

О НЕКОТОРЫХ МОДЕЛЯХ И МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАНЦЕ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

С.Е.Гвоздев

В работе рассматривается задача целочисленного программирования, известная под названием обобщенной задачи о ранце. Для двух модификаций этой задачи построены вычислительные алгоритмы и приводятся оценки их трудоемкости. В алгоритмах использованы идеи динамического программирования.

1. Постановка задач

Рассмотрим задачу A :

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \max, \quad /1/$$

$$\sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b, \quad /2/$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{1, n}. \quad /3/$$

Здесь b, c_j, a_j - постоянные, а переменные x_j удовлетворяют дополнительным ограничениям:

$$\sum_{j \in J_\kappa} x_j \leq l_\kappa, \quad \kappa = \overline{1, N}, \quad /4/$$

где $\bigcup_{\kappa=1}^N J_\kappa = \{1, 2, 3, \dots, n\}$, $J_{\kappa_1} \cap J_{\kappa_2} = \emptyset$ при $\kappa_1 \neq \kappa_2$.

Эта задача при $l_\kappa = 1, \kappa = \overline{1, N}$ известна под названием "обобщенной задачи о ранце". Для решения ее используют метод ветвей и границ, [1]-[3], который вообще говоря, не позволяет избежать перебора, растущего по экспоненте с ростом n .

В настоящей работе для случая, когда коэффициенты ограничений - целые числа, при произвольных целых $l_\kappa \in [1, |J_\kappa|]$ рассматриваются следующие обобщения задачи /1/-/4/:

Задача A' . /1/ и /2/ заменяются на

$$\sum_{j=1}^n f_j(y_j) \rightarrow \max, \quad /1'/$$

$$\sum_{j=1}^n y_j \leq b, \quad /2'/$$

где $f_j(y_j)$ - вещественная функция от y_j ; без ограничения общности будем считать, что $f_j(0) = 0$, $j = \overline{1, n}$.

К условиям /1'/, /2'/, /3/, /4/ добавляется /5/:

$$y_j \in \{0, 1, 2, \dots, v \cdot x_j\}, \quad j = \overline{1, n} \quad /5/$$

Задача А". Условие /2/ заменяется на m ограничений

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = \overline{1, m}, \quad /2''/$$

где $a_{ij} \geq 0$ - целые.

Для решения задач А' и А" предлагаются соответственно алгоритмы \mathcal{A}' и \mathcal{A}'' . Показано, что трудоемкость алгоритма \mathcal{A}' будет порядка $\pi_{\mathcal{A}'} \sim v^2 \mathcal{L} R \cdot \max\{\mathcal{L}, N\}$ элементарных операций^{*}/, где $R = \max_{1 \leq k \leq N} |J_k|$,

$\mathcal{L} = \max_{1 \leq k \leq N} l_k$ при памяти $\pi_{\mathcal{A}'} \sim v(\Delta + N)$ ячеек, где $\Delta = \max_{1 \leq k \leq N} (\Delta_{z_k} l_k)$,

$\Delta_{z_k} l_k = \min\{l_k, z_k - l_k + 1\}$. Трудоемкость алгоритма \mathcal{A}'' составляет $\pi_{\mathcal{A}''} \sim R \mathcal{L}^2 N^2 \prod_{i=1}^m b_i$, $\pi_{\mathcal{A}''} \sim \Delta \prod_{i=1}^m b_i$. Следует отметить, что задача /1/ - /3/ при условии, что /2/ заменено на /2''/ и $m=2$, рассматривалась в работе [4], где предлагался эвристический алгоритм.

2. Метод решения задачи А'.

Через $J_N(v)$ обозначим максимум исходной целевой функции /1'/, при условиях /2'/, /3/, /4/, /5/.

Требуется определить допустимый набор (y_1^*, \dots, y_n^*) , при котором

$$J_N(v) = \sum_{j=1}^n f_j(y_j^*).$$

Обозначим $z_k = |J_k|$, $k = \overline{1, N}$. Для определенности далее будем предполагать, что $J_k = \{\rho_{k-1} + 1, \dots, \rho_k\}$, где $\rho_k = \sum_{i=1}^k z_i$, $\rho_0 = 0$. Сформулируем для целых $z, \beta, \ell \geq 0$ следующую вспомогательную задачу.

Найти допустимый набор (u_1^*, \dots, u_z^*) , при котором достигается максимум функции:

$$\sum_{i=1}^z \tilde{f}_i(u_i) \rightarrow \max, \quad /6/$$

^{*}/ Под элементарной операцией понимается либо арифметическая операция, либо операция сравнения. В дальнейшем через π/π' будем обозначать количество элементарных операций (память) какого-либо алгоритма или его части.

при условии

$$\sum_{i=1}^2 u_i = \beta, \quad /7/$$

$$\sum_{i=1}^2 v_i \leq \ell, \quad /8/$$

$$v_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, 2}, \quad /9/$$

$$u_i \in \{0, 1, \dots, \beta \cdot v_i\}, \quad i = \overline{1, 2}, \quad /10/$$

где $\tilde{f}_i(u_i)$ - вещественная функция u_i ; без ограничения общности можно считать, что $\tilde{f}_i(0) = 0$, $i = \overline{1, 2}$.

Через $h_{\ell\beta}^z$ обозначим максимум целевой функции в задаче /6/ - /10/. Нетрудно видеть, что эта величина при условии $u_2 = 0$ равна $h_{\ell\beta}^{z-1}$, а при условии $u_2 = 1$ соответственно

$$\max_{0 \leq u_2 \leq \beta} [h_{\ell-1, \beta-u_2}^{z-1} + \tilde{f}_2(u_2)].$$

Отсюда имеем следующее рекуррентное соотношение:

$$h_{\ell\beta}^z = \max \left\{ h_{\ell\beta}^{z-1}, \max_{0 \leq u_2 \leq \beta} [h_{\ell-1, \beta-u_2}^{z-1} + \tilde{f}_2(u_2)] \right\}. \quad /11/$$

Очевидно, что рекуррентное соотношение, аналогичное /11/, может быть выписано для любых значений y , $y = \overline{1, 2}$; α , $\alpha = \overline{1, \ell}$; λ , $\lambda = \overline{0, \beta}$ и будет иметь при этом следующий вид:

$$h_{\alpha\lambda}^y = \max \left\{ h_{\alpha\lambda}^{y-1}, \max_{0 \leq u_y \leq \lambda} [h_{\alpha-1, \lambda-u_y}^{y-1} + \tilde{f}_y(u_y)] \right\}, \quad /12/$$

причем $h_{\alpha\lambda}^0$, $h_{\alpha\lambda}^y$ естественно положить равными нулю.

Л е м м а I. Вектор значений оптимумов

$$(h_{\ell 0}^z, \dots, h_{\ell\beta}^z, \dots, h_{\ell\beta}^z) \quad /13/$$

для задач /6/ - /10/ при $\beta = \overline{0, \beta}$ может быть вычислен ценой:

$$\pi_1 \sim (z - \Delta_{z\ell}) \Delta_{z\ell} \beta^2, \quad \pi_2 \sim \Delta_{z\ell} \beta, \quad /14/$$

где $\Delta_{z\ell} = \min \{ \ell, z - \ell + 1 \}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оно конструктивно в том смысле, что приводится описание алгоритма нахождения вектора /13/. Работа этого алгоритма состоит в последовательном вычислении матриц

$H^y = (h_{\alpha\beta}^y)$, где для каждого $y = \overline{1, 2, \dots, z}$ номер строки α пробегает значения

$$\max \{ 1, \ell - z + y \} \leq \alpha \leq \min \{ y, \ell \} \quad /15/$$

при $\beta = 0, 1, \dots, \beta$.

На основании /12/ при $y \in \overline{2, z}$ для расчета α -й строки

$(h_{\alpha\beta}^y)$, $\beta = \overline{0, \beta}$, матрицы H^y необходимо иметь строки α и $\alpha-1$ матрицы H^{y-1} . Так как при $\alpha = y$, $y \leq \ell$ имеем равенство $h_{\alpha\beta}^{y-1} = h_{\alpha-1, \beta}^{y-1}$,

то для вычисления строки α матрицы H^y достаточно иметь только $(\alpha - 1)$ -ю строку матрицы H^{y-1} . При $y = 1$ единственной строкой матрицы H^1 является вектор $(h_{1\beta}^1)$, $\beta = \overline{0, l}$. На рис. 1 показаны максимальные и минимальные номера множества строк, достаточных для расчета матриц H^y , где $y = \overline{1, 2}$.

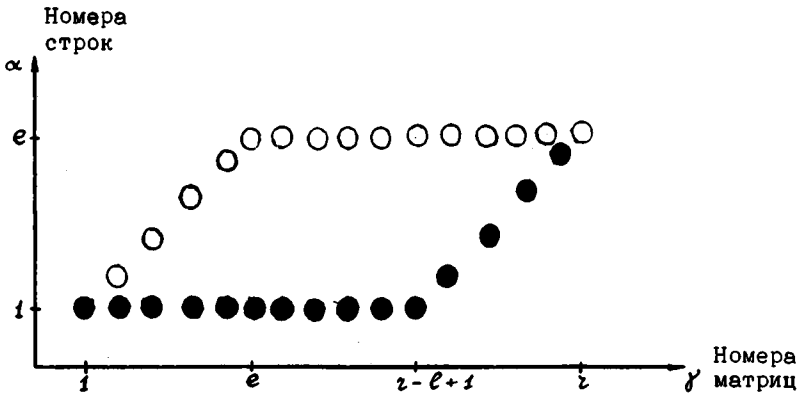


Рис. 1. Схема матрицы H^y при $y = \overline{1, 2}$.

O - максимальный номер строки; ● - минимальный номер строки.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что с помощью матрицы H^{y-1} элементы матрицы H^y для всех строк α , удовлетворяющих /15/, можно вычислять по /12/, выбирая эти элементы в порядке, обратном лексикографическому. При этом вновь вычисленный элемент $h_{\alpha\beta}^y$ записывается на место элемента $h_{\alpha\beta}^{y-1}$, за исключением случая $\alpha = y$, $y \leq l$, когда для элементов $h_{\alpha\beta}^y$, $\beta = \overline{0, l}$, формируется новая строка.

Таким образом, для любого $1 < y \leq 2$ матрица H^y вычисляется при помощи матрицы H^{y-1} , а при $y = 2$ матрица H^y состоит из одной l -й строки $(h_{20}^2, \dots, h_{2l}^2)$, представляющей из себя искомый вектор /13/. При нахождении матрицы H^y согласно /15/ вычислялось количество строк, равное

$$\Delta_{ze}^{(y)} = \min \{y, l\} - \max \{1, l - z + y\} + 1.$$

Поскольку $\Delta_{ze} = \min \{l, z - l + 1\}$, то $\Delta_{ze}^{(y)}$ можно представить в виде:

$$\Delta_{ze}^{(y)} = \begin{cases} y, & y < \Delta_{ze}, \\ \Delta_{ze}, & \Delta_{ze} \leq y \leq z - \Delta_{ze} + 1, \\ z - y + 1, & z - \Delta_{ze} + 1 < y \leq z. \end{cases} \quad /16/$$

Отсюда получим, что

$$\Delta_{ze} = \max_{1 \leq y \leq z} \Delta_{ze}^{(y)} \quad /17/$$

Используя представление $\Delta_{ze}^{(y)}$ в виде /16/, получаем

$$\sum_{\gamma=1}^z \Delta_{z\ell}^{(\gamma)} = \sum_{\gamma=1}^{\Delta_{z\ell}-1} \gamma + \sum_{\gamma=\Delta_{z\ell}}^{z-\Delta_{z\ell}+1} \Delta_{z\ell} + \sum_{\gamma=z-\Delta_{z\ell}+2}^z (z-\gamma+1) = 1+2+\dots+(\Delta_{z\ell}-1) +$$

$$+ \Delta_{z\ell}(z-\Delta_{z\ell}+1-\Delta_{z\ell}+1) + (\Delta_{z\ell}-1) + (\Delta_{z\ell}-2) + \dots + 1 = \Delta_{z\ell}(z-\Delta_{z\ell}+1)/18/$$

Так как для вычисления элемента $h_{\alpha\beta}^{\gamma}$ согласно /12/ требуется $\sim \beta$ операций типа сравнения, то для вычисления всех элементов матрицы H^{γ} потребуется $\sim \Delta_{z\ell}^{(\gamma)} \sum_{\beta=0}^{\beta} \beta = \Delta_{z\ell}^{(\gamma)} \frac{\beta(\beta+1)}{2}$ операций. Отсюда с учетом /18/ получаем оценку /14/ для π_{γ} :

$$\pi_{\gamma} = \sum_{\gamma=1}^z \Delta_{z\ell}^{(\gamma)} \frac{\beta(\beta+1)}{2} \sim \beta^2 \Delta_{z\ell} (z-\Delta_{z\ell}).$$

Из /17/ следует, что при последовательном вычислении матриц всякий раз требуется память для хранения не более $\Delta_{z\ell}$ строк. При этом, если $\gamma < z-\ell+1$, то имеет место неравенство

$$\min \{ \gamma, \ell \} < \min \{ \ell, z-\ell+1 \} = \Delta_{z\ell},$$

т.е. максимальный номер строки матрицы H^{γ} не превышает $\Delta_{z\ell}$.

При $\gamma > z-\ell+1$ имеем равенство $\max \{ 1, \ell-z+\gamma \} = \ell-z+\gamma$, т.е. с ростом γ увеличивается минимальный номер строки матрицы H^{γ} /см.

рис.1/ и в памяти освобождаются строки с номерами α , $\alpha = 1, \ell-z+\gamma-1$.

Поэтому при $\gamma > z-\ell+1$ вновь вычисленный элемент $h_{\alpha\beta}^{\gamma}$ можно сместить в строку с номером $\alpha - (\ell-z+\gamma) + 1$. Это смещение можно осуществить путем последовательного вычисления матриц $\hat{H}^{\gamma} = (\hat{h}_{\alpha\beta}^{\gamma})$, $1 \leq \alpha \leq$

$\leq \min \{ \gamma, \Delta_{z\ell}, z-\gamma+1 \}$, $\beta = \bar{a}, \bar{b}$, аналогичных H^{γ} : при $\gamma < z-\ell+1$ имеем

$\hat{H}^{\gamma} = H^{\gamma}$, при значениях $\gamma > z-\ell+1$ для $1 \leq \alpha \leq z-\ell$ рекуррентное соотношение /12/ преобразуется в

$$\hat{h}_{\alpha\beta}^{\gamma} = \max \{ \hat{h}_{\alpha+\varphi}^{\gamma-1}, \max_{0 < \beta' < \beta} [\hat{h}_{\alpha\beta-\beta'}^{\gamma-1} + \tilde{f}_{\gamma}(\beta')] \}, \quad /12'/$$

а при $\gamma > z-\ell+1$, $z-\ell+1 < \ell$ для $\alpha = z-\ell+1$ используется рекуррентное соотношение

$$\hat{h}_{z-\ell+1\beta}^{\gamma} = \max \{ \hat{h}_{\alpha-\ell+\varphi}^{\gamma-1}, \max_{0 < \beta' < \beta} [\hat{h}_{z-\ell+1\beta-\beta'}^{\gamma-1} + \tilde{f}_{\gamma}(\beta')] \}. \quad /12''/$$

При $\gamma > z-\ell+1$ элементы матрицы \hat{H}^{γ} получаются при помощи пересчета элементов матрицы $\hat{H}^{\gamma-1}$ справа налево и сверху вниз.

Количество строк матриц \hat{H}^{γ} в зависимости от γ показано на рис. 2 а в случае $\ell \leq z-\ell+1$ и на рис. 2 в в случае $\ell > z-\ell+1$.

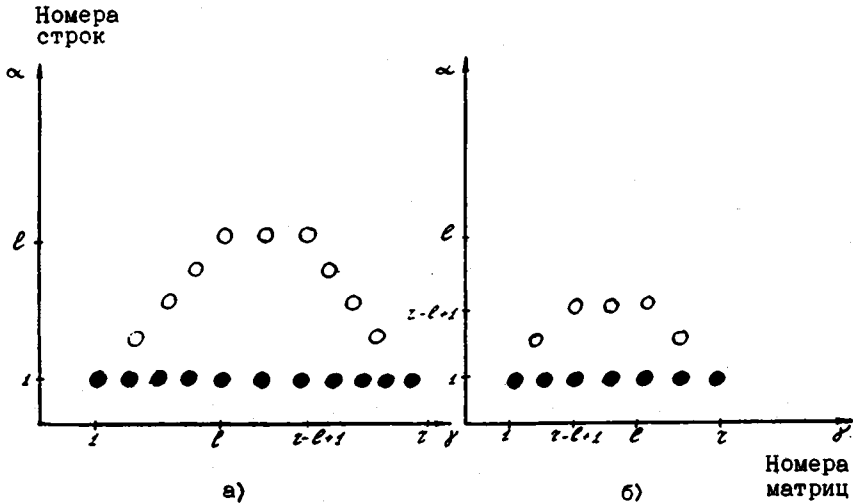


Рис.2. Зависимость количества строк матриц H^γ от значений γ

○ - Максимальный номер строки; ● - минимальный номер строки.

Таким образом, при всех $\gamma = \overline{1, z}$ память, используемая для вычисления элементов матрицы H^γ , не превосходит $\Delta_{z\ell} v$, т.е. $\pi_2 \sim \Delta_{z\ell} v$, и значит, оценка /14/, а вместе с этим и лемма I доказаны полностью.

В дальнейшем под алгоритмом $\mathcal{H}_2^z(v, \ell)$ для вычисления вектора $(h_{z0}^z, \dots, h_{z\ell}^z)$ будем понимать описанный модифицированный алгоритм.

Л е м м а 2. Задача /6/ - /10/ может быть решена ценою:

$$\pi_2 \sim \beta^2 (z - \Delta_{z\ell}) \Delta_{z\ell} v, \quad \pi_2 \sim \Delta_{z\ell} \beta.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Действительно, по лемме I, можно получить вектор $(h_{z0}^z, \dots, h_{z\ell}^z)$, затратив при этом количество операций $\pi_2 \sim \beta^2 (z - \Delta_{z\ell}) \Delta_{z\ell}$ и память $\pi_1 \sim \Delta_{z\ell} \beta$. Последний элемент $h_{z\ell}^z$ этого вектора есть, по определению, искомый оптимум задачи /6/- /10/. Осталось найти допустимый набор (u_1^*, \dots, u_z^*) , при котором

$$h_{z\ell}^z = \sum_{i=1}^z \tilde{f}_i(u_i^*).$$

Предположим, что мы уже нашли u_{p+1}^*, \dots, u_z^* , тогда u_p^* находится следующим образом. Положим

$$\beta_p = \beta - \sum_{i=p+1}^z u_i^*, \quad \Omega = \{i | u_i^* \neq 0, p+1 \leq i \leq z\}, \quad \ell_p = \ell - |\Omega|.$$

Далее действуем по алгоритму $\mathcal{H}_p^p(\beta_p, \ell_p)$. Если $p \leq z - \ell + 1$, то из

$$h_{z\ell}^z = \min_{\gamma' \leq p} \max_{0 \leq u \leq \beta_p} [h_{z\ell}^{\gamma'-1}(\beta_p - u) + \tilde{f}_{\gamma'}(u)] \quad /19/$$

находим γ^* и u^* такие, что

$$h_{z\ell}^z = h_{z\ell}^{\gamma^*-1}(\beta_p - u^*) + \tilde{f}_{\gamma^*}(u^*).$$

Если $\rho > z - l + 1$, то при $y' > z - l + 1$ рекуррентное соотношение /19/ заменяется на

$$h_{z\rho\rho}^{\rho} = \min_{y' \leq \rho} \max_{0 < u' \leq \rho} [h_{z\rho\rho}^{y'-1} \tilde{f}_{y'}(u')], \quad /19'/$$

и y' и u' находятся из $h_{z\rho\rho}^{\rho} = h_{z\rho\rho}^{y''} - u'' + \tilde{f}_{y''}(u'')$. Так как $\sum_{i=1}^z v_i \leq l$, то, очевидно, что для решения задачи /6/ - /10/ необходимо количество операций $\pi_2 \sim \beta^2 (z - \Delta_{z\rho}) \Delta_{z\rho} l$ при памяти π_2 не более $\Delta_{z\rho} \beta$, следовательно, лемма 2 доказана. Алгоритм решения задачи /6/ - /10/ будем обозначать через $\mathcal{A}'_2(\beta, l)$.

Описание алгоритма \mathcal{A}'

Алгоритм \mathcal{A}' состоит из трех этапов.

Этап I. Вычисление матрицы $(\sigma_{k\beta})$, $k = \overline{1, N}$, $\beta = \overline{0, b}$. Элементы $\sigma_{k\beta}$ k -й строки матрицы равны значениям $h_{z\rho\rho}^{z_k}$ получаемым из задачи /6'/ - /10'/, которая является модификацией задачи /6/ - /10/ при $\tilde{f}_i(u_i) = f_{\rho_{k-1}+i}(u_i)$, $v_i = x_{\rho_{k-1}+i}$, $u_i = y_{\rho_{k-1}+i}$, $z = z_k$, $l = l_k$.

$$\sum_{i=1}^{z_k} f_{\rho_{k-1}+i}(y_{\rho_{k-1}+i}) \rightarrow \max, \quad /6'/$$

при условии

$$\sum_{i=1}^{z_k} y_{\rho_{k-1}+i} = \beta, \quad /7'/$$

$$\sum_{i=1}^{z_k} x_{\rho_{k-1}+i} \leq l_k, \quad /8'/$$

$$x_{\rho_{k-1}+i} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, z_k} \quad /9'/$$

$$y_{\rho_{k-1}+i} \in \{0, 1, \dots, \beta \cdot x_{\rho_{k-1}+i}\}, \quad i = \overline{1, z_k}. \quad /10'/$$

Этап I состоит из подэтапов с номерами $k = \overline{1, N}$, на каждом из которых вычисляется вектор $(h_{z_k 0}^{z_k}, \dots, h_{z_k b}^{z_k})$ с помощью алгоритма $\mathcal{A}'_2(\beta, l_k)$.

$\mathcal{A}'_2(\beta, l_k)$.

Этап II. Решение задачи

$$J_N(\beta) = \max_{\sum_{k=1}^N \beta_k \leq l} \sum_{k=1}^N \sigma_{k\beta} = \sum_{k=1}^N \sigma_{k\beta^*} \quad /20/$$

осуществляется алгоритмом динамического программирования (ДП).

Этап III. Нахождение оптимального набора $\{y_j^*\}$, $j = \overline{1, n}$, состоит из подэтапов $k = \overline{1, N}$. На каждом из них решается задача /6'/ - /10'/ при условии, что /7'/ заменено на /7''/ с помощью алгоритма $\mathcal{A}'_2(\beta_k^*, l_k)$.

$$\sum_{i=1}^{z_k} y_{\rho_{k-1}+i} = \beta_k^*. \quad /7''/$$

Т е о р е м а I. Решение задачи A' может быть получено с помощью алгоритма \mathcal{A}' ценюв:

$$\pi_{\mathcal{A}} \sim b^2 R \mathcal{L} \max\{\mathcal{L}, N\}, \quad \pi_{\mathcal{A}} \sim b \cdot (\Delta + N). \quad /21/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сгруппировав индексы j по множествам J_K , из определения оптимума $J_N(b)$ получим:

$$J_N(b) = \max_{\sum_{k=1}^N \beta_k \leq b} \sum_{k=1}^N \max_{j \in J_k} \sum_{j \in J_k} f_j(y_j) - \sum_{j \in J_k} y_j = \beta_k, \\ \sum_{j \in J_k} x_j \leq l_k, \\ x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in J_k,$$

$$y_j \in \{0, 1, \dots, \beta_k \cdot x_j\}, \quad j \in J_k.$$

$$= \max_{\sum_{k=1}^N \beta_k \leq b} \sum_{k=1}^N \max_{i=1}^{r_k} \sum_{i=1}^{r_k} f_{\rho_{k-1+i}}(y_{\rho_{k-1+i}}) - \sum_{i=1}^{r_k} y_{\rho_{k-1+i}} = \beta_k, \\ \sum_{i=1}^{r_k} x_{\rho_{k-1+i}} \leq l_k,$$

$$x_{\rho_{k-1+i}} \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, r_k},$$

$$y_{\rho_{k-1+i}} \in \{0, 1, \dots, \beta_k \cdot x_{\rho_{k-1+i}}\}, \quad i = \overline{1, r_k}.$$

Отсюда следует, что под знаком суммы по K стоит значение максимума целевой функции задачи /6'/ - /10'/, т.е. элемент $\mathcal{C}_K \beta_K$. Отсюда получаем задачу /20/ второго этапа, для решения которой необходимо предварительно вычислить матрицу $(\mathcal{C}_{K\beta})$, $K = \overline{1, N}$, $\beta = \overline{0, b}$. Решив задачу /20/, получим величину оптимума $J_N(b)$ исходной задачи A' и набор $(\beta_1^*, \dots, \beta_N^*)$. Для полного решения задачи A' теперь необходимо определить оптимальный набор переменных $\{y_j\}$, $j = \overline{1, n}$. Поскольку $\beta_k^* = \sum_{j \in J_k} y_j^*$, то для определения переменных $\{y_j^*\}$, $j \in J_k$, достаточно рассмотреть задачу /6'/, /7'/, /8'/ - /10'/.

Таким образом рассмотрение на последнем этапе задач /6'/, /7'/, /8'/ - /10'/ для каждого $K = \overline{1, N}$ завершает решение исходной задачи A' .

Докажем справедливость оценки /21/. Для этого определим трудоемкость каждого этапа. На этапе I для вычисления k -й строки матрицы $(b_{k\beta})$, согласно лемме I необходимо затратить порядка $b^2 \Delta_{z_k} \rho_k (z_k - \Delta_{z_k} \rho_k)$ элементарных операций при памяти $\Delta_{z_k} \rho_k \cdot b$. Следовательно, для вычисления всей матрицы $(b_{k\beta})$, $k = \overline{1, N}$, $\beta = \overline{0, b}$, потребуется количество операций $\pi_1 \sim \sum_{k=1}^N b^2 \Delta_{z_k} \rho_k (z_k - \Delta_{z_k} \rho_k)$. Так как каждая строка матрицы $(b_{k\beta})$ вычисляется независимо от остальных, то память $\pi_1 \sim b \cdot \max_{1 \leq k \leq N} \Delta_{z_k} \rho_k = b \cdot \Delta$.

На этапе II имеем общую задачу динамического программирования [5], которую можно решить ценою:

$$\pi_2 \sim b^2 N, \quad \pi_3 \sim bN.$$

На этапе III для нахождения оптимального набора $\{y_j^*\}$, $j = \overline{1, r}$, с учетом леммы 2 необходимы:

$$\pi_{ii} \sim \sum_{k=1}^N \beta_k^{*2} (z_k - \Delta_{z_k} \rho_k) \rho_k, \quad \pi_{ii} \leq \pi_3.$$

Общая оценка трудоемкости решения задачи A' :

$$\begin{aligned} \pi_{A'} &= \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 \sim \sum_{k=1}^N b^2 (z_k - \Delta_{z_k} \rho_k) \Delta_{z_k} \rho_k + b^2 N + \\ &+ \sum_{k=1}^N \beta_k^{*2} (z_k - \Delta_{z_k} \rho_k) \Delta_{z_k} \rho_k \rho_k, \\ \pi_{A'} &= \max \{ \pi_1 + \pi_2; \pi_{ii} \} \sim b(\Delta + N). \end{aligned}$$

Огрубляя оценку $\pi_{A'}$, запишем ее в более компактной форме:

$$\pi_{A'} \sim b^2 R \mathcal{L} \cdot \max \{ \mathcal{L}, N \}.$$

Справедливость оценки /21/ доказана, этим завершается доказательство теоремы I.

3. Метод решения задачи A''

Пусть $\tilde{f}_n(\bar{b})$, где $\bar{b} = (b_1, \dots, b_n)$ - максимум исходной задачи I/ при условиях /2"/, /3/, /4/. Требуется определить допустимый набор (x_1^*, \dots, x_n^*) , при котором

$$\tilde{f}_n(\bar{b}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j^*.$$

Как и в задаче A' , обозначим $z_k = |J_k|$, $k = \overline{1, N}$, и для определенности будем полагать, что $J_k = \{j_{k-1}+1, \dots, j_k\}$, где $j_k = \sum_{t=1}^k z_t$, $j_0 = 0$.

Сформулируем для целых $z, \rho \geq 0$ следующую вспомогательную задачу. Найти допустимый набор (v_1^*, \dots, v_z^*) , при котором достигается максимум функции

$$\sum_{i=1}^z \tilde{c}_i v_i \rightarrow \max, \quad /22/$$

при условии:

$$\sum_{i=1}^z \tilde{a}_i v_i \leq \bar{\beta}, \quad /23/$$

$$\sum_{i=1}^z v_i \leq \ell, \quad /24/$$

$$v_i \in \{0, 1\}, \quad i = \overline{1, z}. \quad /25/$$

где $\tilde{a}_i, i = \overline{1, z}; \bar{\beta}$ - векторы с целочисленными неотрицательными компонентами.

Через $h_{\ell \bar{\beta}}^z$ обозначим максимум целевой функции /22/ в задаче /22/ - /25/. Нетрудно видеть, что эта величина при условии $v_i = 0$ равна $h_{\ell \bar{\beta}}^{z-1}$, а при условии $v_z = 1$ соответственно $h_{\ell - 1, \bar{\beta} - \tilde{a}_z}^{z-1} + \tilde{c}_z$. Отсюда имеем следующее рекуррентное соотношение

$$h_{\ell \bar{\beta}}^z = \max \{ h_{\ell \bar{\beta}}^{z-1}, h_{\ell - 1, \bar{\beta} - \tilde{a}_z}^{z-1} + \tilde{c}_z \}. \quad /26/$$

Очевидно, что рекуррентное соотношение, аналогичное /26/, может быть выписано для любых значений $\alpha, \alpha = \overline{1, \ell}, \gamma, \gamma = \overline{1, z}, \bar{\beta}, 0 \leq \bar{\beta} \leq \bar{b}$,

$$h_{\alpha \bar{\beta}}^\gamma = \max \{ h_{\alpha \bar{\beta}}^{\gamma-1}, h_{\alpha - 1, \bar{\beta} - \tilde{a}_\gamma}^{\gamma-1} + \tilde{c}_\gamma \}, \quad /27/$$

при этом полагаем $h_{\alpha - 1, \bar{\beta} - \tilde{a}_\gamma}^{\gamma-1} + \tilde{c}_\gamma$ равным нулю, если хотя бы одна из величин $\alpha - 1, \gamma - 1$ или одна координата вектора $\bar{\beta} - \tilde{a}_\gamma$ отрицательны.

Л е м м а 3. Вектор $(h_{\ell \bar{\beta}}^z), 0 \leq \bar{\beta} \leq \bar{b}$, значений оптимумов задач /22/ - /25/ при $0 \leq \bar{\beta} \leq \bar{b}$ может быть найден ценю:

$$\pi_3 \sim (z - \Delta_{z\ell}) \Delta_{z\ell} \prod_{i=1}^m b_i, \quad \pi_3 \sim \Delta_{z\ell} \prod_{i=1}^m b_i.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Аналогично алгоритму $\mathcal{A}_z'(\beta, \ell)$, описанному при доказательстве леммы I, вычисляем последовательность матриц $\tilde{H}^\gamma, \gamma = \overline{1, z}$, где

$$\tilde{H}^\gamma = (\tilde{h}_{\alpha \bar{\beta}}^\gamma), \quad 1 \leq \alpha \leq \min \{ \gamma, \Delta_{z\ell}, z - \gamma + 1 \}, \quad 0 \leq \bar{\beta} \leq \bar{b}.$$

При этом рекуррентное соотношение /12/ заменяется на /27/, а /12'/ и /12"/ заменяются соответственно на

$$\tilde{h}_{\alpha \bar{\beta}}^\gamma = \max \{ \tilde{h}_{\alpha + 1, \bar{\beta}}^{\gamma-1}, \tilde{h}_{\alpha - 1, \bar{\beta} - \tilde{a}_\gamma}^{\gamma-1} + \tilde{c}_\gamma \}, \quad /27'/$$

$$\tilde{h}_{z - \ell + 1, \bar{\beta}}^\gamma = \max \{ \tilde{h}_{z - \ell + 1, \bar{\beta}}^{\gamma-1}, \tilde{h}_{z - \ell + 1, \bar{\beta} - \tilde{a}_\gamma}^{\gamma-1} + \tilde{c}_\gamma \}. \quad /27''/$$

В каждой строке матрицы \tilde{H}^γ имеем $\prod_{i=1}^m b_i$ элементов, а так как для вычисления каждого элемента требуется фиксированное число операций типа сравнения, определяемое соотношением /27/, то для вычисления всех элементов матрицы \tilde{H}^γ требуется $\Delta_{z\ell}^{(\gamma)} \prod_{i=1}^m b_i$ операций. Отсюда с учетом /18/ получаем оценку для π_3 .

$$x_3 \sim \sum_{\gamma=1}^z \Delta_{z\ell}^{(\gamma)} \prod_{i=1}^m v_i \sim (z - \Delta_{z\ell}) \Delta_{z\ell} \prod_{i=1}^m v_i$$

Как следует из соотношения /17/, максимальное число строк в матрице \tilde{H}^{γ} равно $\Delta_{z\ell}$, поэтому необходимая для вычисления вектора $(\tilde{h}_{\ell\bar{\beta}}^z)$, $0 < \bar{\beta} < \bar{b}$, память равна $\Delta_{z\ell} \prod_{i=1}^m v_i$. Следовательно, лемма 3 доказана.

В дальнейшем алгоритм нахождения вектора $(\tilde{h}_{\ell\bar{\beta}}^z)$, $0 < \bar{\beta} < \bar{b}$, будем обозначать через $B_z(\bar{b}, \ell)$. Через $h_{\ell\bar{\beta}}^{z; \kappa}$ обозначим оптимум функции

$$\sum_{j=1}^{p_{\kappa-1}+z} c_j x_j \rightarrow \max,$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{p_{\kappa-1}+z} \bar{a}_j x_j \leq \bar{\beta},$$

$$\sum_{j \in I_p} x_j \leq \ell_p, \quad p = \overline{1, \kappa-1},$$

$$\sum_{j=1}^z x_j \leq \ell$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{1, p_{\kappa-1}+z}.$$

Алгоритм A'' решения задачи A''

I этап. Нахождение оптимума $\tilde{f}_N(\bar{b})$ задачи A'' . Этап I состоит из N подэтапов с номерами $\kappa, \kappa = \overline{1, N}$, на каждом из которых работает алгоритм $B_z^{(\kappa)}(\bar{b}, \ell)$, $\kappa = \overline{1, N}$, который отличается от алгоритма $B_z(\bar{b}, \ell)$ тем, что в задаче /22/ - /25/ величины $\bar{a}_i, \bar{c}_i, v_i, z$ и ℓ принимают значения $\bar{a}_i = \bar{a}_{p_{\kappa-1}+i}, \bar{c}_i = \bar{c}_{p_{\kappa-1}+i}, v_i = v_{p_{\kappa-1}+i}, z = z_{\kappa}, \ell = \ell_{\kappa}$ и что при $\kappa = \overline{2, N}$ рекуррентное соотношение /27/ при $\gamma=1, \ell=1$ заменяется на

$$h_{z\bar{\beta}}^{z; \kappa} = \max \{ h_{\ell_{\kappa-1}+z; \kappa-1}^{z_{\kappa-1}; \kappa-1}, h_{\ell_{\kappa-1}+z; \kappa-1}^{z_{\kappa-1}; \kappa-1} + c_{p_{\kappa-1}+z} \},$$

а при $\gamma = z, z_{\kappa} - \ell_{\kappa} + 1, \ell = 1$ на

$$h_{z\bar{\beta}}^{z; \kappa} = \max \{ h_{z; \bar{\beta}}^{z-1; \kappa}, h_{\ell_{\kappa-1}+z; \kappa-1}^{z_{\kappa-1}; \kappa-1} + c_{p_{\kappa-1}+z} \}.$$

II этап. Определение оптимального набора (x_1^*, \dots, x_n^*) . Этот этап состоит из $\sum_{\kappa=1}^N \ell_{\kappa}$ подэтапов. Известна величина оптимума $\tilde{f}_N(\bar{b})$. Вновь решаем задачу A'' по алгоритму первого этапа до тех пор, пока впервые не получим величину $h_{\ell_{\kappa}^*; \bar{\beta}^*}^{z^*; \kappa^*}$, равную $\tilde{f}_N(\bar{b})$. Поскольку $h_{\ell_{\kappa}^*; \bar{\beta}^*}^{z^*; \kappa^*}$ - впервые полученный оптимум, то в соответствии с /27/, /27'/, /27"/, имеем

$$h_{\alpha^* \beta^*}^{\gamma^*, \kappa^*} = \begin{cases} h_{\alpha^* - 1, \beta^* - \bar{a}_{\gamma^*}}^{\gamma^* - 1, \kappa^*} + c_{\gamma^*}, \\ h_{\alpha^*, \beta^* - \bar{a}_{\gamma^*}}^{\gamma^* - 1, \kappa^*} + c_{\gamma^*}. \end{cases}$$

Это означает, что $x_{\gamma^*} = 1$, а все последующие $x_{\mu} = 0$ при $\mu = \gamma^* + 1, \dots, n$. Далее переходим к подэтапу 2.

Рассматриваем величину $h_{\alpha^* - 1, \beta^* - \bar{a}_{\gamma^*}}^{\gamma^* - 1, \kappa^*}$ ($h_{\alpha^*, \beta^* - \bar{a}_{\gamma^*}}^{\gamma^* - 1, \kappa^*}$) как известную величину оптимума задачи A' при условии, что $n = \gamma^* - 1$, $\kappa = \kappa^*$ и что /4/ заменено на

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_{\kappa}} x_j &\leq l_{\kappa}, \quad \kappa = \overline{1, \kappa^* - 1}, \\ \sum_{j \in J_{\kappa^*}} x_j &\leq l_{\kappa^*} - 1 \end{aligned}$$

Отыскав следующий $x_{j_{\mu+1}} = 1$, получим $x_{\mu} = 0$ при $\mu = \overline{\gamma^* + 1, \gamma^* - 1}$. Затем переходим к подэтапу 3. Расчеты повторяются до тех пор, пока не будет найден оптимальный набор (x_1^*, \dots, x_n^*) .

Т е о р е м а 2. Задача A'' может быть решена при помощи алгоритма A'' ценюв:

$$\pi_{x''} \sim N^2 \alpha^2 R \prod_{i=1}^m b_i, \quad \pi_{x''} = \Delta \prod_{i=1}^m b_i, \quad /28/$$

где $\Delta = \max_{1 \leq \kappa \leq N} \min \{ r_{\kappa} - l_{\kappa} + 1, l_{\kappa} \}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сгруппировав индексы j по множествам J_{κ} , $\kappa = \overline{1, N}$, получим:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_n(\bar{b}) &= \max \sum_{\kappa=1}^N \sum_{j \in J_{\kappa}} c_j x_j = \\ &\sum_{\kappa=1}^N \sum_{j \in J_{\kappa}} \bar{a}_j x_j \leq \bar{b}, \\ &\sum_{j \in J_{\kappa}} x_j \leq l_{\kappa}, \quad \kappa = \overline{1, N}, \\ &x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in J_{\kappa}, \quad \kappa = \overline{1, N}. \\ &= \max \sum_{\kappa=1}^N \sum_{j=\rho_{\kappa-1}+1}^{\rho_{\kappa}} c_j x_j \\ &\sum_{\kappa=1}^N \sum_{j=\rho_{\kappa-1}+1}^{\rho_{\kappa}} \bar{a}_j x_j \leq \bar{b}, \\ &\sum_{j=\rho_{\kappa-1}+1}^{\rho_{\kappa}} x_j \leq l_{\kappa}, \quad \kappa = \overline{1, N}, \\ &x_j \in \{0, 1\}, \quad j = \overline{\rho_{\kappa-1}+1, \rho_{\kappa}}, \quad \kappa = \overline{1, N}. \end{aligned}$$

Действительно, последовательно выполняя подэтапы с номерами $\kappa = 1, \overline{N}$ этапа 1, получаем величины $h_{\kappa, \beta}^{z_{\kappa}; \kappa}$, а при $\kappa = N$ имеем равенство $h_{\rho, \beta}^{z_{\rho}; N} = \bar{J}_{\rho}(\bar{b})$, т.е. этап 1 дает значение оптимума задачи A'' . На подэтапе P этапа 2 находится такой номер μ переменной x , что $x_{\mu} = 1$, а при $\mu = \mu + 1, \dots, \mu - 1$ — $x_{\mu} = 0$. Очевидно, что этап 2 устанавливает все те x_j , на которых достигается оптимум задачи A'' . Докажем оценки /28/, определив трудоемкость каждого этапа. Согласно лемме 3, для реализации 1-го этапа необходимо затратить элементарных операций

при памяти $\mathcal{P}_1 \sim \Delta \prod_{i=1}^m b_i$. При выполнении этапа 2 используется схема алгоритма 1-го этапа, поэтому $\mathcal{P}_2 \leq \mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2 \leq \sum_{\kappa=1}^N c_{\kappa} \mathcal{P}_1$,

$$\mathcal{P}_{2\mu} = \mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 \leq N^2 \mathcal{L}^2 R \prod_{i=1}^m b_i; \quad \mathcal{P}_{2\mu} = \max \{ \mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \} \sim \Delta \prod_{i=1}^m b_i.$$

Справедливость оценки /28/ доказана. Этим завершается доказательство теоремы 2.

4. Численный пример

$$\begin{aligned} (2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 8x_4 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 + 7x_8 + 5x_9 + 4x_{10} + 13x_{11} + 8x_{12} + 9x_{13} + 6x_{14} + 7x_{15} + x_{16}) \rightarrow \max \\ \begin{aligned} & x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 7x_6 + 2x_7 + 9x_8 + 7x_9 + \\ & + 8x_{10} + 5x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{14} + 6x_{15} + 16x_{16} \leq 20, \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 3, \\ & x_5 + x_6 + x_7 \leq 2, \\ & x_8 + x_9 + x_{10} \leq 2, \\ & x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 2, \\ & x_{14} + x_{15} + x_{16} \leq 1 \end{aligned} \end{aligned}$$

$$x_j = 0 \text{ или } 1, \quad j = 1, 2, 3, \dots, 16.$$

Для наглядного представления запишем условия задачи в виде таблицы 1.

Таблица 1.

	δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	A
j	1, 2, 3, 4	5, 6, 7	8, 9, 10	11, 12, 13	14, 15, 16	-
c_j	2, 4, 6, 8	1, 2, 3	7, 5, 4	13, 8, 9	6, 7, 1	-
a_j	1, 2, 3, 4	6, 7, 2	9, 7, 8	5, 4, 2	3, 6, 16	20

Процесс решения задачи начинается с 1-го подэтапа этапа 1.

Так как $z_1 = 4$, $c_1 = 3$, то по определению, величина $\Delta_{z_1, c_1} = \min \{ c_1 z_1 - c_1 + 1 \} = 2$. Вычисляем последовательность матриц $\bar{H}^{(k), (1)}$ $y = 1, 4$, где

$$\tilde{H}^{\gamma, (1)} = (\tilde{h}_{\alpha\beta}^{\gamma, (1)}), \quad 1 \leq \alpha \leq \min\{\gamma, 2, 5-\gamma\}, \quad 0 \leq \beta \leq 20.$$

Матрица $\tilde{H}^{\gamma, (1)}$ состоит из одной строки $(\tilde{h}_{1\beta}^{\gamma, (1)})$, $0 \leq \beta \leq 20$, элементы этой строки находятся из следующего соотношения:

$$\tilde{h}_{1\beta}^{\gamma, (1)} = \begin{cases} 0, & \beta < a_1, \\ 1, & \beta \geq a_1. \end{cases}$$

Матрица $\tilde{H}^{2, (1)}$ состоит из двух строк $(\tilde{h}_{1\beta}^{2, (1)})$, $0 \leq \beta \leq 20$, и $(\tilde{h}_{2\beta}^{2, (1)})$, $0 \leq \beta \leq 20$.

Элементы строки $(\tilde{h}_{2\beta}^{2, (1)})$, $0 \leq \beta \leq 20$, находятся справа, налево из рекуррентного соотношения

$$\tilde{h}_{2\beta}^{2, (1)} = \max \{ \tilde{h}_{1\beta}^{2, (1)}, \tilde{h}_{1\beta-a_2}^{2, (1)} + c_2 \},$$

где $\tilde{h}_{1\beta-a_2}^{2, (1)} + c_2$ полагается равным нулю, если $\beta - a_2 < 0$. Элементы строки $(\tilde{h}_{1\beta}^{2, (1)})$, $0 \leq \beta \leq 20$, получаются пересчетом справа налево строки $(\tilde{h}_{1\beta}^{3, (1)})$, $0 \leq \beta \leq 20$, по рекуррентному соотношению $\tilde{h}_{1\beta}^{2, (1)} = \max \{ \tilde{h}_{1\beta}^{3, (1)}, c_2 \}$, где c_2 полагается равным нулю, если $\beta < a_2$. Матрица $\tilde{H}^{3, (1)} = (\tilde{h}_{\alpha\beta}^{3, (1)})$, $1 \leq \alpha \leq 2$, $0 \leq \beta \leq 20$,

получается пересчетом матрицы $\tilde{H}^{2, (1)}$ справа налево и сверху вниз по рекуррентным соотношениям:

$$\tilde{h}_{1\beta}^{3, (1)} = \max \{ \tilde{h}_{2\beta}^{2, (1)}, \tilde{h}_{2\beta-a_3}^{2, (1)} + c_3 \},$$

$$\tilde{h}_{2\beta}^{3, (1)} = \max \{ \tilde{h}_{2,\beta}^{2, (1)}, \tilde{h}_{2\beta-a_3}^{2, (1)} + c_3 \},$$

где $\tilde{h}_{2\beta-a_3}^{2, (1)} + c_3$ и $\tilde{h}_{2,\beta-a_3}^{2, (1)} + c_3$ полагается равным нулю, если $\beta - a_3 < 0$.

Матрица $\tilde{H}^{4, (1)}$ состоит из одной строки $(\tilde{h}_{1\beta}^{4, (1)})$, $0 \leq \beta \leq 20$,

элементы которой находятся из рекуррентного соотношения:

$$\tilde{h}_{1\beta}^{4, (1)} = \max \{ \tilde{h}_{2\beta}^{3, (1)}, \tilde{h}_{2\beta-a_4}^{3, (1)} + c_4 \}.$$

На этом I-й подэтап этапа I свою работу заканчивает.

Так как $\beta_2 = 2$, $\gamma_2 = 3$, то $\Delta_{\gamma_2 \beta_2} = 2$. Второй подэтап этапа I заключается в вычислении последовательности матриц $\tilde{H}^{\gamma, (2)}$, $\gamma = 1, 2, 3$, где

$$\tilde{H}^{\gamma, (2)} = (\tilde{h}_{\alpha\beta}^{\gamma, (2)}), \quad 1 \leq \alpha \leq \min\{\gamma, 2, 4-\gamma\}, \quad 0 \leq \beta \leq 20,$$

Элементы матриц $\tilde{H}^{\gamma, (2)}$ вычисляются по аналогии с элементами матриц $\tilde{H}^{\gamma, (1)}$, но для вычисления строк $(\tilde{h}_{1\beta}^{\gamma, (2)})$, $0 \leq \beta \leq 20$, и $(\tilde{h}_{1\beta}^{2, (2)})$,

$0 \leq \beta \leq 20$, используются следующие рекуррентные соотношения:

$$\tilde{h}_{1\beta}^{\gamma, (2)} = \max \{ \tilde{h}_{1\beta}^{\gamma, (1)}, \tilde{h}_{1\beta-a_5}^{\gamma, (1)} + c_5 \}$$

$$\tilde{h}_{1\beta}^{2, (2)} = \max \{ \tilde{h}_{1\beta}^{3, (2)}, \tilde{h}_{1\beta-a_6}^{3, (2)} + c_6 \},$$

где $(\tilde{h}_{\beta-\alpha_3}^{(1)} + c_3)$, $(\tilde{h}_{\beta-\alpha_6}^{(1)} + c_6)$ полагаются равными нулю как только $\beta-\alpha_3 < 0$; $\beta-\alpha_6 < 0$. Остальные подэтапы этапа I работают аналогично.

На этом этап I свою работу заканчивает. В результате работы этапа II, в качестве подэтапов которого используется алгоритм этапа I, получаем вектор $x = (1011001000101100)$, на котором достигается оптимум $\tilde{J}_{16}^{(20)} = 2+6+8+3+13+9+6=47$. Результат последовательного вычисления матриц \tilde{H}^y приведен в табл. 2.

Таблица 2

$\beta \backslash \alpha$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
$\tilde{H}^{(1)}$ $\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(1)}$	0	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
$\tilde{H}^{(2)}$ $\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(2)}$	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(2)}$	0	2	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(2)}$	0	2	4	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
$\tilde{H}^{(3)}$ $\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(3)}$	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(3)}$	0	2	4	6	8	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(3)}$	0	2	4	6	8	10	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
$\tilde{H}^{(4)}$ $\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(4)}$	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(4)}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(4)}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18	18
$\tilde{H}^{(5)}$ $\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(5)}$	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(5)}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	18	18	18	18	18	19	19	19	19	19	19
	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(5)}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	18	18	18	18	18	19	19	19	19	19	19
$\tilde{H}^{(6)}$ $\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(6)}$	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(6)}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	18	18	18	18	18	19	20	20	20	20	20
	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(6)}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	18	18	18	18	18	19	20	20	20	20	20
$\tilde{H}^{(7)}$ $\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(7)}$	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(7)}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	19	21	21	21	21	21	21	22	23	23	23
	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(7)}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	19	21	21	21	21	21	21	21	23	25	26
$\tilde{H}^{(8)}$ $\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(8)}$	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(8)}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	19	21	21	21	21	21	22	24	26	26	28
	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(8)}$	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	19	21	21	21	21	21	22	24	26	26	28
$\tilde{H}^{(9)}$ $\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(9)}$	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(9)}$	0	2	4	6	8	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	32	34	34	34	34	34
	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(9)}$	0	2	4	6	8	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	32	34	34	34	34	34
$\tilde{H}^{(10)}$ $\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(10)}$	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(10)}$	0	2	4	6	8	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	40	42
	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(10)}$	0	2	4	6	8	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	40	42
$\tilde{H}^{(11)}$ $\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(11)}$	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(11)}$	0	2	4	11	13	15	17	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	41	43	43	45
	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(11)}$	0	2	4	11	13	15	17	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	44	47
$\tilde{H}^{(12)}$ $\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(12)}$	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(12)}$	0	2	4	11	13	15	17	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	47
	$\tilde{h}_{\beta-\alpha}^{(12)}$	0	2	4	11	13	15	17	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	47

В заключение автор выражает благодарность Э.Х.Гимади за постоянное внимание и помощь при написании данной работы.

Поступила в ред.-изд.отдел
22 ноября 1973 г.

Л и т е р а т у р а

1. Казакова М.Ф. Метод типа "ветвей и границ" для обобщенной задачи о ранце. - В кн. Экономика и математические методы. 1971, т.7. вып. 5, стр. 737-741.

2. Литвак В.Г., Нейфельт А.В. Об отыскании верхней границы для задачи о ранце с дополнительными ограничениями. - "Кибернетика", № 1, 1971.

3. Krawczyk R. Die Anwendung der Methode "Branch and Bound" aus ein verallgemeinertes Knapsack - problem. "Andervandte Information", 1971, 13, NIO, 461-468.

4. Майзлин И.Е., Трошин Л.И. Решение задачи оптимального планирования развития производственной системы. В кн.: Математические вопросы управления производством. Вып. 3, М. 1971, стр. 40-45.

5. Беллман Р. Динамическое программирование, М. ИЛ., 1960.