Управляемые системы, ИМ,ИК, СО АН СССР 1974 г. выпуск 13.
УДК.512.25

# УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ

Г.В.Шевченко

Настоящая статья является продолжением исследований вопросов единственности, начатых автором [1] .

Пусть управляемый процесс описывается системой линейных разностных уравнений

$$x(n)=Ax(n-1)+Bu(n),\quad x(0)=x_0, \qquad /1/$$

где $A$ и $B$ - матрицы размерностей $m\times m$ и $m\times s$ соответственно, $x(n)$-$m$-мерный вектор, $u(n)$ - $s$ - мерный вектор управляющих параметров, причем для всех $n\geq 1$

$$u(n)\in U \qquad /2/$$

Множество $U$ -замкнутое выпуклое тело из $E_s$ . $0\in U\setminus \Gamma U$ Через $\Gamma\mathcal{D}$ здесь и далее обозначается граница множества $\mathcal{D}$ .

Требуется найти по крайней мере одно допустимое управление $u^0(1),\ldots,u^0(N)$, переводящее систему /1/ из $x_0$ в $0$ за минимальное число шагов.

Для этой задачи быстродействия в случае $\det A\neq 0$ в [1] получены достаточные условия единственности оптимального управления. В настоящей статье получены необходимые и достаточные условия единственности оптимального управления для случая $\det A=0$ .

Как показано ранее (см. [1],[2]), найдутся такие $u(k)\in U$ , что

$$A^N x_0+\sum_{k=1}^{n}A^{N-k}Bu^0(k)+\sum_{k=1}^{N-n}A^{N-n-k}Bu(k)=0,\quad (n=\overline{1,N}) \qquad /3/$$

где $u^0(1),\ldots,u^0(N)$ - оптимальное управление, $N$ - минимальное число шагов, за которое можно допустимым управлением перевести систему /1/ из $x_0$ в $0$ .

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&1.\ \tilde{x}^k=\{x: x=-(A^+)^k Bu,\ u\in U\}\quad (k=\overline{1,N})\\
&2.\ \tilde{X}^k=\{x_1+\ldots+x_k : x_j\in\tilde{x}^j (j=\overline{1,k})\}\ (k=\overline{1,N});\\
&3.\ \tilde{X}=\tilde{X}^N,
\end{aligned} \qquad /4/$$

где через $A^+$ обозначена псевдообратная матрица к матрице $A$ (см.[3]).

Пусть $n=N$ . Умножим /3/ слева на $A^N(A^+)^N$ . Используя свойства псевдообратной матрицы, получим

$$(A^+)^N\cdot(x_0-(x_1+\ldots+x_N))=0,\quad x_k\in\tilde{x}^k\ (k=\overline{1,N}).$$

Эти соотношения эквивалентны соотношениям

$$A(x_0-(x_1+\ldots+x_N))=0, \qquad /5/$$
$$x_k\in\hat{X}^k \quad (k=\overline{1,N}).$$

С каждым набором $\{x_1,\ldots,x_N\}$, $x_j\in\hat{X}^j(j=\overline{1,N})$ связано в силу /4/ по крайней мере одно допустимое управление. Следовательно, на основании /5/ можно заключить, что исходная задача оптимального быстродействия эквивалентна следующей задаче:

Найти такие $x_1,\ldots,x_N$, что

$$Ax_0=A(x_1+\ldots+x_N), \qquad /6/$$
$$x_k\in\hat{X}^k \quad (k=\overline{1,N}).$$

Лемма. Если $Ax_0\neq 0$ и $\{x: Ax=Ax_0\}\cap\hat{X}$ - линейное многообразие нулевой размерности, то задача /6/ имеет единственное решение.

Доказательство. Задача /6/ эквивалентна следующей: Найти такие $x_1,\ldots,x_N$, что

$$x_1+\ldots+x_N=x_0+y^*, \qquad /7/$$
$$x_k\in\hat{X}^k \ (k=\overline{1,N}), \qquad y^*\in\{x: Ax=0\}.$$

Множество $\hat{X}$ - ограниченное замкнутое выпуклое множество, поскольку является аффинным образом замкнутого выпуклого тела. В силу того, что $\hat{X}^k\ (k=\overline{1,N})$ также ограничены, замкнуты, выпуклы, применима теорема из [I], из которой следует, что задача /7/ при любом фиксированном $y^*\in\{x: Ax=0\}$ имеет единственное решение. Но $y^*$ определено в /7/ единственным образом, так как $\{x: Ax=Ax_0\}\cap\hat{X}$ - линейное многообразие нулевой размерности. Следовательно, и задача /6/ имеет единственное решение. Лемма доказана.

Теорема. (Необходимые и достаточные условия). Оптимальное управление задачи оптимального быстродействия из $x_0$ в $0$ для системы /I/ будет единственно тогда и только тогда, когда либо $Ax_0=0$, $\operatorname{rang} B=s$, либо

(а) $Ax_0\neq 0$ и $\{x: Ax=Ax_0\}\cap\hat{X}$ - линейное многообразие нулевой размерности и

(в) $\operatorname{rang} B=\operatorname{rang}(A^+)^k B=s \quad (k=\overline{1,N})$.

Доказательство. Достаточность. Если $Ax_0=0$ и $\operatorname{rang} B=s$, то $N=1$ и из /I/ тогда следует, что единственно возможное допустимое управление $u(1)=0$ является оптимальным.

Пусть выполнены условия (а) и (в), тогда задача /6/ имеет единственное решение. Обозначим это решение через $x_1^*,\ldots,x_N^*$. Системы

$$x_k^*=-(A^+)^k Bu(k) \quad (k=\overline{1,N}) \qquad /8/$$

относительно $\{(u_1(k),\ldots,u_s(k)\}$ имеют также единственное решение.

Необходимость. Пусть оптимальное управление единственно. Возможны два случая: $Ax_0=0$ и $Ax_0\neq 0$. Пусть $Ax_0=0$.

Тогда $N=1$, и из условия $x(1)=0$ следует, что ранг $B=s$, так как оптимальное управление единственно.

Пусть $Ax_0 \neq 0$. Из /8/ следует, что ранги матриц $(A^+)^k B (k=\overline{1,N})$ равны $s$ и что $x_1^*, \ldots, x_N^*$ определены единственным образом в силу единственности оптимального управления. Векторы $x_1^*, \ldots, x_N^*$ являются решением задачи /7/. Следовательно, $y^*$ в /7/ определено единственным образом. А это возможно только в случае, когда $\{x: Ax = Ax_0\} \cap \tilde{X}$ - - линейное многообразие нулевой размерности.

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Пусть $u^*(1), \ldots, u^*(N)$ - оптимальное управление для задачи оптимального быстродействия системы /1/ из $x_0$ в $0$. Тогда это управление является оптимальным и для всех задач оптимального быстродействия из точек $\bar{x} \in \{x: Ax = Ax_0\}$ в $0$.

Поступила в ред.-изд.отдел
2 апреля 1974 г.

Л и т е р а т у р а

1. Шевченко Г.В. Условия единственности оптимального управления в случае решения задачи оптимального быстродействия для линейных многошаговых процессов.-В кн: Управляемые системы. Вып. 12, Новосибирск, 1974, с. 81-83.

2. Леонов В.В. Структура областей достижимости и управляемости. П.- В кн.: Управляемые системы. Вып. 4-5, Новосибирск, 1970,с.56-65.

3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. Изд.3-е, Москва, Наука, 1967, с. 575.