Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1974 г. выпуск 13.
УДК.512.25.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ СТАНДАРТИЗАЦИИ. II

В.Л.Береснев

Работа посвящена исследованию задачи выбора оптимального набора [1],[2], имеющей широкое приложение в стандартизации. В первой части работы [2] описан класс так называемых регулярных матриц и построен эффективный алгоритм решения задачи выбора оптимального набора с регулярной матрицей. Вторая часть работы посвящена вопросу распознавания регулярных матриц. В § 4 для матриц, имеющих попарно различные элементы в каждом столбце, описан алгоритм, позволяющий по исходной матрице либо построить, т.е. установить регулярность, эквивалентную ей матрицу, удовлетворяющую свойству связности, либо убедиться, что таковой матрицы не существует.

Алгоритм распознавания регулярной матрицы.

1°. Пусть полином $h(x_1,\dots,x_m)$ соответствует матрице $G=(g_{ij})$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$. Запись полинома $h(x_1,\dots,x_m)$ в виде

$$h(x_1,\dots,x_m)=\sum_{t=1}^{T}\left\{a_0^t+\sum_{\ell=1}^{m-1}a_\ell^t\, x_{i_1}^t\dots x_{i_\ell}^t\right\}$$

где $i_1^t,\dots,i_m^t$, $t=1,\dots,T$, - перестановка множества $\{1,\dots,m\}$; $a_\ell^t\geqslant 0$, для любых t,ℓ, будем называть представлением полинома $h(x_1,\dots,x_m)$. Рассматривая различные представления полинома $h(x_1,\dots,x_m)$, будем получать различные матрицы, эквивалентные матрице G. Если среди этих матриц найдется матрица, удовлетворяющая свойству связности, то G - регулярная матрица. Таким образом, задача распознавания регулярной матрицы состоит в отыскании нужного представления полинома $h(x_1,\dots,x_m)$. Далее нам будет удобней иметь дело не с множеством членов полинома $h(x_1,\dots,x_m)$, а с некоторой совокупностью подмножеств множества $\mathcal{U}=\{1,\dots,m\}$. Поэтому перейдем к иной формулировке задачи распознавания.

Рассмотрим некоторое представление полинома $h(x_1,\dots,x_m)$ и построим по нему множество

$$\mathcal{S}=\{S\subset\mathcal{U}/S=\{i_1^t,\dots,i_\ell^t\},\ \ell\geqslant 1,\ a_\ell^t>0\}\cup\{\mathcal{U}\}$$

Очевидно, множество $\mathcal{S}$ не зависит от представления полинома $h(x_1,\dots,x_m)$, которое использовалось для его построения.

Упорядоченное множество $(S_p)=(S_1,\dots,S_m)$ назовем <u>последовательностью</u>, если для всякого $p=1,2,\dots,m$ либо $S_p=\varnothing$, либо $S_p\in\mathcal{S}$, $|S_p|=p$, $S_p\supset S_q$ при $q<p$. Заметим, что последовательность (S_p) задает на множестве $\mathcal{U}$ отношение квазипорядка. Действительно, $i\leqslant k$, если для всякого S_p, $k\in S_p$, имеем $i\in S_p$.

Последовательности $\{(S_p^t)\}$, $t=1,\dots,T$, назовем регулярными, если система отношений квазипорядка, задаваемая этими последовательностями, регулярная. Если всякое $S \in \mathcal{S}$ является элементом хотя бы одной последовательности (S_p^t), то будем говорить о последовательностях, покрывающих множество $\mathcal{S}$. Множество $\mathcal{S}$ будем называть <u>регулярным</u>, если существуют регулярные последовательности, покрывающие $\mathcal{S}$.

Заметим, что если найдены регулярные последовательности, покрывающие $\mathcal{S}$, то тем самым найдено нужное представление полинома $h(x_1,\dots,x_m)$. И обратно, если $\mathcal{S}$ – нерегулярное множество, то $\mathcal{C}$ – нерегулярная матрица. Таким образом, задача распознавания сводится к задаче построения регулярных последовательностей, покрывающих множество $\mathcal{S}$.

Рассмотрим некоторые свойства регулярных последовательностей. Будем говорить, что множество S сравнимо с множеством R, если либо $S \subset R$, либо $R \subset S$.

Л е м м а 4. Пусть $\{(S_p^t)\}$, $t=1,\dots,T$, – регулярные последовательности и пусть множества $S_p^{t_1}$, $S_q^{t_2}$ сравнимы. Тогда множество $S_z^{t_3}$, $t_1<t_3<t_2$, сравнимо либо с множеством $S_p^{t_1}$, либо с множеством $S_q^{t_2}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Множества $S_p^{t_1}$, $S_q^{t_2}$, $S_z^{t_3}$ будем считать непустыми, поскольку в противном случае утверждение очевидно. Пусть, для определенности, $S_p^{t_1} \supset S_q^{t_2}$. Предположим, что $S_z^{t_3}$ несравнимо ни с $S_p^{t_1}$, ни с $S_q^{t_2}$. Тогда найдется $i \in S_q^{t_2}$ такой, что $i \notin S_z^{t_3}$, и найдется $k \in S_z^{t_3}$ такой, что $k \notin S_p^{t_1}$. В силу $S_p^{t_1} \supset S_q^{t_2}$ имеем $i \in S_p^{t_1}$, $k \notin S_q^{t_2}$. В результате получаем $i \underset{t_1}{<} k$, $k \underset{t_3}{<} i$, $i \underset{t_2}{<} k$, но эти соотношения противоречат предположению о регулярности последовательностей. Лемма доказана.

Л е м м а 5. Если $\{(S_p^t)\}$, $t=1,\dots,T$, – регулярные последовательности, а (t_0,p_0) – произвольная пара номеров, то последовательности $\{(\hat{S}_p^t)\}$, $t=1,\dots,T$, $\hat{S}_{p_0}^{t_0}=\emptyset$, $\hat{S}_p^t=S_p^t$ при $(t,p)\neq(t_0,p_0)$ регулярные.

Л е м м а 6. Если $\{(S_p^t)\}$, $t=1,\dots,T$, – регулярные последовательности, а упорядоченное множество $(S_1^{t_0},\dots,S_{p_0-1}^{t_0}, S_{p_0}^{t_0+1}, S_{p_0-1}^{t_0},\dots,S_m^{t_0})$, $t_0<T$, – последовательность, то последовательности $\{(\hat{S}_p^t)\}$, $t=1,\dots,T$, $\hat{S}_{p_0}^{t_0}=S_{p_0}^{t_0+1}$, $\hat{S}_{p_0}^{t}=S_p^t$ при $(t,p)\neq(t_0,p_0)$ регулярные.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть последовательности $\{(S_p^t)\}$, $\{(\hat{S}_p^t)\}$ задают системы отношений $\{\underset{t}{\leqslant}\}$. $\{\underset{t}{\lesssim}\}$. Пусть найдется пара i, k такая, что $i \underset{t_0}{\lesssim} k$, $i \underset{t_0}{=} k$. Тогда $i \in S_{p_0}^{t_0+1}$, $k \notin S_{p_0}^{t_0+1}$ и, следовательно, $i_{t_0} \underset{1}{<} k$. Если теперь предположить существование номеров t_1, t_2, $t_1<t<t_2$, для которых $k \underset{t_1}{\lesssim} i$, $k \underset{t_2}{\lesssim} i$, то получим соотношения $k \underset{t_1}{<} i$, $i \underset{t_0+1}{<} k$, $k \underset{t_2}{<} i$, противоречащие предположению. Лемма доказана.

Л е м м а 7. Пусть $\{(S_p^t)\}$, $t=1,\dots,T$, – регулярные последовательности, а множество $S \in \mathcal{S}$, $|S|=Q$, сравнимо со всяким множеством из $\mathcal{J}$. Тогда последовательности $\{(\bar{S}_p^t)\}$, $t=1,\dots,T$, такие, что $\bar{S}_p^t = S_p^t$ при $p \geq Q$, $\bar{S}_p^t = S_p^{T-t+1}$ при $p < Q$ регулярные.

Доказательство. Упорядоченное множество $(\bar{S}_p^t)$ является последовательностью. Кроме того (в силу леммы 6), для всякого t можно считать, что $S_Q^t = S$. Пусть последовательности $\{(\bar{S}_p^t)\}$, $\{(S_p^t)\}$ задают системы отношений $\{\bar{\leqslant}_t\}$, $\{\leqslant_t\}$. Предположим, что для некоторых i, k имеют место соотношения $i \bar{\leqslant}_{t_1} k$, $k \bar{\leqslant}_{t_2} i$, $i \bar{\leqslant}_{t_3} k$, $t_1 < t_2 < t_3$. Поскольку $S_Q^t = S$, $t=1,\dots,T$, то возможны только два случая: $i, k \in S$; $i, k \notin S$. Если имеет место первый случай, то найдутся множества $S_{p_1}^{t_1}$, $S_q^{t_2}$, $S_z^{t_3}$, $p<Q$, $q<Q$, $z<Q$, такие, что $i \in S_p^{t_1}$, $i \in S_z^{t_2}$, $i \notin S_q^{t_2}$, $k \notin S_p^{t_1}, k \notin S_p^{t_1}$, $k \notin S_z^{t_3}$, $k \in S_q^{t_2}$. Но тогда имеют место соотношения $i \underset{T-t_1+1}{<} k$, $k \underset{T-t_2+1}{<} i$, $i \underset{T-t_3+1}{<} k$, которые противоречат предположению о регулярности последовательностей $\{(S_p^t)\}$. Второй случай рассматривается аналогично. Лемма доказана.

2°. Опишем общую схему алгоритма построения последовательностей $\{(R_p^t)\}$, покрывающих множество $\mathcal{J}$ и являющихся регулярными в случае регулярности множества $\mathcal{J}$. При этом будем предполагать, что множество $\mathcal{J}$ обладает следующим свойством полноты: для всякого $S \in \mathcal{J}$, $S \neq \mathcal{U}$, найдутся множества S_1, $S_2 \in \mathcal{J} \cup \{\varnothing\}$ такие, что $S_1 \supset S \supset S_2$, $|S_1| - 1 = |S| = |S_2| + 1$. Отметим сразу, что если, например, каждый столбец матрицы $\mathfrak{S}$ имеет попарно различные элементы, то множество $\mathcal{J}$ обладает свойством полноты.

Алгоритм включает в себя некоторое количество этапов, на каждом из которых строится последовательность (R_p^t), $t=1,2,\dots$. Алгоритм заканчивает работу, если построены последовательности, покрывающие множество $\mathcal{J}$. Процесс построения последовательности (R_p^t) состоит из конечного числа шагов. На каждом шаге по некоторым правилам происходит выбор одного из элементов последовательности. При этом показано, что если выбор элементов производить по указанным правилам, то в случае регулярности множества $\mathcal{J}$ построенные последовательности будут регулярными.

Введем некоторые обозначения. При фиксированных последовательностях $\{(S_p^t)\}$ через $t(S)$ будем обозначать наименьший номер последовательности, содержащей множество S. Пусть $M(S) = \{i \in S / S \setminus \{i\} \in S\}$. Для $S \in \mathcal{J}$ множество $M(S)$ в силу полноты $\mathcal{J}$ непусто. Пусть далее $R(S)$ – такое множество $R \in \mathcal{J}$, что $|R| = |S|$, $R \neq S$. Если множества R с указанными свойствами не существует, то $R(S) = S$. Пусть $R_0(S)$ – такое множество $R \in \mathcal{J}$, что R сравнимо с $R(S)$ и число элементов в множестве $R \cap M(S)$ равняется единицы. В силу полноты $\mathcal{J}$ для всякого $S \in \mathcal{J}$ множество $R_0(S)$ существует. Обозначим тогда через $i(S)$ единственный элемент множества $R_0(S) \cap M(S)$.

Построение последовательностей $\{(R_p^t)\}$ начинается с построения последовательности (R_p^1). Элементы этой последовательности рекуррентно вычисляются по следующим формулам:

$$R'_m = \mathcal{U}, \quad R'_p = R'_{p+1} \setminus \{i(R'_{p+1})\}, \quad p = m-1, \dots, 1.$$

Л е м м а 8. Пусть $\{(S^t_p)\}$ - регулярные последовательности такие, что $S'_p = R'_p$, $p = q, \dots, m$, $1 < q \le m$. Тогда существуют регулярные последовательности $\{(\hat{S}^t_p)\}$, для которых $\hat{S}'_p = R'_p$, $p = q, \dots, m$, и

$$t(R'_{q-1}) = \min_{i \in M(R'_q)} t(R'_q \setminus \{i\}).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим последовательности $\{(S^t_p)\}$ и предположим, что

$$t(R'_{q-1}) \ne \min_{i \in M(R'_q)} t(R'_q \setminus \{i\}).$$

Возможны два случая: $R(R'_q) = R'_q$ и $R(R'_q) \ne R'_q$. Покажем, что в первом случае $t(R'_{q-1}) = \max_{i \in M(R'_q)} t(R'_q \{i\})$. В самом деле, если это не так, то существуют номера $i_1, i_2 \in M(R'_q)$ такие, что $t_1 = t(R'_q \setminus \{i_1\}) < t(R'_{q-1}) < t(R'_q \setminus \{i_2\}) = t_2$.

Рассмотрим множество $R_0(R'_q)$ и предположим, что $t(R'_q) > t(R_0(R'_q)) = t_3$. Тогда соотношения $i_2 \underset{t_3}{>} i(R'_q)$, $i(R'_q) > i_2$, $i_2 \underset{t_3}{>} i(R'_q)$ приводят к противоречию. Если $t(R'_q) < t(R_0(R'_q)) = t_3$, то к противоречию приводят соотношения $i \underset{t_1}{>} i(R'_q)$, $i(R'_q) > i$, $i \underset{t_3}{>} i(R'_q)$. Таким образом, $t(R'_{q-1}) = \max_{i \in M(R'_q)} t(R'_q \{i\})$. Для доказательства существования последовательностей $\{(\hat{S}^t_p)\}$ остается воспользоваться леммой 7.

Пусть $R(R'_q) \ne R'_q$. Покажем прежде всего, что $R(R'_q) \not\supset R'_{q-1}$. Действительно, предположим, $R(R'_q) \supset R'_{q-1}$, и пусть $i \in M(R'_q) \{i(R'_q)\}$. Тогда $i \in R(R'_q)$ и следовательно, $i(R'_q) \in R(R'_q)$. Но тогда равенство $R(R'_q) = R'_{q-1} \cup \{i(R'_q)\} = R'_q$ приводят к противоречию. Таким образом, $R(R'_q) \not\supset R'_{q-1}$. Отсюда следует справедливость неравенства $t(R(R'_q)) > t(R'_{q-1})$. В самом деле, предположив, что $t(R(R'_q)) < t(R'_{q-1})$, вступим в противоречие с леммой 4, если рассмотрим множества R'_q, $R(R'_q)$, R'_{q-1}. Покажем спреведливость неравенства $t(R_0(R'_q)) > t(R'_{q-1})$. Предположим, что $t(R_0(R'_q)) < t(R'_{q-1})$. Тогда, рассмотрев множества $R_0(R'_q)$, R'_{q-1}, $R(R'_q)$ и приняв во внимание только что доказанное неравенство и лемму 4, получим противоречие. Покажем теперь справедливость утверждения леммы. По предположению для некоторого $i \in M(R'_q) \setminus \{i(R'_q)\}$ имеем неравенство $t(R'_q) \setminus \{i\}) < t(R'_q)$. Рассмотрим множества $R'_q \setminus \{i\}$, R'_{q-1}, $R_0(R'_q)$ и обозначим $t_1 = t(R'_q \setminus \{i\})$, $t_2 = t(R'_{q-1})$, $t_3 = t(R_0(R'_q))$. Тогда получим соотношения $i \underset{t_1}{>} i(R'_q)$, $i(R'_q) \underset{t_2}{>} i$, $i \underset{t_3}{>} i(R'_q)$, которые противоречат предположению о регулярности последовательностей $\{(S^t_p)\}$. Лемма доказана.

Л е м м а 9. Пусть $\{(S^t_p)\}$ - регулярные последовательности, такие, что $S'_q = R'_q$, $1 < q \le m$, и

$$t(R'_{q-1}) = \min_{i \in M(R'_q)} t(R'_q \setminus \{i\})$$

Тогда всякое множество S_p^t , $t<t(R'_{q-1})$ сравнимо с множеством R'_{q-1} .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть некоторое S_p^t, $t<t(R'_{q-1})$, несравнимо с R'_{q-1} и пусть $S_{q-1}^{t_2}$ – множество, сравнимое с S_p^t . Такое множество существует в силу полноты $\mathcal{J}$. Покажем, что $t_2>t(R'_{q-1})$. В самом деле, если $t_1<t(R'_{q-1})$, то $S_{q-1}^{t_1}\not\subset R'_q$.Тогда, рассмотрев множества R'_q , $S_{q-1}^{t_1}$, R'_{q-1} и воспользовавшись леммой 4, получим противоречие. Таким образом, $t_1>t(R'_{q-1})$. Но тогда, рассмотрев множества S_p^t, R'_{q-1}, $S_{q-1}^{t_1}$, вступим в противоречие с леммой 4. Лемма доказана.

Покажем теперь, что если $\mathcal{J}$ – регулярное множество, то существуют регулярные последовательности $\{(\hat{S}_p^t)\}$ такие, что $\hat{S}'_p=R'_p$, $p=1,\dots,m$.

Очевидно, если $\mathcal{J}$ – регулярное множество, то существуют регулярные последовательности $\{(\hat{S}_p^t)\}$, для которых $\hat{S}'_m=R'_m$. Предположим, что существуют регулярные последовательности $\{(S_p^t)\}$, $S'_p=R'_p$, $p=q$, ... , m, $1<q<m$. Тогда, приняв во внимание леммы 8,9,6, нетрудно заметить, что существуют регулярные последовательности $\{(\hat{S}_p^t)\}$, для которых $\hat{S}'_p=R'_p$, $p=q-1,\dots,m$.

Предположим, что построены последовательности (R_p^t) , $t=1,\dots,z$, $z\geq 1$, такие, что если множество $\mathcal{J}$ регулярное, то существуют регулярные последовательности $\{(S_p^t)\}$, покрывающие $\mathcal{J}$, для которых $S_p^t=R_p^t$ при $p=1,\dots,m$ и $t\leq z$. Если множество

$$\mathcal{J}^z=\mathcal{J}\setminus\bigcup_{t=1}^{z}\bigcup_{p=1}^{m}\{R_p^t\}$$

пусто, то построение последовательностей (R_p^t) закончено. Пусть $\mathcal{J}^z\neq\emptyset$, тогда построим последовательность (R_p^{z+1}) такую, что $\mathcal{J}^{z+1}\neq\mathcal{J}^z$, и такую, что если $\mathcal{J}$ – регулярное множество, то найдутся регулярные последовательности $\{(\hat{S}_p^t)\}$, покрывающие $\mathcal{J}$, для которых $S_p^t=R_p^t$ при $p=1,\dots,m$, $t\leq z+1$.

Отметим, что регулярные последовательности $\{(S_p^t)\}$ можно считать такими, что $S_p^t\in\mathcal{J}^z\bigcup\{\emptyset\}$ при $t>z$. В самом деле, если последовательности $\{(S_p^t)\}$ не удовлетворяют указанному свойству, то перейдем к рассмотрению последовательностей $\{(\bar{S}_p^t)\}$, $\bar{S}_p^t=S_p^t$ при $t\leq z$; $\bar{S}_p^t=S_p^t$ при $t>z$ и $S_p^t\in\mathcal{J}^z$; $\bar{S}_p^t=\emptyset$ при $t>z$ и $S_p^t\notin\mathcal{J}^z$, которые являются регулярными в силу леммы 5 и удовлетворяют требуемым свойствам.

Введем некоторые обозначения. Через $M^z(S)$ обозначим множество $\{i\in S\,|\,S\setminus\{i\}\in\mathcal{J}^z\}$. Пусть $\prec$ – отношение квазипорядка, задаваемое последовательностью (R'_p) . Если $M^z(S)\neq\emptyset$, то через $i^z(S)$ обозначим такой элемент $i\in M^z(S)$, для которого $i\succ k$ при любом $k\in M^z(S)$. Пусть далее для каждого $p=1,\dots,m$ t_p – наибольший номер t , при котором $R_p^t\neq\emptyset$, Заметим, что найдется номер p , для которого $M^z(R_p^{t_p})\neq\emptyset$. В самом деле, пусть S , $|S|=q$, – множество наибольшей мощности из $\mathcal{J}^z$. В силу полноты $\mathcal{J}$ и выбора множества S найдется множество R^t_{q+1}, $t \leq r$, сравнимое с S. Но тогда, по лемме 4, имеем $S \subset R^{t_p}_p$, и следовательно, $M^r(R^{t_p}_p) \neq \emptyset$.

Построение последовательности (R^{r+1}_p) начинается с отыскания Q - наименьшего номера p, для которого $M^r(R^{t_p}_p) \neq \emptyset$. Далее полагаем $R^{r+1}_{Q-1} = R^{t_Q}_Q \setminus \{i^r(R^{t_Q}_Q)\}$, $R^{r+1}_p = \emptyset$, $p = Q, \dots, m$. Пусть найдены множества R^{r+1}_p, $p = q, \dots, m$, $1 < q < Q-1$. Тогда если $M^r(R^{r+1}_q) \neq \emptyset$, то $R^{r+1}_{q-1} = R^{r+1}_q \setminus \{i^r(R^{r+1}_q)\}$. Если $M^r(R^{r+1}_q) = \emptyset$, то $R^{r+1}_p = \emptyset$, $p = 1, \dots, q-1$.

Для регулярных последовательностей $\{(S^t_p)\}$, $S^t_p = R^t_p$ при $t \leq r$, справедливы следующие утверждения.

Л е м м а 10. Пусть $S = R^{t_Q}_Q$. Тогда

$$t(S \setminus \{i^r(S)\}) = \min_{i \in M^r(S)} t(S \setminus \{i\})$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $t(S \setminus \{i^r(S)\}) > t(S \setminus \{i\})$ для некоторого $i \in M^r(S)$. Тогда соотношения $i < i^r(S)$, $i^r(S) \underset{t_1}{<} i$, $i \underset{t_2}{<} i^r(S)$, $t_1 = t(S \setminus \{i\})$, $t_2 = t(S \setminus \{i^r(S)\})$ противоречат предположению о регулярности последовательностей $\{(S^t_p)\}$. Лемма доказана.

Л е м м а 11. Пусть $S = R^{t_Q}_Q$. Тогда всякое множество S^t_p, $r < t < t(S \setminus \{i^r(S)\})$ сравнимо с множеством $S \setminus \{i^r(S)\}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Заметим, что в силу лемм 4 и 10 всякое множество S^t_p, $p \geq |S|-1$, $r < t < t(S \setminus \{i^r(S)\})$, сравнимое с S. Предположим теперь, что S^t_p, $0 < p < |S|-1$, $r < t < t(S \setminus \{i^r(S)\})$ - множество максимальной мощности, несравнимое с S. Пусть S^r_{p+1} - - множество, сравнимое с S^t_p. В силу выбора номера Q имеем $n > r$. Кроме того, в силу выбора множества S^t_p имеем $n > t(S \setminus \{i^r(S)\})$. Но тогда, рассмотрев множества S^t_p, $S \setminus \{i^r(S)\}$, S^n_{p+1}, вступим в противоречие с леммой 4. Лемма доказана.

Нетрудно заметить, что леммы 10, 11 остаются справедливыми и при $S = R^{r+1}_q$, $M(R^{r+1}_q) \neq \emptyset$, $1 < q < Q$.

Как и в случае последовательности (R'_q), из лемм 10, 11, 6 следует, что существуют регулярные последовательности $\{(\hat{S}^t_p)\}$, покрывающие $\mathcal{S}$, для которых $\hat{S}^t_p = R^t_p$ при $p = 1, \dots, m$, $t < r+1$. Кроме того, в силу выбора R^{r+1}_{Q-1} имеем $\mathcal{S}^{r-1} \neq \mathcal{S}^r$.

Таким образом, алгоритм построения последовательностей $\{(R^t_p)\}$ описан полностью. Если последовательности $\{(R^t_p)\}$ регулярные, то $\mathcal{S}$ - регулярное множество. Обратно, если $\{(R^t_p)\}$ нерегулярные, то $\mathcal{S}$ - нерегулярное множество.

Поступила в ред.-изд.отдел
23 сентября 1974 г.

Литература

I.Гимади Э.Х.,Дементьев В.Т. О методах решения некоторых задач оптимизации параметрических рядов. -"Стандарты и качество", 1971 , № 12.

2. Береснев В.Л. Об одной задаче математической теории стандартизации. I. - В кн.: Управляемые системы, вып. II, Новосибирск, 1973.