Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1975 г. выпуск 14.
УДК.512.25.

МИНИМАКСНАЯ ЗАДАЧА СТАНДАРТИЗАЦИИ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОГО СПРОСА

Ю.В.Шамардин

Среди классов задач, появившихся в связи с проблемой оптимального управления производственно-экономическими, технологическими и другими системами, значительное место занимают задачи выбора оптимальных параметрических рядов, т.е. задачи стандартизации типов и основных параметров технических изделий. Различные постановки этих задач, методы решения, литературу можно найти, например, в статьях [1-4]. Коротко суть задачи стандартизации заключается в том, чтобы из некоторого множества требуемых типов изделий выбрать такой конечный набор (параметрический ряд), с помощью которого спрос на требуемые изделия удовлетворялся бы полностью и с наименьшими затратами. При этом спрос предполагается известным заранее, т.е. до выбора ряда. Однако, в некоторых практических приложениях спрос на изделия становится известным только после выбора ряда, а до этого известны лишь границы, в которых может реализоваться спрос. В настоящей работе исследуется одна из возможных постановок задачи выбора оптимального однопараметрического ряда именно в такой ситуации.

§ 1. Постановка задачи

Пусть имеется M типов изделий, занумерованных числами 1,2,..., M по возрастанию основного параметра. Весь процесс создания параметрического ряда представим как трехэтапный игровой процесс:

1) Сначала первый игрок решает вопрос о выборе ряда $x=(x_0, x_1, x_2,\dots,x_m)$. Здесь $0=x_0<x_1<x_2<\dots<x_m=M$, x_i - целые, $1\leq m\leq M$. Множество рядов при фиксированном m обозначим через X_m. Одновременно этот же игрок выбирает величины y_k - количество произведенных образцов типа x_k, $k=\overline{1,m}$.

2) Затем второй игрок выбирает параметры z_k - фактическую потребность на интервале $(x_{k-1}, x_k]$. При этом предполагается, что значения переменных, выбранных на первом этапе, известны и $\varphi(x_{k-1}, x_k)\leq$ $\leq z_k\leq \Phi(x_{k-1}, x_k)$. Неотрицательные функции $\varphi(x_{k-1}, x_k)$, $\Phi(x_{k-1}, x_k)$ заданы. Множество всевозможных векторов спроса $z=(z_1, z_2,\dots, z_m)$ при фиксированном ряде $x\in X_m$ обозначим через $Z(x)$.

3) И, наконец, первый игрок, зная значения величин z_k, $k=\overline{1,m}$, делает перераспределение произведенных образцов. Будем считать, что образец типа x_k может использоваться только вместо типов 1,2,...,x_k. Цель первого игрока - минимизировать затраты, связанные с созданием ряда, цель его противника-максимизировать эти затраты. Под затратами

будем понимать сумму

$$S=\sum_{K=1}^{m}\left[c^{o}(x_K)+c(x_K)y_K+d(x_K,z_K-w_K)\right].$$

Здесь $w_K=\sum_{i=K}^{m}\xi_{Ki}\,\rho(x_K,x_i)$, где $\rho(x_K,x_i)$ – количество образцов типа x_K, которые может заменить один образец типа x_i;

ξ_{Ki} – часть произведенных образцов типа x_i, предназначенных для использования вместо образцов типа x_K в интервале $(x_{K-1},x_K]$, при этом

$$\sum_{K=1}^{i}\xi_{Ki}=y_i,\quad i=\overline{1,m},\quad \xi_{Ki}>0$$

Множество всех наборов $\xi=\{\xi_{Ki}\}$, $1\le K\le i\le m$, т.е. множество всех вариантов перераспределения, обозначим через Ξ. Функция $d(x_K,t)$ имеет смысл штрафа за разницу в t единиц между спросом и предложением в интервале $(x_{K-1},x_K]$. Неотрицательные функции $c^{o}(x_K)$, $c(x_K)$ означают соответственно начальные затраты и стоимость производства одного образца типа x_K. Сформулируем теперь основную задачу: найти параметрический ряд, на котором достигается величина

$$\min_{1\le m\le M}\ \min_{x\in X_M}\ \min_{y\in R_+^m}\ \max_{z\in Z(x)}\ \min_{\xi\in\Xi} S \qquad /1/$$

§ 2. Некоторые общие свойства задачи

Для сокращения записи, если рассуждения ведутся при фиксированном $x\in X_m$, величины $c^{o}(x_K)$, $c(x_K)$, $\rho(x_K,x_i)$, $\varphi(x_{K-1},x_K)$ $\Phi(x_{K-1},x_K)$, $d(x_K,t)$ будем обозначать соответственно через c^{o}_K, c_K, ρ_{Ki}, φ_K, Φ_K, $d_K(t)$. Далее, пусть

$$H(x,y,z)=\min_{\xi\in\Xi}\sum_{K=1}^{m}d_K(z_K-w_K), \qquad /2/$$

$$F(x,y)=\max_{z\in Z(x)}H(x,y,z). \qquad /3/$$

Т е о р е м а I. Пусть функция $d(\ell,t)$, $1\le\ell\le M$, $t\in R^1$, выпукла по t при любом ℓ и $\min_{t\in R^1}d(\ell,t)=d(\ell,0)$. Тогда при любом фиксированном $x\in X_m$

I. функция $F(x,y)$ выпукла по y,

2. $F(x,y)=\max_{j=\overline{0,m}}H(x,y,z^j)$, где $z^j=(z_1^j,z_2^j,\dots,z_m^j)\in Z(x)$

и

$$z_K^j=\begin{cases}\varphi_K, & \text{если } K\le j,\\ \Phi_K, & \text{если } K>j.\end{cases}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. I. Запишем выражение /2/ в следующем виде:

$$H(x,y,z) = \min_{\substack{\xi_{\kappa i}\geq 0\\ 1\leq \kappa\leq i\leq m}} \max_{u\in R^m} \left[\sum_{\kappa=1}^{m} d_\kappa(z_\kappa - \sum_{i=\kappa}^{m} p_{\kappa i}\xi_{\kappa i}) + \sum_{i=1}^{m} u_i(\sum_{\kappa=1}^{i}\xi_{\kappa i} - y_i)\right].$$

Здесь экстремумы можно брать в любом порядке в силу известных теорем о минимаксе (например, по теореме 2 из [5]), поэтому после преобразований получим

$$H(x,y,z) = \max_{u\in R^m} \sum_{\kappa=1}^{m} (S_\kappa(z_\kappa,\alpha_\kappa) + \alpha_\kappa z_\kappa - u_\kappa y_\kappa),$$

где

$$\alpha_\kappa = \min_{i=\overline{\kappa,m}} \frac{u_i}{p_{\kappa i}}, \quad \kappa=\overline{1,m}, \qquad /4/$$

$$S_\kappa(z_\kappa,\alpha_\kappa) = \min_{t\leq z_\kappa} [d_\kappa(t) - \alpha_\kappa t].$$

Подставляя полученное выражение для функции $H(x,y,z)$ в равенство /3/ и меняя местами максимумы, получаем, что

$$F(x,y) = \max_{u\in R^m} \max_{z\in Z(x)} \sum_{\kappa=1}^{m} (S_\kappa(z_\kappa,\alpha_\kappa) + \alpha_\kappa z_\kappa - u_\kappa y_\kappa). \qquad /5/$$

Таким образом, функция $F(x,y)$ есть максимум из функций линейных по y, откуда и следует первое утверждение теоремы.

2. Фиксируем некоторое $u\in R^m$. Найдется такой номер j, $0\leq j\leq m$, что $\alpha_\kappa\leq 0$ при $\kappa\leq j$ и $\alpha_\kappa\geq 0$ при $\kappa> j$. Это вытекает из равенств /4/.

Обозначим через $t(\alpha_\kappa)$ такую точку (конечную или бесконечную), на которой достигается величина

$$S_\kappa(\infty,\alpha_\kappa) = \min_{t\in R^1} (d_\kappa(t) - \alpha_\kappa\cdot t).$$

Так как $d_\kappa(t)$ - выпуклая функция, нетрудно показать, что

$$\alpha_\kappa z_\kappa + S_\kappa(z_\kappa,\alpha_\kappa) = \begin{cases} d_\kappa(z_\kappa) & \text{при } z_\kappa\leq t(\alpha_\kappa),\\ S_\kappa(\infty,\alpha_\kappa) + \alpha_\kappa z_\kappa & \text{при } z_\kappa\geq t(\alpha_\kappa). \end{cases}$$

Из этого соотношения и условий теоремы следует, что функция $\alpha_\kappa z_\kappa + S_\kappa(z_\kappa,\alpha_\kappa)$ не возрастает по z_κ при $\alpha_\kappa\leq 0$ и не убывает по z_κ при $\alpha_\kappa\leq 0$. Отсюда максимум по z в /5/ достигается на векторе $(z_1, z_2, \ldots, z_m)$ с компонентами

$$z_\kappa = \begin{cases} \varphi_\kappa & \text{при } \kappa\leq j,\\ \Phi_\kappa & \text{при } \kappa> j. \end{cases}$$

Из последнего равенства легко вытекает второе утверждение теоремы.

Доказанные свойства позволяют применять методы выпуклого программирования при поиске минимума по y в задаче /I/. Для выбора же оптимального ряда в общем случае пока не удалось найти алгоритма эффективнее алгоритма полного перебора. Однако при некоторых ограничениях для поиска оптимального ряда можно применить динамическое программирование.

§ 3. Решение задачи в одном частном случае

Пусть функция штрафа

$$d(x_k, t) = \max(-r(x_k)\cdot t,\ n(x_k)\cdot t), \qquad /6/$$

где $r(x_k)$ и $n(x_k)$ - положительные функции, определяющие штраф соответственно за избыток и за нехватку одного образца типа x_k в интервале $(x_{k-1}, x_k]$. Пусть, далее, функция $\rho(x_i, x_j)$ представима в виде

$$\rho(x_i, x_j) = \frac{q(x_i)}{q(x_j)}, \qquad /7/$$

где $q(x_i)$ - положительная функция, и выполняются неравенства

$$c(i)q(i) \le c(i+1)q(i+1), \qquad i=\overline{1, M-1}, \qquad /8/$$

$$r(i)q(i) \le r(i+1)q(i+1), \qquad i=\overline{1, M-1}, \qquad /9/$$

$$n(i)q(i) \le n(i+1)q(i+1), \qquad i=\overline{1, M-1}. \qquad /10/$$

В этом параграфе будет показано, что при выполнении условий /6/-/10/ задача /I/ упрощается и для выбора оптимального ряда становится возможным применение динамического программирования.

Прежде всего преобразуем равенство /2/, условившись писать r_i, n_i, q_i вместо $r(x_i)$, $n(x_i)$, $q(x_i)$ там, где это не вызывает недоразумений.

$$H(x,y,z) = \min_{\xi\in\Xi} \sum_{k=1}^{m} \max(r_k(w_k - \xi_k), n_k(\xi_k - w_k)) =$$

$$= \min_{\xi\in\Xi} \max_{\substack{-r_k\le u_k\le n_k \\ k=\overline{1,m}}} \sum_{k=1}^{m} u_k(\xi_k - w_k).$$

В последнем выражении экстремумы можно брать в любом порядке (см. теорему I в [5]), поэтому после преобразований получаем

$$H(x,y,z) = \max_{\substack{-r_k\le u_k\le n_k \\ k=\overline{1,m}}} \sum_{k=1}^{m} (u_k z_k - \frac{y_k}{q_k} \max_{i=\overline{1,k}} u_i\cdot q_i).$$

Пусть $v_k = \max_{i=\overline{1,k}} u_i\cdot q_i$. Используя свойства /9/ и /10/, последнее равенство нетрудно привести к виду

$$, \quad H(x,y,z) = \max_{\substack{v_1 < v_2 < \ldots < v_m \\ -z_1 q_1 < v_k \leq n_k q_k}} \sum_{k=1}^{m} \frac{z_k - y_k}{q_k} \cdot v_k \quad . \qquad /11/$$

Т е о р е м а 2. При выполнении условий /6/ - /10/ и фиксированном ряде $x \in X_m$ минимум по y в задаче /1/ достигается на множестве

$$Y = \left\{ (y_1, y_2, \ldots, y_m) \mid 0 < y_i \leq \varphi_i, \ i = \overline{1,m} \right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что для любой точки $y \in R_+^m$ найдется точка $\tilde{y} \in Y$ такая, что

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \tilde{y}_k + F(x, \tilde{y}) \leq \sum_{k=1}^{m} c_k y_k + F(x,y). \qquad /12/$$

Все рассуждения разобьем на три пункта.

1. Пусть $y \in R_+^m$ и $y_1 > \varphi_1$. Рассмотрим точку $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m) = (\varphi_1, y_2, y_3, \ldots, y_m)$. Используя равенство /11/, для любого $z \in Z(x)$ получаем

$$H(x,y,z) = (y_1 - z_1) \cdot z_1 + \max_{\substack{v_2 < v_3 \leq \ldots < v_m \\ -z_1 q_1 < v_k \leq n_k q_k}} \sum_{k=2}^{m} \frac{z_k - y_k}{q_k} \cdot v_k \ ,$$

$$H(x, \bar{y}, z) = (\varphi_1 - z_1) \cdot z_1 + \max_{\substack{v_2 < v_3 < \ldots < v_m \\ -z_1 q_1 \leq v_k \leq n_k q_k}} \sum_{k=2}^{m} \frac{z_k - y_k}{q_k} v_k .$$

Из этих равенств вытекает, что $H(x,y,z) \geq H(x,\bar{y},z)$, откуда $F(x,y) \geq F(x,\bar{y})$. Кроме того, очевидно $c_1 y_1 \geq c_1 \varphi_1$. Следовательно

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \bar{y}_k + F(x,\bar{y}) \leq \sum_{k=1}^{m} c_k y_k + F(x,y).$$

2. Пусть $y \in R_+^m$ и некоторая компонента $y_i > \varphi_i$, $i \geq 2$. Используя /11/, получаем

$$H(x,y,z) = \max_{\substack{v_1 < v_2 < \ldots < v_{i-1} < v_{i+1} < \ldots < v_m \\ -z_1 q_1 < v_k \leq n_k q_k}} \left(\max_{\substack{v_{i-1} < v_i \leq v_{i+1} \\ -z_1 q_1 < v_i \leq n_i q_i}} \sum_{k=1}^{m} \frac{z_k - y_k}{q_k} \cdot v_k \right) =$$

$$= \max_{\substack{v_1 < \ldots < v_{i-1} < v_{i+1} < \ldots \leq v_m \\ -z_1 q_1 < v_k < n_k q_k}} \left(\sum_{k \neq i-1, i} \frac{z_k - y_k}{q_k} \cdot v_k + \left(\frac{z_{i-1} - y_{i-1}}{q_{i-1}} + \frac{z_i - y_i}{q_i} \right) v_{i-1} \right) \qquad /13/$$

Рассмотрим точку $\bar{y} = (\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$ с компонентами $\bar{y}_k = y_k$ при $k \neq i-1, i$, $\bar{y}_{i-1} = y_{i-1} + \frac{q_{i-1}}{q_i}(y_i - \varphi_i)$, $\bar{y}_i = \varphi_i$. Так же, как выше, находим, что

$$H(x,\bar{y},z)=\max_{\substack{v_1\le\ldots\le v_{i-1}\le v_{i+1}\le\ldots\le v_m\\ -r_1q_1\le v_k\le n_kq_k}}\left(\sum_{k\ne i-1,i}\frac{z_k-\bar{y}_k}{q_k}\cdot v_k+\left(\frac{z_{i-1}-\bar{y}_{i-1}}{q_{i-1}}+\frac{z_i-\bar{y}_i}{q_i}\right)v_{i-1}\right) \qquad /14/$$

Сравнивая выражения /13/ и /14/ и замечая, что

$$\frac{z_{i-1}-\bar{y}_{i-1}}{q_{i-1}}+\frac{z_i-\bar{y}_i}{q_i}=\frac{z_{i-1}-y_{i-1}}{q_{i-1}}+\frac{z_i-y_i}{q_i},$$

получаем, что $H(x,y,z)=H(x,\bar{y},z)$ для всех $z\in Z(x)$, откуда $F(x,y)=F(x,\bar{y})$. Разность

$$(c_{i-1}y_{i-1}+c_iy_i)-(c_{i-1}\bar{y}_{i-1}+c_i\bar{y}_i)=\frac{y_i-\varphi_i}{q_i}(c_iq_i-c_{i-1}q_{i-1})\geq 0,$$

так как из условия /8/ $c_iq_i\geq c_{i-1}q_{i-1}$. Следовательно

$$\sum_{k=1}^m c_k\bar{y}_k+F(x,\bar{y})\leq\sum_{k=1}^m c_ky_k+F(x,y).$$

3. Возьмем произвольную точку $y\in R_+^m$ и построим для нее точку $\tilde{y}\in Y$, введенную в начале доказательства. Если $y\in Y$, то полагаем $\tilde{y}=y$. Если $y\bar{\in}Y$, то находим первое y_i со свойством $y_i>\varphi_i$, просматривая компоненты в порядке $y_m, y_{m-1},\ldots,y_1$. Так же, как это делалось в предыдущих пунктах, отстроим точку $\bar{y}=(\bar{y}_1,\bar{y}_2,\ldots,\bar{y}_m)$, причем $\bar{y}_i=\varphi_i$ и

$$\sum_{k=1}^m c_k\bar{y}_k+F(x,\bar{y})\leq\sum_{k=1}^m c_ky_k+F(x,y).$$

Затем описанный процесс применяем к точке $\bar{y}$. Не более, чем через m шагов будет построена точка $\tilde{y}\in Y$, удовлетворяющая неравенству /12/, что и доказывает теорему.

В точках $y\in Y$ выражение для функции $F(x,y)$ можно упростить. Для этого функцию $H(x,y,z)$ из равенства /11/ подставим в /3/. Получим цепочку равенств

$$F(x,y)=\max_{z\in Z(x)}\max_{v}\sum_{k=1}^m\frac{z_k-y_k}{q_k}\cdot v_k=\max_{v}\max_{z\in Z(x)}\sum_{k=1}^m\frac{z_k-y_k}{q_k}\cdot v_k=$$

$$=\max_{l=\overline{0,m}}\left(\max_{-r_1q_1\le v_1\le\ldots\le v_l\le 0}\sum_{k=1}^l\frac{\varphi_k-y_k}{q_k}v_k+\max_{\substack{0\le v_{l+1}\le\ldots\le v_m\\ v_k\le n_kq_k}}\sum_{k=l+1}\frac{\varphi_k-y_k}{q_k}\cdot v_k\right)=$$

$$=\max_{0\le i\le l\le m}\left(\sum_{k=1}^i\frac{y_k-\varphi_k}{q_k}\cdot r_1q_1+\sum_{k=l+1}^m(\varphi_k-y_k)n_k\right)=\max_{i=\overline{0,m}}t_i(y),$$

где

$$t_i(y)=\sum_{k=1}^i\frac{y_k-\varphi_k}{q_k}\cdot r_1q_1+\sum_{k=i+1}^m(\varphi_k-y_k)n_k,\quad i=\overline{0,m}, \qquad /15/$$

причем здесь первая сумма обращается в нуль при $i=0$, а вторая при $i=m$.

Т е о р е м а 3. Пусть выполняются условия предыдущей теоремы и

$$\min_{y\in Y}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k y_k + F(x,y)\right) = \sum_{k=1}^{m} c_k y_k^* + F(x,y^*), \qquad /16/$$

тогда $F(x,y^*) = \max\limits_{i=\overline{0,m}} t_i(y^*) = t_0(y^*)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $J=\{i \mid t_i(y^*)=F(x,y^*)\}$ $j=\min\limits_{i\in J} i$. Предположим, что $F(x,y^*) > t_0(y^*)$, тогда $j \geq 1$. Компоненты y_1^*, $y_2^*, \ldots, y_j^*$ не могут одновременно равняться нулю, так как в этом случае было бы $t_j(y^*) \leq t_0(y^*)$, что противоречит предположению. Следовательно, найдется $y_l^* > 0$, $1 \leq l \leq j$. Рассмотрим точку $\bar{y}=(\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m)$, $\bar{y}_k = y_k^*$ при $k \neq l$, $\bar{y}_l = y_l^* - \varepsilon$. Для всех $i \in J$

$$t_i(\bar{y}) = t_i(y^*) - \frac{z_1 q_1}{q_l}\cdot\varepsilon$$

и при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$F(x,\bar{y}) = F(x,y^*) - \frac{z_1 q_1}{q_l}\cdot\varepsilon .$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{m} c_k \bar{y}_k + F(x,\bar{y}) = \sum_{k=1}^{m} c_k y_k^* + F(x,y^*) - \left(c_l + \frac{z_1 q_1}{q_l}\right)\cdot\varepsilon <$$

$$< \sum_{k=1}^{m} c_k y_k^* + F(x,y^*),$$

что противоречит /16/.

Из доказанной теоремы следует, что

$$\min_{y\in Y}\left(\sum_{k=1}^{m} c_k y_k + F(x,y)\right) = \min_{y\in Y,\ t_0(y)\geq t_i(y),\ i=\overline{1,m}} \left(\sum_{k=1}^{m} c_k y_k + t_0(y)\right).$$

Используя равенства /15/ и преобразуя систему неравенств $t_0(y) \geq t_i(y)$, $i=\overline{1,m}$, получаем, что поиск минимума по y в задаче /I/ при условиях /6/ - /10/ есть следующая задача линейного программирования:

$$\sum_{k=1}^{m} \left(c_k^0 + c_k y_k + (\varphi_k - y_k) n_k\right) \longrightarrow \min \qquad /17/$$

$$\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{z_1 q_1}{q_i} + n_i\right)(y_i^0 - y_i) \geq 0, \quad k=\overline{1,m} \qquad /18/$$

$$0 \le y_k \le \varphi_k , \qquad k = \overline{1,m} . \qquad /19/$$

Здесь $y_i^o = \dfrac{\varphi_i \cdot r_1 q_1 + \varphi_i n_i q_i}{r_1 q_1 + n_i q_i}$.

Теперь для выбора оптимального параметрического ряда можно применить динамическое программирование. Для этого зафиксируем значение x_1 , $1 \le x_1 \le M$ и введем функцию

$$S_k(t) = \min_{m \ge 1} \min_{\substack{x_1 < x_2 < \ldots < x_m = k \\ x_i - \text{целые}}} \min_{y} \sum_{i=1}^{m} (c_i^o + c_i y_i + (\varphi_i - y_i) n_i) , \qquad /20/$$

где минимум по y берется при ограничениях:

$$0 \le y_i \le \varphi_i \qquad i = \overline{1,m} ,$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} \left(\frac{r_1 q_1}{q_i} + n_i \right) (y_i^o - y_i) \ge 0 \qquad \ell = \overline{1, m-1} ,$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left(\frac{r_1 q_1}{q_i} + n_i \right) (y_i^o - y_i) \ge t .$$

Положим $S_k(t) = +\infty$, если минимум в /20/ берется по пустому множеству.

Очевидно $S_m(0)$ - минимум в задаче /1/ по всем рядам с фиксированным членом x_1 . Выпишем рекуррентные соотношения для высисления $S_m(0)$, опуская обычные для динамического программирования рассуждения. Пусть

$$R(\ell, k) = \frac{\varphi(\ell,k) r(x_1) q(x_1) + \varphi(\ell,k) n(k) q(k)}{r(x_1) q(x_1) + n(k) q(k)} ,$$

$$T(\ell, k, t, v) = \max \left(0, t + \left(\frac{r(x_1) q(x_1)}{q(k)} + n(k) \right) (v - R(\ell, k)) \right) .$$

Тогда нужные соотношения имеют вид

$$S_k(t) = \min_{x_1 \le \ell < k} \min_{0 \le v \le \varphi(\ell,k)} \left[c^o(k) + c(k) \cdot v + (\varphi(\ell,k) - v) n(k) + S_\ell(T(\ell,k,t,v)) \right] ,$$

$$S_{x_1}(t) = \min_{\substack{0 \le v \le \varphi(x_0, x_1) \\ [r(x_1) + n(x_1)] (R(x_0,x_1) - v) \ge t}} \left[c^o(x_1) + c(x_1) \cdot v + (\varphi(x_0, x_1) - v) n(x_1) \right] .$$

Таким образом при ограничениях /6/ - /10/ задача /1/ решается по приведенной схеме, правда, с полным перебором по переменной x_1 .

Если к условиям /6/ - /10/ добавить ещё одно достаточно общее условие, то поиск оптимального ряда в задаче /1/ значительно упрощается. Чтобы показать это, обозначим через $G(x)$ значение минимума в задаче /17/ - /19/ и сделаем следующие преобразования

$$G(x) = \min_{y \in Y} \max_{\lambda_k \ge 0, k = \overline{1,m}} \left[\sum_{i=1}^{m} (c_i^o + c_i y_i + (\varphi_i - y_i) n_i) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \left(\sum_{i=1}^{k} \left(\frac{r_1 q_1}{q_i} + n_i \right) (y_i - y_i^o) \right) \right] =$$

$$= \max_{\lambda_k \geq 0,\, k=\overline{1,m}} \min_{y \in Y} \left[\sum_{i=1}^{m} \left(c_i - r_i + \left(\frac{r_1 q_1}{q_i} + r_i \right) \sum_{k=i}^{m} \lambda_k \right) y_i - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=i}^{m} \lambda_k \right) \left(\frac{r_1 q_1}{q_i} + r_i \right) y_i^o + \sum_{i=1}^{m} (c_i^o + \varphi_i r_i) \right] .$$

Положим
$$\mu_i = \sum_{k=i}^{m} \lambda_k ,$$

$$h_i(t) = \min_{0 \leq y_i \leq \varphi_i} (t \cdot y_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \geq 0 \\ \varphi_i t & \text{при } t \leq 0 \end{cases}$$

В этих обозначениях

$$G(x) = \max_{0 \leq \mu_m \leq \mu_{m-1} \leq \ldots \leq \mu_1} \sum_{i=1}^{m} \left[c_i^o + \varphi_i r_i + h_i \left(c_i - r_i + \left(\frac{r_1 q_1}{q_i} + r_i \right) \mu_i \right) - \left(\frac{r_1 q_1}{q_i} + r_i \right) y_i^o \mu_i \right] . \quad /21/$$

Легко видеть, что

$$G(x) \leq \max_{\mu_i \geq 0,\, i=\overline{1,m}} \sum_{i=1}^{m} [\ldots] , \qquad /22/$$

где в квадратных скобках стоит то же самое выражение, что и в /21/. Нетрудно подсчитать, что максимум в /22/ достигается при

$$\mu_i^* = \max \left(0, \frac{r_i q_i - c_i q_i}{r_i q_i + r_1 q_1} \right)$$

и равен

$$\sum_{i=1}^{m} \left(c_i^o + \varphi_i r_i - \left(\frac{r_1 q_1}{q_i} \cdot \varphi_i + r_i \varphi_i \right) \mu_i^* \right) . \qquad /23/$$

Пусть теперь

$$g(\ell, k) = \max \left(0, \frac{r(k) q(k) - c(k) q(k)}{r(k) q(k) + r(\ell) q(\ell)} \right) .$$

и выполняется следующее условие:

$$g(\ell, k) \geq g(\ell, k-1), \quad 1 \leq \ell < k \leq M-1. \qquad /24/$$

Очевидно $\mu_i^* = g(x_1, x_i)$ и при условии /24/ имеем неравенства

$$0 \leq \mu_m^* \leq \mu_{m-1}^* \leq \ldots \leq \mu_1^* .$$

Следовательно, неравенство /22/ превращается в равенство и $G(x)$ равняется сумме /23/. Обозначим i -ое слагаемое в этой сумме через

$$f(x_1, x_{i-1}, x_i) = c^o(x_i) + \varphi(x_{i-1}, x_i) \cdot r(x_i) +$$

$$+ \left(\frac{r(x_1) q(x_1)}{q(x_i)} \cdot \varphi(x_{i-1}, x_i) + r(x_i) \varphi(x_{i-1}, x_i) \right) \cdot g(x_1, x_i) .$$

Теперь последний результат параграфа можно сформулировать так: при выполнении условий /6/ - /10/ и /24/ задача /1/ сводится к задаче

$$\min_{1\le m\le M}\ \min_{x\in X_m}\ \sum_{i=1}^{m} f(x_1, x_{i-1}, x_i).$$

При фиксированном значении x_1 эта задача эффективно решается динамическим программированием (см. [2]).

В заключение я хочу выразить благодарность своему научному руководителю Р.М.Ларину за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Поступила в ред.-изд.отдел
23 сентября 1974 г.

Литература

Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. О методах решения некоторых задач оптимизации параметрических рядов. - "Стандарты и качество", 1971, вып. 12, с.10-12.

2. Гимади Э.Х. Выбор оптимальных шкал в одном классе задач типа размещения, унификации и стандартизации. - В кн.: Управляемые системы. Вып. 6. Новосибирск, 1970, с.57-70.

3. Береснев В.Л. Об одной задаче математической теории стандартизации. - В кн.: Управляемые системы. Вып. 11. Новосибирск, 1973, с. 43-54.

4. Емеличев В.А., Ковалев М.М. Решение некоторых задач вогнутого программирования методом построения последовательных планов. - "Изв.АН БССР", серия физ.-мат.наук, 1972, вып. 1, с.65-74.

5. Гольштейн Е.Г. Выпуклое программирование. М., "Наука", 1970, 66 с.