существует вектор $v=(v_1,\dots,v_m)$ такой, что выполняются /2/ и /3/. Так как все отсечения, используемые в алгоритме подвижки правильные, то $v_i \leq d_i^s$ для всякого s, откуда, как и в [I], следует оценка для числа шагов t алгоритма подвижки $t \leq \sum\limits_{i=1}^{m} (d_i^0 - v_i)$.

Пусть $f=(1,\dots,1)$ и $c_i' = (a_i, v)$. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{m}(d_i^0 - v_i) < \sum\limits_{i=1}^{m}(u_i^0 - v_i) = (u^0 - v, f) = (A^T(u^0-v), A^{-1}f) = (c-c', A^{-1}f) \leq (\Delta-1)(f, A^{-1}f) = \sigma(\Delta-1)$, что и требовалось.

Поступила в ред.-изд.отдел.
23 сентября I974 г.

Л и т е р а т у р а

I. А.А.Вотяков, О задачах инвариантных относительно $\mathbb{Z}$ - округления."Экономика и математические методы", т.7, № 2, I97I,259-264.

2. А.А.Вотяков, Эквивалентные преобразования линейной целочисленной задачи, сб. Исследования по дискретной математике, Наука, М.I973, 9-26.

3. Chàtelet A. Leçons sur la théorie des nombres, Paris, I913, Ch.3.

4. И.В.Проскуряков, "Сборник задач по линейной алгебре", Наука,

М., 1967, задача № 944.

5. Х.Никайдо, "Выпуклые структуры и математическая экономика", гл. 2. § 6, Мир, М., 1972.

6. Fiorot J.Ch. Generation of all integer for given sets of linear inequalities, Mathematical Programming, 3,1972,276-295.

7. В.Н.Шевченко, О.Л.Ремизова, О построении правильных отсечений в целочисленном линейном программировании, Ученые записки ГГУ, вып. 166, Горький, 1973, 199-206.