# ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

О.В.Васильев, А.И.Тятюшкин /Иркутск/

Рассматривается задача поиска оптимального управления в линейной системе Гурса-Дарбу,когда управляющие функции входят как в систему так и в граничные условия, заданные в виде обыкновенных линейных дифференциальных уравнений.

## § 1. Постановка задачи

Пусть на заданном прямоугольнике $\Pi=\{0,T;\,0,S\}$ определен управляемый процесс $x(t,s)\in E^n;\ u(t,s)\in E^m,\ v(t)\in E^l,\ w(s)\in E^r$ вида:

$$x_{ts}(t,s)=D(t,s)x_t(t,s)+C(t,s)x_s(t,s)+A(t,s)x(t,s)+B(t,s)u(t,s)+f(t,s), \quad /1/$$

$$\left.\begin{aligned} x_t(t,0)&=A_1(t)x(t,0)+B_1(t)v(t)+f_1(t), \quad 0\le t\le T,\\ x_s(0,s)&=A_2(s)x(0,s)+B_2(s)w(s)+f_2(s), \quad 0\le s\le S, \end{aligned}\right\} \quad /2/$$

$$x(0,0)=x^0. \quad /3/$$

Здесь $A(t,s)$ , $A_1(t)$ , $A_2(s)$ $(n\times n)$ - матрицы с ограниченными и кусочно-непрерывными по своим аргументам элементами; $B(t,s)$ , $B_1(t)$ , $B_2(s)$ , $f(t,s)$ , $f_1(t)$ , $f_2(s)$ - $(n\times m;$ , $(n\times l)$, $(n\times r)$ , $(n\times 1)$ , $(n\times 1)$ , $(n\times 1)$ - матрицы также с ограниченными и кусочно-непрерывными по своим аргументам элементами; $D(t,s)$ - $(n\times n)$- матрица с ограниченными кусочно-непрерывными по $s$ и кусочно-дифференцируемыми по $t$ элементами; $C(t,s)$ - $(n\times n)$ - матрица с ограниченными кусочно-непрерывными по $t$ и кусочно-дифференцируемыми по $s$ элементами.

Известно [1] , [2] , что задача /1/-/3/ для любых измеримых и ограниченных управлений $u=u(t,s)$, $v=v(t)$, $w=w(s)$ имеет единственное решение в классе абсолютно-непрерывных функций, определенное на всем $\Pi$ .

Предположим, далее, что класс допустимых управлений представляет собой кусочно-непрерывные функции: $u(t,s)$ , $(t,s)\in\Pi$ ; $v(t)$ , $t\in[0,T]$ ; $w(s)$ , $s\in[0,S]$ , стесненные ограничениями

$$u(t,s)\in U_m\subset E^m,\quad v(t)\in U_l\subset E^l,\quad w(s)\in U_r\subset E^r, \quad /4/$$

где

$$U_j=\{V\in E^j : |V_i|\le L,\ \ L>0,\ \ i=\overline{1,j}\}\,.\qquad j=m,l,r.$$

Среди допустимых ( 4 ) требуется найти такие управления

$u^0=u^0(t,s)$, $(t,s)\in\Pi$ $v^0=v^0(t)$, $t\in[0,T]$; $w^0=w^0(s)$, $s\in[0,S]$,

которые доставляют наименьшее значение функционалу

$$I(u,v,w) = \left[\int_0^S \sum_{i=1}^{n} x_i^2(T,s)ds\right]^{1/2}. \qquad /5/$$

Эти управления будем называть оптимальными. Под оптимальными управлениями $u^o$, $v^o$, $w^o$ будем понимать [3 , стр. 56] обобщенные оптимальные управления. т.е. такие последовательности $\{u^i, v^i, w^i\}$, $i=1,2,\ldots$ , для которых $I(u^i, v^i, w^i) \to \inf\limits_{U_m \times U_l \times U_r} I(u,v,w)$. Если в указанном классе допустимых управлений существуют оптимальные управления, то одно из обобщенных оптимальных управлений совпадает с ними.

Задача оптимального управления в системах гиперболического типа /I/ при заданных начальных условиях Гурса рассматривалась довольно часто см., например [4], [5] . В работе [5] при определенных предположениях было получено необходимое условие оптимальности в случае, когда граничные условия "управляемые". Там же подчеркнута практическая значимость этой задачи. Однако, как показывает опыт, редукция поставленной задачи к краевой с помощью необходимых условий оптимальности, особенно в уравнениях с распределенными параметрами, не приносит желаемого успеха при численном решении. Здесь в еще большей степени, чем в двухточечных краевых задачах для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, сказывается и вычислительная неустойчивость и особенно отсутствие способов указания первого приближения. В поставленной задаче можно также по известным схемам [6], [7] вычислить градиент функционала и организовать градиентный спуск в функциональных пространствах. При таком способе решения задачи /I/-/5/ реализация итерационного процесса по меньшей мере требует запоминания $m$ управляющих функций на двухпараметрической сетке и $l+r$ управлений на однопараметрической сетке.

В данной работе решение задачи /I/-/5/ сводится к максимизации выпуклого функционала $\lambda[l, g]$ , определенного на $n$ - мерных функциях $g = g(s)$ одной переменной $s \in [0, S]$ . Этот результат уже позволяет более экономно организовать вычислительную процедуру на ЭВМ по сравнению с градиентными методами. Дополнительные исследования функционала $\lambda(l, g)$ позволяют также указать алгоритм отыскания оптимального управления в одном "нерегулярном" случае, когда значение функционала /5/ оказывается равным нулю на "внутренних" управлениях к классу допустимых.

Такая редукция поставленной задачи оказалась возможной при применении к ней теоремы о минимаксе. Для задач оптимального управления с терминальным функционалом в обыкновенных системах теорема о минимаксе впервые применена в работе [8] , для интегрального показателя качества - в работе [9] .

§ 2. Множество достижимости

По аналогии с методом [10] найдем интегральную форму решения задачи /I/-/3/ при заданных управлениях. Если $(n \times n)$ - матрицы $X(t,\tau)$ , $Y(s,\xi)$ , удовлетворяют матричным уравнениям:

$$\left.\begin{aligned} X_\tau(t,\tau) &= -X(t,\tau)A_1(\tau), \quad t \quad \tau, \\ Y_\xi(s,\xi) &= -Y(s,\xi)A_2(\xi), \quad s \quad \xi, \end{aligned}\right\} \qquad /6/$$

$X(t,t)=Y(s,s)=E$ – единичная матрица, то граничные условия /2/-/3/ представимы по формуле Коши

$$\left.\begin{aligned} x(t,0) &= X(t,0)x^0 + \int_0^t X(t,\tau)\,[B_1(\tau)v(\tau)+f_1(\tau)]\,d\tau, \\ x(0,s) &= Y(s,0)\,x^0 + \int_0^s Y(s,\xi)\,[B_2(\xi)w(\xi)+f_2(\xi)]\,d\xi \end{aligned}\right\} \qquad /7/$$

Пусть $V(t,s,\tau,\xi)$, $t\geq\tau$, $s\geq\xi$, – некоторая $(n\times n)$- матричная функция. Умножим на нее уравнение /I/ и проинтегрируем обе части уравнения по $\tau$ и $\xi$ от 0 до $t$ и от 0 до $s$ соответственно. Затем применим правило интегрирования по частям к слагаемым, содержащим частные производные от $x(t,s)$, и подчиним $V(t,s,\tau,\xi)$ матричным уравнениям:

$$\begin{aligned} V_{\tau\xi}(t,s,\tau,\xi) = -[V(t,s,\tau,\xi)D(\tau,\xi)]_\tau - \\ -[V(t,s,\tau,\xi)C(\tau,\xi)]_\xi + V(t,s,\tau,\xi)A(\tau,\xi). \end{aligned} \qquad /8/$$

$$\left.\begin{aligned} V_\tau(t,s,\tau,s) &= -V(t,s,\tau,s)C(\tau,s), \\ V_\xi(t,s,t,\xi) &= -V(t,s,t,\xi)D(t,\xi), \\ V(t,s,t,s) &= I \end{aligned}\right\} \qquad /9/$$

В результате получим

$$\begin{aligned} x(t,s) = V(t,s,0,0)x^0 + \int_0^t V(t,s,\tau,0)\,[x_\tau(\tau,0) - \\ - C(\tau,0)x(\tau,0)]\,d\tau + \int_0^s V(t,s,0,\xi)\,[x_\xi(0,\xi) - D(0,\xi)x(0,\xi)]\,d\xi + \\ + \int_0^t\int_0^s V(t,s,\tau,\xi)\,[B(\tau,\xi)\,u(\tau,\xi) + f(\tau,\xi)]\,d\xi\,d\tau. \end{aligned}$$

Далее подставив решения /7/ в формулу /10/, подсчитаем ее при $t=T$. После простейших преобразований будем иметь

$$x(T,s) = x(T,s,0) + \Theta v + \Gamma w + F u, \qquad /11/$$

где

$$\Theta_v = \int_0^T V(T,s,t,0)\left\{[A_1(t)-C(t,0)]\int_0^t X(t,\tau)B_1(\tau)v(\tau)d\tau + B_1(t)v(t)\right\}dt,$$

$$\Gamma_w = \int_0^s V(T,s,0,\xi)\left\{[A_2(\xi)-D(0,\xi)]\int_0^\xi Y(\xi,\gamma)B_2(\gamma)w(\gamma)d\gamma + B_2(\xi)w(\xi)\right\}d\xi,$$

$$F_u = \int_0^T\int_0^s V(T,s,t,\xi)\,B(t,\xi)\,u(t,\xi)\,d\xi\,dt,$$

$x(T,s,0)$ – решение системы /I/-/3/ в $t=T$ при $u(t,s)\equiv 0$, $v(t)\equiv 0$, $w(s)\equiv 0$. (Ее вид мы выписывать не будем). Далее будем считать, что $x(T,\cdot)=x(T,s)$, $s\in[0,S]$, принадлежит Гильбертову пространству $L_2^n[0,S]$, что не противоречит указанному классу решений системы /I/-/3/. В $L_2^n[0,S]$ введем множество достижимости

$$R = \{x(T,\cdot) : x(T,\cdot) = x(T,\cdot,0) + \Theta v + \Gamma w + F u,$$
$$u(t,s)\in U_m,\ v(t)\in U_1,\ w(s)\in U_2\}.$$

В силу /II/ и /4/, множество $R$ выпукло и ограничено. Если класс допустимых управлений дополнить измеримыми управлениями, то по теореме Арцела множество $R$ компактно.

§ 3. Линейная вспомогательная задача.

Для упрощения записи в дальнейшем введем следующие обозначения. Пусть для произвольных функций $a(\cdot,\cdot) = a(t,s)$, $(t,s) \in \Pi$, $a(t,s) \in E^n$; $b(\cdot,\cdot) = b(t,s)$; $(t,s) \in \Pi$, $b(t,s) \in E^n$,

$$(a(\cdot,\cdot),\, b(\cdot,\cdot))_\Pi = \int_0^T \int_0^S a'(t,s)\, b(t,s)\, dt\, ds,$$

$$(a(t,\cdot),\, b(t,\cdot))_{[0,S]} = \int_0^S a'(t,s)\, b(t,s)\, ds,$$

$$(a(\cdot,s),\, b(\cdot,s))_{[0,T]} = \int_0^T a'(t,s)\, b(t,s)\, dt,$$

$(')$ - означает транспонирование вектора.

Теперь для произвольного $g(\cdot) \in L^n_{2[0,S]}$ определим вспомогательный функционал

$$I_g(u, v, w) = (g(\cdot),\, x(T,\cdot))_{[0,S]} \qquad /12/$$

и поставим задачу поиска таких управлений $u_g(t,s) \in U_m$, $v_g(t) \in U_\ell$, $w_g(s) \in U_\tau$, которые доставляют функционалу /12/ на решениях системы /1/-/3/ наименьшее значение. С учетом /11/ эта линейная вспомогательная задача имеет вид:

$$I_g(u_g, v_g, w_g) = \min_{x(T,\cdot) \in R} (g(\cdot),\, x(T,\cdot))_{[0,S]} =$$

$$= (g(\cdot),\, x(T,\cdot,0))_{[0,S]} + \min_{v(t) \in U} (g(\cdot),\, \theta v)_{[0,S]} +$$

$$+ \min_{w(s) \in U_\tau} (g(\cdot),\, \Gamma w)_{[0,S]} + \min_{u(t,s) \in U_m} (g(\cdot),\, Fu)_{[0,S]}. \qquad /13/$$

Таким образом для ее решения необходимо решить три задачи, стоящие в правой части /13/. Рассмотрим решение этих задач. Нетрудно проверить, что

$$(g(\cdot),\, Fu)_{[0,S]} = (F^* g,\, u(\cdot,\cdot))_\Pi ,$$

где

$$F^* g(t,s) = B'(t,s) \int_s^S V'(T,\xi,t,s)\, g(\xi)\, d\xi .$$

Тогда в силу специфики класса допустимых $(u(\cdot,\cdot) \in L^m_{\infty\Pi})$

$$\min_{u(t,s) \in U_m} (g(\cdot),\, Fu)_{[0,S]} = \min_{u(t,s) \in U_m} (F^* g,\, u(\cdot,\cdot))_\Pi =$$

$$= -L(F^* g,\, \operatorname{sign} F^* g)_\Pi = -L\, \|F^* g\|_{L^m_{1\Pi}} ,$$

$$u_g(L,t,s) = -L \operatorname{sign} F^* g(t,s).$$

Для упрощения вычисления управления $u_g(t,s)$ введем вектор-функцию

$$\psi(t,s) = \int_s^S V(T,\xi,t,s)\, g(\xi)\, d\xi, \quad \psi(t,s) \in E^n, \qquad /14/$$

и найдем уравнение для нее подобно тому, как это делается в обыкновенных дифференциальных уравнениях [3 , стр.82]. В силу справедливости уравнений /8/,/9/ матричная функция $V'(T,\xi,t,s)$ удовлетворяет уравнениям:

$$V'_{ts}(T,\xi,t,s) = [\mathcal{D}'(t,s)V'(T,\xi,t,s)]_t - [C'(t,s)V'(T,\xi,t,s)]_s + A'(t,s)V'(T,\xi,t,s), \qquad /15/$$

$$V'_t(T,\xi,t,\xi) = -C'(t,\xi)V'(T,\xi,t,\xi), \qquad /16/$$

$$V'_s(T,\xi,T,s) = -\mathcal{D}'(T,s)V'(T,\xi,T,s). \qquad /17/$$

Из равенства /14/ следует, что

$$\left.\begin{aligned} \psi_s(t,s) &= \int_s^S V'_s(T,\xi,t,s)g(\xi)d\xi - V'(T,s,t,s)g(s) \\ \psi_{ts}(t,s) &= \int_s^S V'_{ts}(T,\xi,t,s)g(\xi)d\xi - V'_t(T,s,t,s)g(s), \\ \psi_t(t,s) &= \int_s^S V'_t(T,\xi,t,s)g(\xi)d\xi. \end{aligned}\right\} \qquad /18/$$

В силу соотношений /15/-/17/ и /14/ выражения /18/ приводятся к виду:

$$\psi_{ts}(t,s) = A'(t,s)\psi(t,s) - [\mathcal{D}'(t,s)\psi(t,s)]_t - [C'(t,s)\psi(t,s)]_s, \qquad /19/$$

$$\psi_s(T,s) = -\mathcal{D}'(T,s)\psi(T,s) - g(s), \quad 0\le s\le S, \qquad /20/$$

$$\psi(t,S) \equiv 0, \qquad 0\le t\le T. \qquad /21/$$

Для заданного $g(s)\not\equiv 0$, $0\le s\le S$, решение задачи /19/-/21/ не тривиально, существует и единственно на прямоугольнике $\Pi$. Тогда

$$u_g(L,t,s) = -L\,\mathrm{sign}\,B'(t,s)\psi(t,s), \qquad /22/$$

и для получения этого управления необходимо при заданном $g=g(s)$ решить сопряженную задачу /19/-/21/.

Далее перейдем к отысканию оптимальных управлений на границах прямоугольника $\Pi$. Сделав несложные выкладки, можно убедиться, что

$$(g(\cdot),\Theta v)_{[0,S]} = (\Theta^* g, v(\cdot))_{[0,T]},$$

где

$$\Theta^* g(t) = B_1'(t)\Big\{\int_t^T X'(\tau,t)\,[A_1(\tau)-C(\tau,0)]'\int_0^S V'(T,s,\tau,0)g(s)ds + \int_0^S V'(T,s,t,0)g(s)ds\Big\}.$$

Действительно,

$$(g(\cdot),\Theta v)_{[0,S]} = \int_0^S g(s)'\Big[\int_0^T V(T,s,t,0)\Big\{[A_1(t)-C(t,0)]\times$$
$$\times\int_0^t X(t,\tau)B_1(\tau)v(\tau)d\tau + B_1(t)v(t)\Big\}dt\Big]ds =$$
$$= \int_0^T\Big[B_1'(t)\int_0^S V'(T,s,t,0)g(s)ds\Big]'v(t)dt + \int_0^T\Big\{B_1'(\tau)\int_\tau^T X'(t,\tau)\times$$
$$\times[A_1(t)-C(t,0)]'\int_0^S V'(T,s,t,0)g(s)ds\,dt\Big\}'v(\tau)d\tau.$$

Тогда

$$\min_{v(t)\in V_1}(g(\cdot),\Theta v)_{[0,S]}=\min_{v(t)\in V_1}(\Theta^*g,v(\cdot))_{[0,T]}=-L(\Theta^*g,\operatorname{sign}\Theta^*g)_{[0,T]}=-L\,\|\Theta^*g\|_{L_1^{\,l}[0,T]},$$

$$v_g(L,t)=-L\operatorname{sign}\Theta^*g(t).$$

Для упрощения вычислений введем вектор-функцию

$$p(t)=\int_t^T X'(\tau,t)[A_1(\tau)-C(\tau,0)]'\int_0^S V'(T,s,\tau,0)g(s)\,ds\,d\tau+$$

$$+\int_0^S V'(T,s,t,0)g(s)\,ds,\qquad p(t)\in E^n. \qquad /23/$$

В силу соотношений /6/, /16/

$$p_t(t)=-A_1'(t)\int_0^S V'(T,s,t,0)g(s)\,ds-$$

$$-A_1'(t)\int_t^T X'(\tau,t)[A_1(\tau)-C(\tau,0)]'\int_0^S V'(T,s,\tau,0)g(s)\,ds\,d\tau,$$

$$p(T)=\int_0^S V'(T,s,T,0)g(s)\,ds.$$

Отсюда, учитывая формулы /14/, /23/, получаем уравнения для определения вектор-функции $p(t)$ следующего вида:

$$\left.\begin{aligned} p_t(t)&=-A_1'(t)p(t),\\ p(T)&=\psi(T,0)\end{aligned}\right\} \qquad /24/$$

Таким образом,

$$v_g(L,t)=-L\operatorname{sign}B_1'(t)p(t), \qquad /25/$$

и зная значение $\psi(T,0)$ из решения системы /20/ при заданном $g(s)$, для вычисления этого управления нужно, решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений /24/. Аналогично предыдущему можно получить, что

$$(g(\cdot),\Gamma w)_{[0,S]}=(\Gamma^*g,w(\cdot))_{[0,S]},$$

где

$$\Gamma^*g(s)=B_2'(s)\Big\{\int_s^S Y'(\xi,s)[A_2(\xi)-D(0,\xi)]'\,\times$$

$$\times\int_\xi^S V'(T,\gamma,0,\xi)g(\gamma)\,d\gamma\,d\xi+\int_s^S V'(T,\xi,0,s)g(\xi)\,d\xi\Big\}.$$

Тогда

$$\min_{w(s)\in V_2}(g(\cdot),\Gamma w)_{[0,S]}=-L(\Gamma^*g,\operatorname{sign}\Gamma^*g)_{[0,S]}=-L\,\|\Gamma^*g\|_{L_1^{\,r}[0,S]},$$

$$w_g(L,s)=-L\operatorname{sign}\Gamma^*g(s).$$

Опять для упрощения вычислений введем вектор-функцию

$$q(s)=\int_s^S Y'(\xi,s)[A_2(\xi)-D(0,\xi)]'\int_\xi^S V'(T,\gamma,0,\xi)g(\gamma)\,d\gamma\,d\xi+$$

$$+\int_s^S V'(T,\xi,0,s)g(\xi)\,d\xi,\qquad q(s)\in E^n.$$

Дифференцируя это равенство по $s$ и учитывая соотношения /6/, /17/, получаем

$$q_s(s)=-A_2'(s)q(s)-V'(T,s,0,s)g(s),\qquad q(S)=0.$$

Далее, пусть

$$\eta(t,s) = V'(T,s,t,s)g(s), \quad \eta(t) \in E^n.$$

Тогда, приняв во внимание равенство /16/, для нахождения $\eta(0,s)$ при заданном $g(s)$, $0 < s < S$, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &\eta_t(t,s) = -C'(t,s)\eta(t,s), \\ &\eta(T,s) = g(s). \end{aligned}\right\} \qquad /26/$$

Отсюда для нахождения $g(s)$ нужно найти $\eta(0,s)$, решив систему /26/, и далее решать систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left.\begin{aligned} &g_s(s) = -A_2'(s)g(s) - \eta(0,s), \\ &g(S) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad /27/$$

После этого нетрудно вычислить

$$w_g(l,s) = -l\,\mathrm{sign}\,B_2'(s)g(s). \qquad /28/$$

Таким образом, на однозначно вычисленных управлениях /22/, /25/, /28/ линейный функционал /12/ достигает своего наименьшего значения, причем

$$I_g(u_g, v_g, w_g) = (g(\cdot), x(T,\cdot,0))_{[0,S]} - l(\|F_g^*\| + \|\theta_g^*\| + \|\Gamma_g^*\|).$$

## § 4. Метод решения

Пусть

$$\lambda(l,g) = (g(\cdot), x(T,\cdot,0))_{[0,S]} - l(\|F_g^*\| + \|\theta_g^*\| + \|\Gamma_g^*\|). \qquad /29/$$

Если $x(l,g,T,\cdot) = x(l,g,T,s)$, $s \in [0,S]$, - решение задачи /1/-/3/ при управлениях, выбираемых по формулам /22/, /25/, /28/, то

$$\lambda(l,g) = (g(\cdot), x(l,g,T,\cdot))_{[0,S]}.$$

Так как исследуемый функционал /5/ имеет вид нормы $\|x(T,\cdot)\|$ в пространстве $L_2^n[0,S]$, то по определению нормы линейного функционала

$$\|x(T,\cdot)\| = \max_{\|g(\cdot)\| \le 1} (g(\cdot), x(T,\cdot))_{[0,S]}.$$

Тогда согласно теореме о минимаксе

$$\min_{\substack{u(t,s) \in U_m \\ v(t) \in U_l \\ w(s) \in U_2}} I(u,v,w) = \min_{x(T,\cdot) \in R} \max_{\|g(\cdot)\| \le 1} (g(\cdot), x(T,\cdot)) =$$

$$= \max_{\|g(\cdot)\| \le 1} \min_{x(T,\cdot) \in R} (g(\cdot), x(T,\cdot)) = \max_{\|g(\cdot)\| \le 1} \lambda(l,g). \qquad /30/$$

Отметим некоторые свойства функционала $\lambda(l,g)$.

Л е м м а 1. При фиксированном $l$ точная верхняя грань значений $\lambda(l,g)$ достигается на границе шара $\|g(\cdot)\| \le 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное: пусть

$$\max_{\|g(\cdot)\| \le 1} \lambda(l,g) = \lambda(l,g^0), \quad \|g^0\| < 1.$$

Тогда для элемента $\bar{g}=\alpha g^{o}$, $\alpha=\frac{1}{\|g^{o}\|}>1$, имеем

$$\lambda(l,\bar{g})=\alpha\lambda(l,g^{o})>\lambda(l,g^{o}),\quad \|\bar{g}\|=1.$$

Из полученного противоречия вытекает справедливость леммы.

Л е м м а 2. При фиксированном $l$ функционал $\lambda(l,g)$ вогнут по $g$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольных $g^{1}=g^{1}(\cdot)\in L_{2}^{n}[0,S]$, $g^{2}=g^{2}(\cdot)\in L_{2}^{n}[0,S]$ и элемента $\bar{g}=\alpha g^{1}+(1-\alpha)g^{2}$, $0<\alpha<1$, имеем

$$\lambda(l,\bar{g})=(\alpha g^{1}(\cdot)+(1-\alpha)g^{2},$$

$$x(T,\cdot,0))-l\left\{\|F^{*}[\alpha g^{1}+(1-\alpha)g^{2}]\|-\|\theta^{*}[\alpha g^{1}+(1-\alpha)g^{2}]\|+\|\Gamma^{*}[\alpha g^{1}+(1-\alpha)g^{2}]\|\right\}\geq$$

$$\geq\alpha\left\{(g^{1}(\cdot),x(T,\cdot,0))-l\left[\|F^{*}g^{1}\|+\|\theta^{*}g^{1}\|+\|\Gamma^{*}g^{1}\|\right]\right\}+(1-\alpha)\left\{(g^{2}(\cdot),x(T,\cdot,0))-l\left[\|F^{*}g^{2}\|+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\|\theta^{*}g^{2}\|+\|\Gamma^{*}g^{2}\|\right]\right\}=\alpha\lambda(l,g^{1})+(1-\alpha)\lambda(l,g^{2}).$$

Лемма доказана.

Л е м м а 3. Если множество $R$ строго выпукло, то функционал $\lambda(l,g)$ дифференцируем по $g$ и

$$\operatorname{grad}\lambda(l,g)=x(l,g,T,\cdot).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $g=g(\cdot)$ и $\bar{g}=\bar{g}(\cdot)$ - произвольные элементы пространства $L_{2}^{n}[0,S]$. Тогда при $\alpha>0$

$$\lambda(l,g+\alpha\bar{g})-\lambda(l,g)=(g(\cdot)+\alpha\bar{g}(\cdot),\ x(l,g+\alpha\bar{g},T,\cdot))-(g(\cdot),\ x(l,g,T,\cdot))\geq$$

$$\geq(g(\cdot)+\alpha\bar{g}(\cdot),\ x(l,g+\alpha\bar{g},T,\cdot))-(g(\cdot),x(l,g+\alpha\bar{g},T,\cdot))=\alpha(\bar{g}(\cdot),x(l,g+\alpha\bar{g},T,\cdot)).$$

С другой стороны,

$$\lambda(l,g+\alpha\bar{g})-\lambda(l,g)=(g(\cdot)+\alpha\bar{g}(\cdot),\ x(l,g+\alpha\bar{g},T,\cdot))-(g(\cdot),\ x(l,g,T,\cdot))\leq$$

$$\leq(g(\cdot)+\alpha\bar{g}(\cdot),\ x(l,g,T,\cdot))-(g(\cdot),x(l,g,T,\cdot))=\alpha(\bar{g}(\cdot),\ x(l,g,T,\cdot)).$$

Из полученных неравенств следует

$$(\bar{g}(\cdot),x(l,g+\alpha\bar{g},T,\cdot))\leq\frac{\lambda(l,g+\alpha\bar{g})-\lambda(l,g)}{\alpha}\leq(\bar{g}(\cdot),\ x(l,g,T,\cdot)).$$

В силу предположения о строгой выпуклости множества $R$

$$x(l,g+\alpha\bar{g},T,\cdot)\to x(l,g,T,\cdot)\qquad \alpha\to 0.$$

Следовательно,

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\lambda(l,g+\alpha\bar{g})-\lambda(l,g)}{\alpha}=(\bar{g}(\cdot),\ x(l,g,T,\cdot)).$$

Отсюда

$$\operatorname{grad}\lambda(l,g)=x(l,g,T,\cdot).$$

Лемма доказана.

Л е м м а 4. При фиксированном $g$ функционал $\lambda(l,g)$ линейно убывает по $l$, причем для заданных $g(\cdot)$, $l>0$ и вычисленного $\lambda(l,g)$, $\lambda(l_{1},g)=0$ тогда и только тогда, когда

$$l_{1}=\frac{\lambda(0,g)}{\lambda(0,g)-\lambda(l,g)}\,l. \qquad /31/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение леммы следует непосредственно из формулы /29/. Докажем второе утверждение. Пусть заданы $l>0$, $g=g(\cdot)$ и вычислено соответствующее значение функционала $\lambda(L,g)$ . Тогда из формулы /29/, представленной в виде

$$\lambda(L,g) = \lambda(0,g)+L\left[\|F^*g\| + \|\theta^*g\|+\|\Gamma^*g\|\right];$$

имеем

$$\|F^*g\| + \|\theta^*g\|+\|F^*g\| = \frac{\lambda(L,g)-\lambda(0,g)}{L}.$$

Из условия $\lambda(L_1,g)=0$ следует

$$L_1 = \frac{\lambda(0,g)}{\|F^*g\|+\|\theta^*g\|+\|\Gamma^*g\|} = L\,\frac{\lambda(0,g)}{\lambda(0,g)-\lambda(L,g)}.$$

С другой стороны, если

$$L_1 = L\,\frac{\lambda(0,g)}{\lambda(0,g)-\lambda(L,g)},$$

то

$$\lambda(L_1,g)=\lambda(0,g)-L\,\frac{\lambda(0,g)}{\lambda(0,g)-\lambda(L,g)}\left[\|F^*g\|+\|\theta^*g\|+\|\Gamma^*g\|\right]=\lambda(0,g)+L\,\frac{\lambda(0,g)[\lambda(L,g)-\lambda(0,g)]}{(\lambda(0,g)-\lambda(L,g))L}=0.$$

Лемма доказана.

Т е о р е м а I. Если множество $G(L)=\{g:\lambda(L,g)>0\}$ непусто,то

$$\min_{\substack{u(t,s)\in U_m\\ v(t)\in U_l\\ w(s)\in U_r}} I(u,v,w) = \max_{\|g(\cdot)\|=1} \lambda(L,g) = \lambda(L,g^0). \qquad /32/$$

Оптимальное управление:

$$u^0(t,s)=u_{g^0}(L,t,s),\quad v^0(t)=v_{g^0}(L,t),\quad w^0(s)=w_{g^0}(L,s).$$

Если же множество $G(L)$ пусто, то существует такое $\bar L, 0\le \bar L\le L$, и такое $\bar g(\cdot)$ , что $x(\bar L,\bar g,T,\cdot)\equiv 0$ , т.е. управление

$$u^0(t,s)=u_{\bar g}(\bar L,t,s),\quad v^0(t)=v_{\bar g}(\bar L,t),\quad w^0(s)=w_{\bar g}(\bar L,s)$$

оптимально.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Первое утверждение теоремы следует из соотношения /30/ и из лемм I,2. Справедливость второго утверждения теоремы основывается на соотношении /30/ и лемме 4. Действительно, если управление $u(t,s)\equiv 0$ неоптимально (тривиальный случай), то существует $g(\cdot)$, для которого $\lambda(0,g)>0$, например, $g(\cdot)=F(\cdot)$ . Тогда на основании леммы 4 существует и верхний предел $L$, $0<L<L$ , для которого справедливо /32/.

Теорема доказана.

По теореме I, для отыскания оптимального управления в поставленной задаче необходимо найти экстремаль функционала $\lambda(L,g)$. Это можно сделать, например, реализуя следующую градиентную процедуру:

$$\left.\begin{aligned} &g^{K+1}(\cdot)=\frac{\bar g^{K+1}(\cdot)}{\|\bar g^{K+1}(\cdot)\|},\quad \bar g^{K+1}(\cdot)=g^K(\cdot)+\alpha_K\,\mathrm{grad}\,\lambda(L,g^K),\\ &\alpha_K:\lambda(L,g^K+\alpha_K\,\mathrm{grad}\,\lambda(L,g^K))=\max_{0\le\alpha\le\infty}\lambda(L,g^K+\alpha\,\mathrm{grad}\,\lambda(L,g^K))\end{aligned}\right\} \qquad /33/$$

Для выбора первого приближения в области $G(L)$ предлагается следующий алгоритм. Пусть $g^1(\cdot)=x(T,\cdot,0)$. Если $\lambda(L,g^1)<0$, то по формуле /31/ при $g(\cdot)=g^1(\cdot)$ находим $0<L_1<L$, при котором $\lambda(L_1,g^1)=0$. Реализация итерационной процедуры /33/ при $L=L_1$ позволит найти такое $g^2(\cdot)$, что $\lambda(L_1,g^2)>0$. Далее по формуле /31/ при $g(\cdot)=g^2(\cdot)$, $L=L_1$ вычислим $L_2>L_1$, при котором $\lambda(L_2,g^2)=0$. Если $L_2>L$, то $g^2(\cdot)\in G(L)$, если же $L_2<L$, то формулам /33/ ищем $g^3(\cdot)$, для которого $\lambda(L_2,g^3)>0$. Таким образом, продолжая этот процесс, получаем последовательность чисел $L_1<L_2<\ldots$, для которой характерно, что либо на каком-то $p$-м шаге $L_p>L$, либо эта последовательность стремится к $\bar{L}\leq L$. В первом случае $g^p(\cdot)\in G(L)$, во втором

$$\max_{\|g\|=1}\lambda(\bar{L},g)=\lambda(\bar{L},\bar{g})=0,$$

ибо в противном случае можно было бы продолжить процесс. Здесь $\bar{L}$ есть минимально возможное ограничение на управление, при котором может быть достигнуто нулевое значение функционала /5/, а время $T$, очевидно, является временем быстродействия рассматриваемого процесса при ограничениях $|u_j(t,s)|\leq\bar{L}$, $j=\overline{1,m}$; $|v_j(t)|\leq\bar{L}$, $j=\overline{1,l}$; $|w_j(s)|\leq\bar{L}$, $j=\overline{1,t}$.

## § 5. Реализация на ЭВМ. Пример

Наиболее трудоемкой операцией в изложенном алгоритме является операция вычисления значения функционала $\lambda(L,g)$ по заданному $g=g(s)$, $s\in[0,S]$. Рассмотрим один из возможных вариантов выполнения этой операции.

1) Система /20/ интегрируется при $t=T$ от $s=S$ до $s=0$. На каждом шаге интегрирования запоминаются значения $z(s)=\varphi(T,s)$.

2) Системы /19/, /24/ интегрируются от $t=T$ до $t=0$. При каждом значении $t$ массив $z(s)$ обновляется: $z(s)=\psi(t,s)$. По формуле /25/ вычисляется управление $v(t)$, и моменты, в которых это управление меняет знак, запоминаются.

3) Интегрируется система /27/ от $s=S$ до $s=0$. Для этого при каждом фиксированном $s$ интегрируется система /26/ от $t=T$ до $t=0$. По формуле /28/ на каждом шаге по $s$ определяется управление $v(s)$, и точки его переключения запоминаются.

4) От $s=0$ до $s=S$ интегрируется система уравнений, определяющая состояние процесса при $t=0$: $y(s)=x(0,s)$. В процессе этого интегрирования используется управление $w(s)$, знак которого меняется в ранее запомненных точках переключения.

5) От $t=0$ до $t=T$ одновременно интегрируются системы /1/ и /19/. На каждом шаге по $t$ решения этих систем запоминаются соответственно в массивах $y(s)$ и $z(s)$; управление $u(t,s)$ вычисляется по формуле /22/, а граничные значения $x(t,0)$ получаются в результате интегрирования первого из уравнений /2/. Для определения

знака управления $v(t)$ используются ранее запомненные точки переключения.

6) При $t=T$ вычисляется значение функционала

$$\lambda(l,g) = \int_0^S g'(s)y(s)ds.$$

При численном решении задачи /I/-/5/ значение функционала $\lambda(l,g)$ будет вычисляться в итерациях и, следовательно,, системы /I/,/2/, /I9/,/20/,/24/,/27/ будут многократно интегрироваться при различных значениях $l$ и $g(s)$ .

Поэтому разностная схема численного интегрирования этих систем должна быть, с одной стороны, достаточно устойчивой, а с другой экономичной(в смысле затрачиваемого времени для получения решения с заданной точностью) .

С этой точки зрения наиболее работоспособными на практике оказываются неявные схемы численного интегрирования. В качестве иллюстрации применения неявной схемы к рассматриваемым выше задачам выведем, например, формулу для интегрирования системы /I/ при заданном управлении $u=u(t,s)$ и при известных граничных условиях $x(l,0)$, $x(0,s)$.

Пусть $x(t,s)=x_{ij}$ , $x(t+\tau, s+h)-x_{i+1,j+1}$ , $x(t+\tau, s) = x_{i+1,j}$ , $x(t,s+h)= x_{i,j+1}$ , $\tau/h < 1$ . Аналогично обозначим и коэффициенты системы /I/. Тогда разностный аналог системы /I/ имеет вид:

$$\frac{1}{\tau h}(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1}-x_{i+1,j}+x_{ij}) = \frac{1}{\tau}\mathcal{D}_{i+1,j+1}(x_{i+1,j+1}-x_{i,j+1})+$$
$$+\frac{1}{h}C_{i+1,j+1}(x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j}) + A_{i+1,j+1}x_{i+1,j+1}+B_{i+1,j+1}u_{i+1,j+1}+f_{i+1,j+1}.$$

Полученную систему линейных алгебраических уравнений разрешим относительно вектора неизвестных $x_{i+1,j+1}$ .

$$[E-h\mathcal{D}_{i+1,j+1}-\tau C_{i+1,j+1}-\tau h A_{i+1,j+1}]x_{i+1,j+1} = [E-h\mathcal{D}_{i+1j+1}]x_{i,j+1}+$$
$$+[E-\tau C_{i+1,j+1}]x_{i+1,j} - x_{ij} + [B_{i+1,j+1}+u_{i+1,j+1}+f_{i+1,j+1}]\tau h.$$

Пусть $z = E-h\mathcal{D}_{i+1,j+1}-\tau C_{i+1,j+1}-\tau h A_{i+1,j+1}$ .

Тогда
$$x_{i+1,j+1} = z^{-1}\{[E-h\mathcal{D}_{i+1,j+1}]x_{i,j+1}+$$
$$+[E-\tau C_{i+1,j+1}]x_{i+1,j}-x_{ij}+[B_{i+1,j+1}u_{i+1j+1}+f_{i+1,j+1}]\tau h. \quad /34/$$

Полученная формула обеспечивает достаточную точность только при малых $\tau$ и $h$ , что существенно сказывается на длительности расчетов. Для ускорения процесса интегрирования можно применить "принцип Рунге":

$$x(t,s) = 2x^1(t,s)-x^2(t,s),$$

где $x^1(t,s)$ - решение системы с шагами $\tau$ и $h$ , $x^2(t,s)$ - с шагами $2\tau$ и $2h$ . Применение этого "принципа" позволяет обеспечить необходимую точность вычислений со значительно большим шагом интегрирования.

В заключение приведем пример, иллюстрирующий метод. Пример решен на ЭВМ "БЭСМ-6".

Пример

$$x^1_{ts}(t,s) = x^1_t(t,s) - x^1_s(t,s) + u(t,s) - 1,$$
$$x^2_{ts}(t,s) = t(s-1)x^1(t,s) + u(t,s),$$
$$x^1_t(t,0) = x^2(t,0),\quad x^2_t(t,0) = v(t),$$
$$x^1_s(0,s) = w^1(s) + 1 - 2s,\quad x^2_s(0,s) = w^2(s) + 2s - 1,$$
$$|v(t)| \le 1,\ 0 \le t \le s,\ |u(t,s)| \le 1,\ (t,s) \in \Pi\ \{0,1;0,1\},\quad |w^i(s)| \le s,\ i=1,2,\ 0 \le s \le 1,$$
$$I(u,v,w) = \sqrt{\int_0^1 \sum_{i=1}^{2} (x^i(T,s))^2 ds}.$$

Для численного интегрирования систем применялась неявная схема /34/ с шагами: $\tau = 0{,}01$ , $h = 0{,}02$ . Нулевое значение функционала в данной задаче достигается на управлениях, "внутренних" к заданному классу допустимых. Процесс решения отображен в следующей таблице,

| $k$ | $L_k$ | $\lambda(L_k, g^k)$ | $I(u_{gk}(L_k))$ |
|---|---|---|---|
| I | I | -I,I70 | I,664 |
| 2 | 0,289 | 0,I87I | 0,3I6 |
| 3 | 0,596 | 0,0I05 | 0,299 |
| 4 | 0,6I4 | 0,00I7 | 2,289 |
| 5 | 0,6I6 | 0,00II | 0,I77 |
| 6 | 0,6I7 | 0,0005 | 0,I43 |

В результате были получены близкие к оптимальным управления следующего вида:

$$u^0(t,s) \equiv 0{\cdot}617,\quad t \in \Pi;\quad v^0(t) \equiv 0{\cdot}617,\quad t \in [0,1]\cdot$$
$$w^0_1(s) \equiv 0{\cdot}617,\quad s \in [0,1];\quad w_2(s) = \begin{cases} -0{\cdot}617, & 0 \le s < 2{\cdot}8 \\ +0{\cdot}617, & 2{\cdot}8 \le s \le 1 \end{cases}$$

Поступила в ред.-изд.отдел
9 декабря 1974 г.

Литература


I. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.,Гостехиздат, 1953.

2. Плотников В.И., Сумин В.И. Проблемы устойчивости нелинейных систем Гурса-Дарбу.-"Дифференциальные уравнения", 1972, т.8,№ 5, 845-856.

3. Габасов Р.Ф.,Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем.Минск, Изд-во БГУ им.В.И.Ленина, 1973.

4. Егоров А.И. Об оптимальном управлении процессами в распреде-

ленных объектах.-"Прикладная математика и механика", 1963, т.4, 688-696.

5. Егоров А.И. Об оптимальных процессах в системах, содержащих объекты с распределенными параметрами.-"Автоматика и телемеханика", 1965, т.26, № 7, 1188-1196.

6. Демьянов В.Ф.,Рубинов А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач, Л.,Изд-во ЛГУ, 1968.

7. Васильев Ф.П. Лекции по методам решения экстремальных задач. М., Изд-во МГУ, 1974.

8. Габасов Р.Ф., Гиндес В.Б. К оптимальным процессам в линейных системах с двумя ограничениями на управляющие воздействия.-"Автоматика и телемеханика", 1965, т.26,№ 6,

9. Ащепков Л.Т., Васильев О.В. К построению программного управления, минимизирующего отклонения линейной системы от стационарного режима.-Труды Иркутского госуниверситета им. А.А.Жданова, сер.матем. 1970. т.74, вып. 6.

10. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения,М., Мир, 1967.