Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1974 г. выпуск 13.
УДК.51.

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ПОСТРОЕНИЯ НИЖНЕЙ ОЦЕНКИ И ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ С АПОСТЕРИОРНОЙ ОЦЕНКОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ ЗАДАЧИ СТАНДАРТИЗАЦИИ

Э.Х.Гимади, Н.И.Глебов, В.Т.Дементьев

§ 1. Постановка задачи

Широкий класс задач стандартизации может быть сформулирован следующим образом [1],[2] . На множествах $M=\{1,2,\dots,m\}$ и $N=\{1,2,\dots,n\}$ заданы числа g_i^o ($i\in M$) - начальные затраты за ввод в действие стандартного изделия i -го типа и φ_j $(j\in N)$ - спрос в работах j -го вида. Задана также числовая $m\times n$ - матрица (C_{ij}) , где C_{ij} - стоимость обслуживания стандартным изделием i -го типа j -ой работы. Требуется найти подмножество $M^o\subset M$ типов стандартных изделий, при которых затраты на полное удовлетворение спроса минимальны:

$$\sum_{i\in M^o} g_i^o + \sum_{j\in N}\varphi_j \min_{i\in M^o} C_{ij} \longrightarrow \min_{M^o\subset M} . \qquad /1/$$

Эту же задачу, используя обозначение $g_{ij}=\varphi_j C_{ij}$, можно сформулировать как задачу целочисленного программирования с булевыми переменными:

$$F=\sum_{i=1}^{m} g_i^o y_i + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g_{ij}x_{ij} \longrightarrow \min \qquad /2/$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=1 \quad (j=1,2,\dots,n) \qquad /3/$$

$$0\leqslant x_{ij}\leqslant y_i \quad (i=1,2,\dots,m,\ j=1,2,\dots,n) \qquad /4/$$

$$x_{ij},\ y_i\in\{0,1\}. \qquad /5/$$

Для решения поставленной задачи, если матрица (g_{ij}) не удовлетворяет свойствам типа связности или квазивыпуклости [1], применяются различные схемы неявного перебора (методы ветвей и границ [4] и их модификации [5] , последовательные схемы оптимизации [3] и т.п.). Эффективность подобных схем (степень отсева бесперспективных вариантов) в сильной мере зависит от техники построения нижних оценок.

В качестве нижней оценки к величине функционала задачи /2/-/5/ можно взять значение целевой функции задачи, двойственной к задаче /2/-/4/, в которой снято ограничение /5/:

$$\Phi=\sum_{j=1}^{n}\min_{1\leqslant i\leqslant m}(g_{ij}+w_{ij})\longrightarrow \max \qquad /6/$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} w_{ij} \leq g_i^0 \qquad (i=1,2,\ldots,m), \qquad /7/$$

$$w_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n). \qquad /8/$$

Нижней оценкой для значения функционала задачи /2/-/5/ является величина вида

$$Q(\alpha, M) = \sum_{j=1}^{n} \min_{i \in M} (g_{ij} + \alpha_j g_i^0), \qquad /9/$$

где

$$\alpha \in A = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) / \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \leq 1,\ \alpha_j \geq 0 \quad (j=1,2,\ldots,n)\}.$$

Например, в работе [3], компоненты вектора α предлагается выбирать следующим образом:

$$\alpha_j = \frac{\varphi_j}{\sum_{l=1}^{n} \varphi_l} \qquad (j=1,2,\ldots,n).$$

В настоящей работе указывается метод получения оценки, не худшей $Q(\alpha, M)$ для любого вектора $\alpha \in A$. Для этой цели за $O(nm^2)$ действий типа сравнения и сложения строится так называемое тупиковое решение двойственной задачи /6/-/8/, а заодно получается и допустимое решение исходной задачи /2/-/5/ с апостериорной оценкой точности.

§ 2. Теорема о свойствах тупикового решения задачи /6/-/8/

Для любого $M' \subset M$ введем множество

$$\Omega(M') = \{w / \sum_{j=1}^{n} w_{ij} \leq g_i^0 (i \in M'),\ w_{ij} \geq 0 \quad (i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n)\}$$

и определим задачу $Z(M')$:

$$\Phi(w, M') = \sum_{j=1}^{n} \min_{i \in M'} (g_{ij} + w_{ij}) \underset{w \in \Omega(M')}{\longrightarrow} \max .$$

Введем обозначения для множеств:

$$M^0 = \{ i \in M / \sum_{j=1}^{n} w_{ij} - g_i^0 = 0 \}$$ - множество насыщенных строк,

$$M_j' = \{ i \in M' / g_{ij} + w_{ij} = \min_{k \in M'} (g_{kj} + w_{kj}) \} \quad (j=1,2,\ldots,n),$$

$$T(M') = \{ w \in \Omega(M') / \text{(а)} (\forall_j) M_j' \cap M^0 \neq \emptyset;\ \text{(б)}\ (i \in M' \setminus M_j') \Rightarrow w_{ij} = 0 \}.$$

Решение $w \in T(M')$ назовем M' - тупиковым.

Лемма I. $Q(\alpha, M) \leq Q(\alpha, M')$ для любого $M' \subset M$.

Утверждение леммы очевидно в силу того, что минимум на подмножестве не меньше минимума на всем множестве.

Л е м м а 2. $Q(\alpha, M) \le \Phi(0, M) + g^{o}_{max}$,

где $g^{o}_{max} = \max_{i \in M} g^{o}_{i}$, $\Phi(0,M) = \sum_{j=1}^{n} \min_{i \in M} g_{ij}$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, в силу $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \le 1$ и $\alpha_j \ge 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ имеем

$$Q(\alpha, M) = \sum_{j=1}^{n} \min_{i \in M}(g_{ij} + \alpha_j g^{o}_{i}) \le \sum_{j=1}^{n} \min_{i \in M}(g_{ij} + \alpha_j g^{o}_{max}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \min_{i \in M} g_{ij} + g^{o}_{max} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \le \Phi(0, M) + g^{o}_{max}).$$

Л е м м а 3. $Q(\alpha, \{i\}) \le \Phi(w, \{i\})$ при $w \in T(\{i\})$,

где под $\{i\}$ понимается множество, состоящее из одного элемента i .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из $\{i\}$ - тупиковости решения w следует, что $g^{o}_{i} = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}$. Отсюда в силу определения функций Q и Φ , имеем

$$Q(\alpha, \{i\}) = \sum_{j=1}^{n}(g_{ij} + \alpha_j g^{o}_{i}) = \sum_{j=1}^{n} g_{ij} + g^{o}_{i} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \le \sum_{j=1}^{n} g_{ij} + g^{o}_{i} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} g_{ij} + \sum_{j=1}^{n} w_{ij} = \Phi(w, \{i\}).$$

Л е м м а 4. Если $w \in T(M)$ и $M^{o} \subset M' \subset M$, то

/1/ $\Phi(w, M') = \Phi(w, M)$,

/2/ $w \in T(M')$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из свойства (а) M - тупикового решения и включения $M^{o} \subset M'$ следует, что $M_j \cap M' \ne \emptyset$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$ В силу определения множеств M_j с учетом включения $M' \subset M$ это влечет равенства:

$$\min_{i \in M'}(g_{ij} + w_{ij}) = \min_{i \in M}(g_{ij} + w_{ij}) \quad j = 1, 2, \ldots, n), \qquad /II/$$

из которых и следует утверждение /1/.

Из /II/ и $M^{o} \subset M' \subset M$ далее получим:

$$M'_j = M_j \cap M', \quad M_j \cap M^{o} = M_j \cap M^{o}. \quad \text{и} \quad M' \setminus M'_j \subset M \setminus M_j \; (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Учитывая M - тупиковость w , последние соотношения доказывают утверждение /2/.

Т е о р е м а 1. Для любого M -тупикового решения w и любого вектора $\alpha \in A$ справедливо неравенство

$$Q(\alpha, M) \le \Phi(w, M).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы проведем индукцией по $z = |M|$.

При $r = 1$ утверждение теоремы справедливо в силу леммы 3. Предположим теперь, что теорема справедлива для всех $r < m$. Тогда для $w \in T(M')$, где $M' = M \setminus \{i_0\}$, i_0 - строка с $g_i^0 = g_{max}^0$, имеем

$$Q(\alpha, M') \leqslant \Phi(w, M'). \qquad /12/$$

Возьмем M - тупиковое решение w. Рассмотрим два возможных лучая в зависимости от того, является строка i_0 насыщенной или нет.

Случай $i_0 \in M^0$. Обозначим $N_{i_0} = \{j \in N / i_0 \in M_j\}$.

Из свойства (б) M - тупиковости w следует, что $w_{i_0 j} = 0$ при $j \notin N_{i_0}$ и, следовательно,

$$\sum_{j=1}^{n} w_{i_0 j} = \sum_{j \in N_{i_0}} w_{i_0 j} = g_{max}^0$$

Тогда

$$\Phi(w, M) = \sum_{j=1}^{n} \min_{i \in M} (g_{ij} + w_{ij}) = \sum_{j \in N_{i_0}} \min_{i \in M} (g_{ij} + w_{ij}) +$$

$$+ \sum_{j \in N \setminus N_{i_0}} \min_{i \in M} (g_{ij} + w_{ij}) = \sum_{j \in N_{i_0}} (g_{i_0 j} + w_{i_0 j}) + \sum_{j \in N \setminus N_{i_0}} \min_{i \in M} g_{ij} =$$

$$= g_{max}^0 + \sum_{j \in N_{i_0}} g_{i_0 j} + \sum_{j \in N \setminus N_{i_0}} \min_{i \in M} g_{ij} \geqslant g_{max}^0 + \sum_{j=1}^{n} \min_{i \in M} g_{ij} = g_{max}^0 + \Phi(0, M),$$

откуда с учетом леммы 2 получим

$$\Phi(w, M) \geqslant Q(\alpha, M).$$

Случай $i_0 \notin M^0$. Из леммы 4 следует, что $w \in T(M')$ и $\Phi(w, M) = \Phi(w, M')$. Тогда с учетом неравенства /12/ и леммы 1 имеем

$$\Phi(w, M) = \Phi(w, M') \geqslant Q(\alpha, M') \geqslant Q(\alpha, M).$$

Теорема 1 полностью доказана.

§ 3. Алгоритм построения тупикового решения двойственной задачи и приближенного решения исходной задачи

Из определения тупикового решения w двойственной задачи /6/-/8/ вытекают метод отыскания этого решения и нижней оценки $\Phi(w, M)$ (1-й этап алгоритма), а также алгоритм получения допустимого решения исходной задачи /2/-/5/ (2-й этап алгоритма). Опишем оба этапа.

1-й этап. Вначале этапа полагаем

$$w_{ij} = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots m, \ j = 1, 2, \dots, n);$$

$$g_i' = g_i^0 \qquad (i = 1, 2, \dots m);$$

$$v_j = \min_{1 \leqslant i \leqslant m} g_{ij} \qquad (j = 1, 2, \dots n);$$

$$M_j = \{i / g_{ij} = v_j\} \qquad (j = 1, 2, \dots n).$$

Далее за конечное число шагов отыскиваем тупиковое решение и оценку $\varphi(w, M)$. На каждом шаге I-го этапа выполняются действия согласно следующим двум правилам:

/Iа/ находим множество $M^0 = \{i / g_i' = 0 \quad i=1,2,\dots,m\}$ и столбец j_0, такой, что

$$|M_{j_0}| = \min_{j / M_j \cap M^0 = \emptyset} |M_j|$$

Если такой столбец найден, то переходим к пункту /Iб/, в противном случае полагаем

$$w_{ij} = \begin{cases} v_j - g_{ij} & (i \in M_j), \\ 0 & (i \notin M_j), \end{cases} \qquad (j=1,2,\dots,n)$$

$$\varphi(w, M) = \sum_{j=1}^{n} v_j ,$$

и работа I-го этапа алгоритма заканчивается.

/Iб/ Вычисляем

$$d = \min_{i \notin M_{j_0}} g_{ij_0} , \qquad g'_{min} = \min_{i \in M_{j_0}} g_i' , \qquad \Delta = \min(d - v_{j_0}, g'_{min}).$$

и полагаем

$$v_{j_0} := v_{j_0} + \Delta, \quad g_i' := g_i' - \Delta \ (i \in M_{j_0}).$$

В дальнейшем действия /Iа/ и /Iб/ повторяются при наличии столбца j_0, удовлетворяющего условиям пункта /Iа/.

Используя результаты I-го этапа алгоритма, ищем допустимое решение исходной задачи и оцениваем точность полученного решения. Эта работа осуществляется с помощью 2-го этапа алгоритма, описываемого ниже.

<u>2-й этап.</u> Пусть M^0 - множество насыщенных строк, получившееся по окончанию работы I-го этапа. Положим булевый вектор y равным $y=(y_1,\dots,y_m)$, где

$$y_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i \in M^0; \\ 0 - \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Далее алгоритм за конечное число шагов приводит к некоторому допустимому решению исходной задачи. Опишем один шаг 2-го этапа алгоритма:

/2а/ Вычисляем

$$F(y) = \sum_{i=1}^{m} g_i^0 y_i + \sum_{j=1}^{n} \min_{i/y_i=1} g_{ij} ;$$

полагаем

$$h = \max_{i/y_i=1} \left[F(y) - F(y - e^{(i)}) \right], \qquad /13/$$

где $e^{(i)}$ - булевый вектор, все компоненты которого равны нулю, кроме i -й.

/2б/ Если $h \geq 0$, то положим $y = y - e^{(i_0)}$, где i_0 -номер строки, на которой достигается максимум в /13/, и переходим к очередному шагу, начиная с пункта /2а/. При $h < 0$ работа алгоритма заканчивается. При этом относительное уклонение решения от точного решения может быть оценено следующим образом:

$$\delta \leq \frac{F(y) - \Phi(w, M)}{F(y)},$$

где w - тупиковое решение задачи $Z(M)$, полученное в результате работы 1-го этапа алгоритма, а y - допустимое решение исходной задачи, а именно булевый вектор, полученный в конце работы 2-го этапа алгоритма.

Экспериментальные расчеты с матрицами размером 70x90 показывают, что относительное уклонение полученного решения от точного в 90% случаев не превышает 0,06.

Из описания алгоритма следует, что он является аддитивным и может быть реализован за $C \cdot n m^2$ действий, C - константа, не зависящая от размерности задачи.

Литература

1. Гимади Э.Х., Дементьев В.Т. Некоторые задачи выбора оптимальных параметрических рядов и методы их решения (задачи стандартизации). В кн.:Проблемы кибернетики. Вып. 27, М., 1973, с.19-32.

2. Береснев В.Л. Об одном классе задач оптимизации параметров однородной технической системы. - В кн.: Управляемые системы. Вып.9, Новосибирск, 1971, с. 65-74.

3. Емеличев В.А., Ковалев М.М. Решение некоторых задач вогнутого программирования методом построения последовательности планов. I и II.- "Известия АН БССР, серия физико-математических наук",Минск, № 6 1970,с.24-27 и № 1, 1972, с.65-74.

4. Корбут А.А., Финкельштейн Ю.Ю. Дискретное программирование. М. "Наука", 1969.

5. Береснев В.Л. Алгоритм неявного перебора для задачи типа размещения и стандартизации. - В кн.: "Управляемые системы". Вып. 12, Новосибирск, 1974, с.24-34.

Поступила в ред.-изд.отдел.
27 ноября 1974 г.