Управляемые системы, ИМ СО АН СССР 1975 г выпуск 14.
УДК.519.1.

К ЗАДАЧЕ О ПОКРЫТИИ

А.И.Сердюков

В настоящей работе рассматривается следующая задача. Пусть задан n- вершинный неориентированный граф $G=(X,\mathcal{U})$, в котором каждому ребру $u_{ij}\in\mathcal{U}$, $1\le i,j\le n$, приписан вес ρ_{ij}, где ρ_{ij} - вещественные положительные числа. Задача состоит в том, чтобы найти такой набор K, $K\subseteq\mathcal{U}$, ребер графа G (покрытие графа G), что каждая вершина графа инцидентна хотя бы одному ребру из набора K, при котором его вес $\rho(K)=\sum\limits_{u_{ij}\in K}\rho_{ij}$ минимален [1]. Точнее, требуется построить достаточно эффективный алгоритм для решения поставленной задачи.

В работе приводятся эквивалентные постановки исходной задачи и предлагается приближенный алгоритм А, для которого априорная оценка относительного уклонения получаемого решения от оптимума не превосходит 1/3.

Трудоемкость этого алгоритма составляет порядка $\sim n^3$ элементарных операций (под элементарной операцией понимается арифметическая операция, либо операция сравнения), причем в классе всех двудольных графов он приводит к точному решению.

Все термины, относящиеся к теории графов и используемые в настоящей работе, можно найти в книге [2].

§ 1. Эквивалентные постановки взвешенной задачи о покрытии или ВЗП.

Очевидно, что при рассмотрении задачи достаточно ограничиться связными графами. Пусть G - связный граф. Обозначим через $\bar{G}=(X,\bar{\mathcal{U}})$ полный n -вершинный неориентированный граф, в котором вершинам взаимооднозначным образом приписаны номера вершин графа G, а каждому ребру $\bar{u}_{ij}\in\bar{\mathcal{U}}$ приписан вес $\bar{\rho}_{ij}$, равный весу кратчайшей цепи между вершинами i и j в графе G.

З а м е ч а н и е 1. В графе $\bar{G}=(X,\bar{\mathcal{U}})$ выполнено неравенство треугольника:

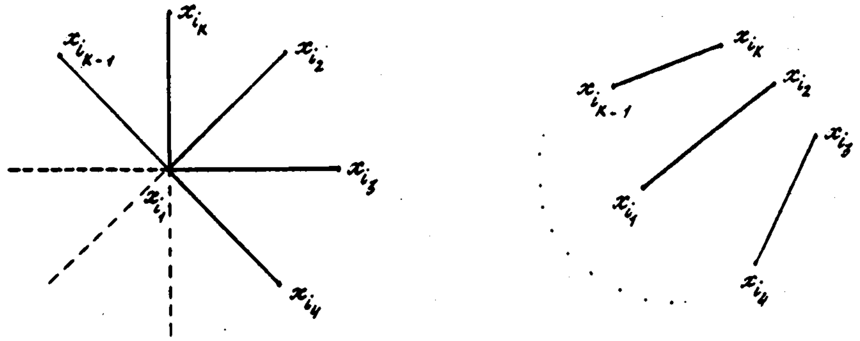
$$\bar{\rho}_{ij}\le\bar{\rho}_{ik}+\bar{\rho}_{kj}. \qquad /1/$$

Л е м м а 1. Среди всех минимальных покрытий графа G существует стандартное покрытие, в котором любая связная компонента состоит не более чем из двух ребер.

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $\bar{K}$ - некоторое нестандартное покрытие графа $\bar{G}$. Тогда, пользуясь неравенством /1/, нестандартную компоненту можно расщепить на более мелкие без увеличения веса. В этом легко убедиться с помощью рисунков 1 и 2, где а) -

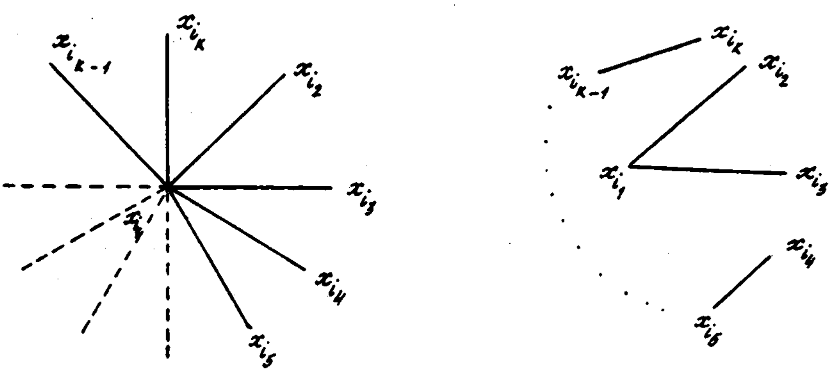
связная компонента покрытия $\bar{K}$ до расщепления, б) - компоненты покрытия, полученные из $\bar{K}$ после расщепления.

Рисунок I/ соответствует случаю, когда в компоненте покрытия $\bar{K}$ четное число вершин, а рисунок 2/ иллюстрирует случай, когда число вершин в компоненте покрытия нечетное.



а/ б/

Рис. I.



а/ б/

Рис. 2.

Этот процесс расщепления компонент минимального покрытия $\bar{K}$ графа $\bar{G}$ можно продолжить до тех пор, пока не получим требуемого покрытия $\bar{K}_0$.

Лемма 1 доказана.

В дальнейшем под $\bar{K}_0$ будем понимать любое минимальное покрытие графа $\bar{G}$, в котором каждая связная компонента содержит не более 2 ребер.

Л е м м а 2. Каков бы ни был граф G , веса минимальных покрытий K и $\bar{K}_0$ соответственно графов G и $\bar{G}$ удовлетворяют равенству:

$$\bar{\rho}(\bar{K}_0) = \rho(K). \qquad /2/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Для доказательства неравенства $\rho(K) \leq \bar{\rho}(\bar{K}_0)$ достаточно вместо каждого ребра $\bar{u}_{ij} \in \bar{K}_0$ рассмотреть кратчайшую цепь между вершинами i и j в графе G. Тогда множество таких цепей образует некоторое покрытие K_1 графа G с весом $\rho(K_1) < \bar{\rho}(\bar{K}_0)$.

Покажем обратное неравенство. Для этого заметим, что всякое ребро, входящее в минимальное покрытие K_1 является кратчайшей цепью между своими вершинами. Построим покрытие $\bar{K}_1$ графа $\bar{G}$ следующим образом:

$\bar{u}_{ij} \in \bar{K}_1$ тогда и только тогда, когда $u_{ij} \in K$. Построенное таким образом покрытие $\bar{K}_1$ графа $\bar{G}$ удовлетворяет равенству: $\rho(\bar{K}_1) = \rho(K)$. Но $\bar{\rho}(\bar{K}_1) \geq \bar{\rho}(\bar{K}_0)$ и лемма 2 доказана полностью.

Пусть $H=(Y,V)$ - полный m-вершинный $(m=2n)$ неориентированный граф, в котором каждому ребру $v_{ij} \in V$, $1 \leq i, j \leq m$, приписан вес ρ^*_{ij}, где

$$\rho^*_{ij} = \begin{cases} \bar{\rho}_{ij}, & \text{если } 1 \leq i, \quad j \leq n, \\ \bar{\rho}_{i,j-n}, & \text{если } 1 \leq i \leq n, \ n+1 \leq j \leq m, \ j \neq i+n, \\ \infty, & \text{если } 1 \leq i \leq n, \ j = i+n, \\ 0, & \text{если } n+1 \leq i, \ j \leq m. \end{cases} \qquad /3/$$

Обозначим через $W = \{w\}$ множество всех совершенных паросочетаний в графе H и $w_0 \in W$ - минимальное совершенное паросочетание.

Т е о р е м а I. Для всякого графа G выполнено соотношение:

$$\rho^*(w_0) = \bar{\rho}(\bar{K}_0). \qquad /4/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: Пусть $w_0 \in W$ - паросочетание в графе H и пусть w_1-такое паросочетание в графе H, которое получено из w_0 после удаления ребер с нулевым весом. Путем попарного склеивания вершин с номерами i, $i+n$, $1 \leq i \leq n$, в графе H, паросочетание w_1 преобразуется в некоторое покрытие $\bar{K}_1$ графа $\bar{G}$. Тогда из определения весов ребер графа H следует, что

$$\rho^*(w_0) = \rho^*(w_1) \geq \bar{\rho}(\bar{K}_1) \geq \bar{\rho}(\bar{K}_0). \qquad /5/$$

Докажем обратное неравенство:

$$\rho^*(w_0) \leq \bar{\rho}(K_0). \qquad /6/$$

Для этого построим следующее совершенное паросочетание $w_2 \in W$ такое, что $\rho^*(w_2) = \bar{\rho}(\bar{K}_0)$. Каждой связной компоненте покрытия $\bar{K}_0$, состоящей из двух ребер, сопоставим паросочетание в графе H, как показано на рисунке 3), где а/ - связная компонента покрытия $\bar{K}_0$ графа $\bar{G}$, б/ - паросочетание в графе H, соответствующее рассматриваемой компоненте покрытия $\bar{K}_0$.

Рисунок 4/ соответствует случаю, когда связная компонента покрытия $\bar{K}_0$ графа $\bar{G}$ состоит из одного ребра.

Рис. 3.

Рис. 4.

Тогда вес паросочетания $w_2 \in W$, с учетом /3/, удовлетворяет следующему неравенству:

$$p^*(w_0) \leq p^*(w_2) = \bar{p}(\bar{K}_0).$$

Неравенство /6/ доказано.

Из сопоставления неравенств /5/,/6/ получаем неравенство /4/.

Теорема I доказана.

Таким образом, ВЗП в n -вершинном графе G можно свести к задаче минимального совершенного паросочетания (ЗМСП) в некотором m - вершинном графе H, $m=2n$.

Это сведение заключается в следующем.

Вначале по исходному графу G строится граф $\bar{G}$. Для определения весов ребер графа $\bar{G}$ можно использовать метод Дийкстра [5]. Далее, с учетом/3/, строится полный m -вершинный неориентированный граф H, в котором решается ЗМСП. По минимальному совершенному паросочетанию $w_0 \in W$ строится покрытие графа $\bar{G}$ путем удаления ребер нулевого веса и попарного склеивания вершин с номерами:

$$i, \quad i+n, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Минимальность построенного покрытия на графе $\bar{G}$ гарантируется теоремой I. Затем минимальное покрытие в графе $\bar{G}$ переносится на граф G без увеличения веса.

Припишем теперь ребрам $u_{ij} \in U$ графа G новые веса $p'_{ij} = p_{ij} + n \cdot \max\limits_{u_{ij} \in U} p_{ij}$. Если w - минимальное совершенное паросочетание в графе G с исходными весами ребер, то это же паросочетание w явл ется минимальным совершенным паросочетанием в графе G с новыми весами ребер и наоборот. Далее, очевидно, что всякое минимальное покрытие в графе G с новыми весами ребер является минимальным совершенным паросочетанием в графе G, если число вершин в графе G четно.

Таким образом, ВЗП и ЗМСП эквивалентны, и если мы умеем достаточно эффективно решать ЗМСП, то столь же эффективно сможем решать ВЗП и наоборот.

В заключение добавим, что ВЗП и ЗМСП эквивалентны взвешенной задаче о минимальном обходе ребер графа [4].

§ 2. Алгоритм решения взвешенной задачи о покрытии.

По-прежнему рассмотрим ВЗП для графа G. Опишем алгоритм А решения этой задачи, который состоит из четырех этапов:

Первый этап. Строится полный n-вершинный неориентированный граф $\bar{G}=(X,\bar{U})$ (см. § 1). На этом первый этап заканчивается и следует переход ко второму этапу.

Второй этап. На графе $\bar{G}$ решается задача о назначениях на минимум [3]. Пусть $\bar{C}=\{\bar{C}_i\}$, $1\leq i\leq l\leq[n/2]$, решение задачи о назначениях для графа $\bar{G}$, заданное множеством циклов $\bar{C}_i$ в графе $\bar{G}$. Далее, переходим к третьему этапу.

Третий этап. Третий этап состоит из l шагов, l - число циклов решения задачи о назначении на минимуме для графа $\bar{G}$, полученное на втором этапе. На i-ом шаге, $1\leq i\leq l$, по циклу $\bar{C}_i$ на графе $\bar{G}$ строится цикл C_i на графе G не обязательно элементарный следующим образом: по каждому ребру $\bar{u}_{pq}\in\bar{C}_i$ строится кратчайшая цепь между вершинами p и q на графе G.

Множество построенных цепей и образует цикл, который обозначим через C_i. В конце третьего этапа будет построено l циклов C_i на графе G. Далее переходим к четвертому этапу.

Обозначим через b_i, $1\leq i\leq l\leq[n/2]$, число ребер в цикле C_i (здесь учитывается кратность ребер в каждом цикле, которая возникает из-за того, что две кратчайшие цепи могут пересекаться по одному и тому же ребру).

Четвертый этап состоит из l шагов. На каждом i-ом шаге, $1\leq i\leq l\leq[n/2]$, задается эйлеров обход ребер цикла C_i (маршрут L_i), а затем проверяется четность b_i.

1/ Если b_i нечетно, то в цикле C_i выбирается ребро с минимальным весом. Из оставшихся ребер цикла вдоль маршрута L_i через одно ребро выбираются $\frac{b_i-1}{2}$ ребер с минимальным суммарным весом.

2/ Если b_i четно, то в цикле C_i вдоль маршрута L_i через одно ребро выбираются $b_i/2$ ребер с минимальным суммарным весом.

Четвертый этап заканчивается на l-ом шаге. Множество всех выбранных ребер на четверном этапе образует покрытие K_1. Пусть K – минимальное покрытие графа G, тогда верна следующая теорема.

Т е о р е м а 2. Для всякого исходного графа G вес минимального покрытия K и вес покрытия K_1, полученного с помощью алгоритма A, удовлетворяют соотношению:

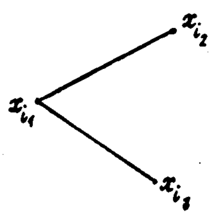
$$\rho(K_1) \leqslant {}^4/_3\,\rho(K). \qquad /7/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть d_0 – вес минимального решения задачи о назначениях для графа $\bar{G}$. Предварительно докажем следующую лемму:

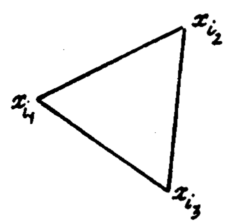
Л е м м а 3. Для всякого исходного графа G вес минимального покрытия $\bar{K}_0$ графа $\bar{G}$ удовлетворяет неравенству:

$$\bar{\rho}(\bar{K}_0) \geqslant ({}^1/_2)\,d_0 \qquad /8/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о: На графе $\bar{G}$ рассмотрим минимальное покрытие $\bar{K}_0$, по которому построим допустимое решение задачи о назначениях для графа $\bar{G}$ следующим образом. Каждой связной компоненте, а они могут быть двух типов:состоять либо из одного ребра, либо из двух ребер, сопоставляется цикл на графе $\bar{G}$, как показано на рис. 5 /а,б/.



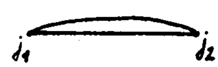
связная компонента покрытия $\bar{K}_0$ графа $\bar{G}$



цикл допустимого решения задачи о назначениях для графа $\bar{G}$

а/

связная компонента покрытия $\bar{K}_0$ графа $\bar{G}$.



цикл допустимого решения задачи о назначении для графа $\bar{G}$

б/

Рис. 5.

Это возможно сделать в силу того, что граф $\bar{G}$ полный, причем из неравенства /1/ следует, что вес полученного допустимого решения задачи о назначениях для графа $\bar{G}$ не превосходит $2\bar{\rho}(\bar{K}_0)$. Следовательно, неравенство /9/ выполнено и лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы:

Из построения покрытия K_1 непосредственно следует справедливость следующего неравенства:

$$\rho(K_1) \leqslant 2/3 \sum_{i=1}^{\ell} \rho(C_i) = 2/3 \sum_{i=1}^{\ell} \bar{\rho}(\bar{C}_i) = 2/3\, d_0 . \qquad /9/$$

Далее, учитывая /8/, /9/ и /2/, получим /7/.

Теорема 2 доказана.

Т е о р е м а 3. Для всякого исходного двудольного графа G вес покрытия K_1 удовлетворяет равенству:

$$\rho(K_1) = \rho(K) . \qquad /10/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Известно, что все циклы C_i, $1 \leqslant i \leqslant \ell \leqslant [n/2]$, в этом случае имеют четную длину (доказательство легко провести индукцией по числу ребер в циклах C_i) . Тогда вес покрытия K_1 удовлетворяет неравенству:

$$\rho(K_1) \leqslant d_0/2 . \qquad /11/$$

Теперь, сопоставляя /11/, /7/ и /2/, получим /10/.

Теорема 3 доказана.

Таким образом, мы обосновали алгоритм А решения ВЗП, который находит приближенное решение с относительным гарантированным уклонением от точного решения не более чем на 1/3 /теорема 2/ и точное решение в классе всех двудольных графов /теорема 3/.

При оценке трудоемкости алгоритма А достаточно заметить, что на каждом из четырех этапов требуется порядка $\sim n^3$ операций или меньше, при этом требуемая память порядка $\sim n^2$ ячеек.

Автор выражает благодарность В.А.Перепелице, под руководством которого была выполнена настоящая работа.

Поступила в ред.-изд.отдел
11 февраля 1975 г.

Л и т е р а т у р а

1. Корбут К., Финкельштейн Ю. Дискретное программирование. М, Наука, 1969.

2. Берж К. Теория графов и ее применение. М., Ил, 1962 г.

3. Диниц Е.А., Кронрод Н.А. Один алгоритм решения задачи о назначениях. Докл. АН СССР, 1969г., т.189, № 1, С.

4. Сердюков А.И. О задаче нахождения минимального эйлерова мультиграфа. В кн.: Управляемые системы, г. Новосибирск, 1974 г., вып. 12.

5. Elmaghraby S. The Theory of networks and management science, p.I. Management science, 1970, v.17, N1.