Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1974 г. выпуск 13.
УДК.62.50.

О СВОЙСТВАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ ПРОЦЕССАМИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В.И.Денисов

Часто в процессах, имеющих место в технике, управлении производством, военном деле присутствует эффект запаздывания. В связи с этим возникает проблема нахождения оптимального управления такими процессами.

Условия оптимальности для систем с запаздыванием в виде принципа максимума Л.С.Понтрягина [1] впервые, по-видимому, были сформулированы Г.Л.Харатишвили [2]. Рассматривая задачу Майера со свободным правым концом траектории, авторы книги [3] доказали, что для систем с запаздыванием принцип максимума Л.С.Понтрягина является необходимым, а в случае, если эти системы линейны относительно координат траектории, и достаточным условием оптимальности.

Этот факт позволил автору настоящей работы исследовать некоторые качественные и количественные характеристики оптимальных управлений процессами в линейных системах с запаздыванием. В результате установлено, что оптимальному управлению линейным процессом в задаче Майера со свободным правым концом и фиксированным временем свойственны единственность, релейность и конечность числа переключений. Кроме того, в частном случае выведена оценка числа переключений оптимального управления.

§ 1. Постановка задачи и общие замечания

Рассмотрим управляемый процесс, описываемый линейной системой порядка n дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\dot{x}(t) = A\cdot x(t) - B\cdot x(t-\omega) - D\cdot u(t), \qquad t\in[\omega, T], \qquad /1/$$

$$x(t) = g(t), \qquad t\in[0,\omega], \qquad /2/$$

где A, B, D - матрицы - константы, момент времени T фиксирован, на правый конец траектории $x(T)$ не накладывается никаких ограничений, а вектор-функция $g(t)$ кусочно непрерывна.

Следует заметить, что заданием начальной функции $g(t)$ и управления $u(t)$ обеспечивается единственность решения $x(t)$ системы /1/-/2/.

Допустимыми управлениями будем называть кусочно-непрерывные и непрерывные справа функции $u(t)$, удовлетворяющие условию /3/:

$$u^*(t) = (u_1(t),\dots,u_r(t)) \in U, \quad t\in[\omega, T]. \qquad /3/$$

где U - ограниченный, замкнутый, выпуклый многогранник из евклидова пространства E_r , $*$ - транспонирование.

Ставится следующая задача:

среди всех допустимых управлений найти такое, при котором функционал

$$J = c^* \cdot x(T), \quad c \neq 0, \quad c \in E_n \qquad /4/$$

принимает свое экстремальное значение.

Допустимое управление, при котором функционал J достигает своего максимума /минимума/, будем называть max (min) - оптимальным. Так как задача минимизации функционала J сводится к задаче максимизации изменением знака функционала на противоположный, то все теоремы будут сформулированы для случая максимизации функционала J .

Введем функции

$$\psi^*(t) = (\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)), \qquad t \in [\omega, T], \qquad /5/$$

$$H(\psi(t), x(t), x(t-\omega), u(t)) = \psi^*(t) \cdot [A \cdot x(t) + B\, x(t-\omega) + \mathcal{D} \cdot u(t)], \qquad /6/$$

где вектор-функция /5/ удовлетворяет системе дифференциальных уравнений с опережающим аргументом:

$$\dot\psi(t) = -A^* \cdot \psi(t) - B^* \cdot \psi(t+\omega), \qquad t \in [\omega, T-\omega], \qquad /7/$$

$$\dot\psi(t) = -A^* \cdot \psi(t), \qquad t \in [T-\omega, T], \qquad /8/$$

$$\psi(T) = -c. \qquad /9/$$

Функцию /6/ представим в виде:

$$H = H_x + H_u, \qquad /10/$$

где

$$H_x = \psi^*(t) \cdot [A \cdot x(t) + B \cdot x(t-\omega)],$$

$$H_u = \psi^*(t) \cdot \mathcal{D} \cdot u(t).$$

Принцип максимума Л.С.Понтрягина, как условие оптимальности, заключается в том, что управление $u^0(t)$ - max - оптимально для задачи /I/-/4/ тогда и только тогда, когда в каждый момент времени $t \in [\omega, T]$ выполняется условие

$$H(\psi(t), x^0(t), x^0(t-\omega), u^0(t)) =$$

$$= \min_{u \in U} H(\psi(t), x^0(t), x^0(t-\omega), u), \qquad /11/$$

где $x^0(t)$ - решение системы /I/-/2/, соответствующее управлению $u^0(t)$. Однако, так как функция $H_x(\psi(t), x^0(t), x^0(t-\omega))$ не зависит от управления u , то условие /II/ эквивалентно следующему:

$$H_u(\psi(t), u^0(t)) = \min_{u \in U} H_u(\psi(t), u). \qquad /12/$$

Везде далее будет предполагаться выполненным следующее условие общности положения:

если ω - вектор, параллельный одному из ребер многогранника

U , то векторы $\mathcal{D}\cdot w, A\cdot\mathcal{D}\cdot w, \ldots, A^{n-1}\mathcal{D}\cdot w$ линейно - независимы.

§ 2. О конечности числа переключений

Т е о р е м а I. Решение $\psi(t)$ системы /7/-/9/ однозначно определяет max - оптимальное управление $u^{\circ}(t)$ для задачи /I/-/4/. При этом функция $u^{\circ}(t)$ кусочно-постоянна, ее значениями являются лишь вершины многогранника U , а число переключений на $[\omega, T]$ конечно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В каждый момент времени $t\in[\omega, T]$ функция $H_u(\psi(t), u)$ является линейной по переменным $u_1, \ldots, u_r$, поэтому для всякого $t\in[\omega, T]$ выполняется либо случай I , либо случай 2 .

I) $H_u(\psi(t), u)$ достигает экстремума в некоторой единственной вершине многогранника U ;

2) $H_u(\psi(t), u)$ достигает экстремума на некоторой грани многогранника U размерности $\geq$ I .

Покажем, что случай 2) имеет место лишь для конечного числа моментов t на любом конечном отрезке $[\omega, T]$. Допустим противное. Тогда, используя схему доказательства теоремы 9 в работе [I ,стр. I30], получаем соотношение:

$$H_u(\psi(t), w) = \psi^*(t)\mathcal{D}\cdot w = 0, \quad t\in[\omega, T], \qquad /13/$$

где w - вектор, параллельный некоторому ребру многогранника U . Последовательно дифференцируя $(n-1)$ раз равенство /I3/ и используя вид системы /7/-/9/ на $[T-\omega, T]$, получим систему линейных относительно $\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)$ уравнений:

$$\begin{aligned} &\psi^*(t)\cdot\mathcal{D}w \equiv 0, \\ &\psi^*(t)\cdot A\mathcal{D}\cdot w \equiv 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad\qquad , \ t\in[T-\omega, T], \qquad /14/ \\ &\psi^*(t)\cdot A^{n-1}\mathcal{D}w \equiv 0, \end{aligned}$$

В силу условия общности положения детерминант системы /I4/ отличен от нуля и, следовательно,

$$\psi(t)\equiv 0, \quad t\in[T-\omega, T], \qquad /15/$$

что противоречит граничным условиям системы /7/-/9/. Это и доказывает, что число моментов времени t , в которые функция $H_u(\psi(t), u)$ постоянна на некоторой грани размерности ≥ 1 , конечно, Дальнейшее доказательство ничем не отличается от доказательства вышеуказанной теоремы в работе [I] .

С л е д с т в и е. Для задачи /I/-/4/ max -оптимальное управление единственно.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как решение системы /7/-/9/ единственно, то оптимальное управление в силу теоремы I, единственно.

§ 3. О числе переключений

Т е о р е м а 2: Пусть I/ U - параллелепипед, $\alpha_i < u_i < \beta_i$, $i = \overline{1,r}$; 2/ все собственные значения матрицы A действительны. Тогда решение $\Psi(t)$ системы /7/-/9/ однозначно определяет max - оптимальное управление $u^o(t)$, $t \in [\omega, T]$ для задачи /I/-/4/. При этом каждая из функций $u_i^o(t)$, $i = \overline{1,r}$, кусочно постоянная, принимает лишь значения $\{\alpha_i, \beta_i\}$ и имеет не более K переключений, где

I/ $K = \frac{N\cdot(N+1)}{2}\cdot n - N$,

2/ $N = E(\frac{T}{\omega}) + sgn\,[T - E(\frac{T}{\omega})\cdot\omega] - 1$, где $E(y)$ - целая часть y ;

3/ n - порядок системы /I/-/2/.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу теоремы I, $u^o(t)$ однозначно определяется из соотношения:

$$\forall t \in [\omega, T]\quad \forall u(t) \in U \quad \Psi^*(t)\mathcal{D}u^o(t) \leq \Psi^*(t)\cdot\mathcal{D}u(t). \qquad /16/$$

Выбрав $u^*(t) = (u_1^o(t), \ldots, u_{i-1}^o(t), u_i(t), u_{i+1}^o(t), \ldots, u_r^o(t))$, получим

$$\Psi^*(t)\cdot(\mathcal{D})^i\cdot u_i^o(t) \leq \Psi^*(t)\cdot(\mathcal{D})^i\cdot u_i(t);\ t \in [\omega, T];\ \alpha_i < u_i(t) < \beta_i, \qquad /17/$$

где $(\mathcal{D})^i$ i- й столбец матрицы $\mathcal{D}$.

Отсюда следует, что

$$u_i^o(t) = \begin{cases} \alpha_i, & \Psi^*(t)\cdot(\mathcal{D})^i > 0, \\ \beta_i, & \Psi^*(t)\cdot(\mathcal{D})^i < 0 \end{cases},\quad i = \overline{1,r}, \qquad /18/$$

и значит, точки переключения функции $u_i^o(t)$ совпадают с нулями функции $\Psi^*(t)\cdot(\mathcal{D})^i$, $t \in [\omega, T]$.

Заменой $t' = T - t$ система /7/-/9/ сводится к системе

$$\dot\varphi(t') = A^*\cdot\varphi(t') - B^*\cdot\varphi(t'-\omega),\quad t' \in [\omega, T-\omega], \qquad /19/$$

$$\dot\varphi(t') = A^*\cdot\varphi(t'),\quad t' \in [0, \omega], \qquad /20/$$

$$\varphi(0) = -c, \qquad /21/$$

где $\varphi(t') = \Psi(T-t') = \Psi(t)$.

Поэтому число нулей функции $\Phi_i(t') = \varphi^*(t')\cdot(\mathcal{D})^i$ на $[0, T-\omega]$ совпадает с числом нулей функции $\Psi^*(t)\cdot(\mathcal{D})^i$ на $[\omega, T]$.

С л у ч а й I. $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ - действительные попарно-различные собственные значения A .

Так как всякую квадратную матрицу некоторым преобразованием подобия можно привести к матрице, имеющей жорданову форму, то без ограничения общности в силу справедливости рассуждений, приведенных в [4 , стр. I56-I57], мы будем полагать, что

$$A=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix} \qquad \text{и, значит,} \quad e^{At}=\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 \cdot t} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & e^{\lambda_n \cdot t}\end{pmatrix}.$$

Используя метод последовательного интегрирования системы /I9/ - /2I/ на отрезках $[\kappa\cdot\omega, (\kappa+1)\omega]$, покажем, что для всякого κ $(\kappa=0, 1, 2, \ldots)$ справедливо соотношение

$$d^*\cdot\varphi(t)=\sum_{i=1}^{n}\nu_i^{\kappa}(t)\cdot e^{\lambda_i\cdot t}, \qquad t\in[\kappa\omega, (\kappa+1)\omega], \qquad /22/$$

где I/ $\nu_i^{\kappa}(t)$ - полином степени z_i^{κ}, $0\leqslant z_i^{\kappa}\leqslant\kappa$;

2/ d - некоторый n -мерный вектор-константа.

Решение системы /I9/-/2I/ на $[0,\omega]$ определяется по формуле

$$\varphi(t)=e^{A^*\cdot t}\cdot\varphi(0).$$

Пусть для некоторого $\kappa\geqslant 0$ выполняется /22/. Решение системы /I9/-/2I/ на $[(\kappa+1)\omega,(\kappa+2)\omega]$ имеет вид:

$$\varphi(t)=e^{A^*\cdot[t-(\kappa+1)\omega]}\cdot\varphi((\kappa+1)\cdot\omega)+$$
$$+\int_{(\kappa+1)\omega}^{t}e^{A^*(t-s)}\,B^*\cdot\varphi(s-\omega)\,ds.$$

Так как для $\varphi(s-\omega)$, $s\in[(\kappa+1)\omega,(\kappa+2)\omega]$ предположение индукции выполнено, то

$$\varphi_j(t)=e^{\lambda_j[t-(\kappa+1)\omega]}\,\varphi_j((\kappa+1)\omega)+$$
$$+\int_{(\kappa+1)\omega}^{t}e^{\lambda_j(t-s)}\cdot(B^*)_j\cdot\varphi(s-\omega)\,ds=$$
$$=e^{\lambda_j[t-(\kappa+1)\omega]}\,\varphi_j((\kappa+1)\omega)+$$
$$+\int_{(\kappa+1)\omega}^{t}e^{\lambda_j(t-s)}\sum_{i=1}^{n}\nu_i^{\kappa}(s-\omega)\cdot e^{\lambda_i(s-\omega)}ds=$$
$$=\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\bar{\nu}_i^{\kappa}(t)\cdot e^{\lambda_i t}+\bar{\nu}_j^{\kappa+1}(t)\cdot e^{\lambda_j\cdot t},$$

где $(B^*)_j$ - j -я строка B^*. Это и доказывает справедливость соотношения /22/ для всякого $(\kappa=0, 1, 2, \ldots)$. Отсюда следует, что выполняется /23/:

$$\varphi_i(t)=\sum_{j=1}^{n}\nu_j^{\kappa}(t)\,e^{\lambda_j t};\quad t\in[\kappa\omega,(\kappa+1)\omega]. \qquad /23/$$

Пусть R_k^i - число нулей функции $\varphi_i(t),\ t\in[k\omega,(k+1)\omega]$, тогда из леммы, доказанной в [I , стр. I36-I37] , вытекает

$$R_k^i \leqslant \left(\sum_{j=1}^{n} r_j^k + n - 1\right) \leqslant (n\cdot k + n - 1). \qquad /24/$$

Пусть $N=E\left(\frac{T}{\omega}\right)+sgn\left[T-E\left(\frac{T}{\omega}\right)\cdot\omega\right]-1$. Так как $[0,T-\omega]\subseteq[0,N\cdot\omega]$, то число нулей функции $\varphi_i(t),\ t\in[0,T-\omega]$, а значит, и число переключений управления $u_i^0(t);\ t\in[\omega,T]$ не превосходит числа $R^i=\sum_{k=0}^{N-1}R_k^i$.

Суммирование /24/ по k от 0 до $(N-1)$ показывает, что справедливо неравенство

$$R^i \leqslant K = \frac{N\cdot(N+1)}{2}\cdot n - N. \qquad /25/$$

Случай 2.

1/ $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m$ - все действительные попарно-различные собственные значения A , $m<n$;

2/ ρ_i - кратность λ_i ; $i=\overline{1,m}$

3/ $\sum_{i=1}^{m}\rho_i = n$

В этом случае

$$A=\begin{pmatrix} G_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & G_m \end{pmatrix}, \qquad \text{где} \quad G_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_i & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_i \end{pmatrix}$$

и

$$e^{A\cdot t}=\begin{pmatrix} e^{G_1 t} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{G_m\cdot t} \end{pmatrix}, \qquad \text{где}$$

$$e^{G_i t}=\begin{pmatrix} e^{\lambda_i t} & t\cdot e^{\lambda_i t} & \ldots & \frac{t^{\rho_i-1}}{(\rho_i-1)!}\cdot e^{\lambda_i t} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \ldots & \frac{t^{\rho_i-2}}{(\rho_i-2)!}\cdot e^{\lambda_i t} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & e^{\lambda_i t} \end{pmatrix}.$$

Покажем, что для решения системы /19/-/21/ при всяком k $(k=1,2\ldots)$ справедливо соотношение

$$d^*\cdot\varphi(t)=\sum_{i=1}^{m}\nu_i^{k\cdot\rho_i-1}(t)\cdot e^{\lambda_i\cdot t};\quad t\in[(k-1)\omega,k\omega]. \qquad /26/$$

Решение системы на $[0,\omega]$ имеет вид:

$$\varphi(t) = e^{A^* t} \cdot \varphi(0).$$

Пусть для некоторого $k \geqslant 1$ выполняется /26/.

Решение системы /19/-/21/ на $[k\omega, (k+1)\omega]$ имеет вид:

$$\varphi(t) = e^{A^*(t-k\omega)}\varphi(k\omega) + \int_{k\omega}^{t} e^{A^*(t-s)} B^* \cdot \varphi(s-\omega)ds.$$

Так как для $\varphi(s-\omega)$; $s \in [k\omega,(k+1)\omega]$ предположение индукции выполнено, то, используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\varphi_j(t) = \nu_0^{g_p-1}(t) \cdot e^{\lambda_p \cdot t} + \int_{k\omega}^{t} \sum_{i=1}^{m} (t-s)^{g_p-1} \cdot \nu_i^{k \cdot \rho_i - 1}(s-\omega) \cdot e^{[(\lambda_i - \lambda_p) \cdot s + \lambda_p \cdot t - \lambda_i \cdot \omega]} ds =$$

$$= \nu_0^{g_p-1}(t) \cdot e^{\lambda_p \cdot t} + \left\{ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{m} \sum_{\ell=0}^{g_p-1} (t-s)^{\nu} \cdot \bar{\nu}_{i,\ell}^{k \cdot \rho_i - 1}(s-\omega) \cdot e^{[(\lambda_i - \lambda_p) \cdot s + \lambda_p \cdot t - \lambda_i \cdot \omega]} + \right.$$

$$\left. + \bar{\nu}_p^{(k+1)g_p - 1}(s-\omega) \cdot e^{(\lambda_p \cdot t - \lambda_p \cdot \omega)} \right\} \Bigg|_{k\omega}^{t} =$$

$$= \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq p}}^{m} \tilde{\nu}_i^{k \cdot \rho_i - 1}(t) \cdot e^{\lambda_i \cdot t} + \tilde{\nu}_p^{(k+1) \cdot \rho_p - 1}(t) \cdot e^{\lambda_p \cdot t},$$

где $$j = \sum_{i=1}^{p-1} \rho_i + \nu, \qquad 1 \leqslant \nu \leqslant \rho_p.$$

Отсюда следует справедливость соотношения /26/, в силу которого равенство /27/ выполняется для всякого k $(k = 1, 2 \ldots)$.

$$\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^{m} \nu_j^{k \cdot \rho_j - 1}(t) \cdot e^{\lambda_j \cdot t}; \quad t \in [(k-1)\omega, k\omega]. \qquad /27/$$

Из равенства /27/ вытекает неравенство /28/:

$$R_k^i \leqslant \sum_{j=1}^{m} (k \cdot \rho_j - 1) + m - 1 = k \cdot n - 1 \qquad /28/$$

Суммируя /28/ по k от I до N, получаем величину K, ограничивающую число переключений управления $u_i^*(t)$ на отрезке $[\omega, T]$.

Таким образом, теорема 2 полностью доказана.

Поступила в ред.-изд.отдел
4 апреля 1974 г.

Литература

1. Понтрягин Л.С.,Болтянский В.Г.,Гамкрелидзе Р.В.,Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М, "Наука, 1969.

2. Харатишвили Г.Л. Принцип максимума в теории оптимальных процессов с запаздыванием. -"ДАН СССР", 1961, т.136, № 1.

3. Габасов Р., Кириллова Ф. Качественная теория оптимальных процессов. М, "Наука", 1971.

4. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления. М, "Наука", 1969.