Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР, 1974 г., выпуск 12

УДК 512.25

УСЛОВИЯ ЕДИНСТВЕННОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ В СЛУЧАЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО БЫСТРОДЕЙСТВИЯ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ МНОГОШАГОВЫХ ПРОЦЕССОВ

Г.В.Шевченко

Пусть процесс описывается системой линейных разностных уравнений

$$x(n)=Ax(n-1)+Bu(n), \qquad x(0)=x_0, \tag{1}$$

где A и B - матрицы размерностей $m\times m$ и $m\times s$ соответственно, $\det A\neq 0$, ранг $B=s$, x - столбцевой m-мерный вектор, u -столбцевой s -мерный вектор, компоненты которого являются управляющими параметрами, причем для всех $n\geqslant 1$.

$$u(n)\in U, \tag{2}$$

где U - замкнутое, выпуклое тело из E_s. $0\in U\setminus\Gamma U$. Через ΓD обозначается граница множества D.

Требуется найти хотя бы одно допустимое управление, переводящее систему /1/ из x_0 в 0 за минимальное число шагов.

Представим область управляемости $F(0,U)$ в виде объединения непересекающихся множеств

$$F(0,U)=\bigcup_{n=0}^{\infty}\Delta_n(0,U),$$

где

$$\Delta_0(0,U)=0,\quad \Delta_n=F_n(0,U)\setminus\bigcup_{k=0}^{n-1}F_k(0,U),$$

$F_j(0,U)$ - область управляемости в 0 за j шагов.
Если $x_0\in\Delta_n(0,U)$, то справедливо утверждение 5.1 /см.[1]/.

Если $x_0\in\Delta_n(0,U)$, то систему /1/ можно перевести из x_0 в 0 за минимальное число шагов, равное числу N. При этом для постоянных A и B допустимое управление $u^0(1),\dots,u^0(N)$ является оптимальным и тогда и только тогда, когда

$$x(n)=A^nx_0+\sum_{k=1}^{n}A^{n-k}Bu^0(k)\in F_{N-k}(0,U)\quad (n=\overline{1,N}). \tag{3}$$

Так как множества $F_n(0,U)$ задаются с помощью равенств /см.[1]/

$$F_n(0,U)=\{x: A^nx+z=0,\ z\in S_n(0,U)\},$$

где $S_n(0,U)=\{x: x=\sum_{k=1}^{n}A^{n-k}Bu(k), u(k)\in U\}$ - множества достижимости за n шагов, /3/ фактически означает, что найдутся $u(k)\in U$, такие, что

$$A^Nx_0+\sum_{k=1}^{n}A^{N-k}Bu^0(k)+\sum_{k=1}^{N-n}A^{N-n-k}Bu(k)=0\quad (n=\overline{1,N}) \tag{4}$$

Введем следующие обозначения.

1. $X^k = \{x: -A^k x = Bu,\ u\in U\}$ $(k=\overline{1,N})$.

2. $Z^k = \sum_{j=1}^{k} X^j = \{x_1+\ldots+x_k : x_j\in X^j\ (j=\overline{1,k})\}$ $(k=\overline{1,N})$

3. $Z^N = X$.

В силу того, что U - замкнутое, выпуклое тело из E_s, множества X^k, Z^k, X $(k=\overline{1,N})$ являются замкнутыми, выпуклыми множествами.

Из /4/, используя введенные обозначения, получаем

$$A^N(x_0-(x_1+\ldots+x_N))=0,\quad x_k\in X^k\ (k=\overline{1,N}). \qquad /5/$$

Так как $\det A\neq 0$ из /5/ следует, что

$$x_0=x_1+\ldots+x_N,\quad x_k\in X^k\ (k=\overline{1,N}).$$

Следовательно, данная задача быстродействия эквивалентна следующей задаче.

Найти такие $x_1,\ldots,x_N$, что

$$x_1+\ldots+x_N=x_0,\quad x_k\in X^k\ (k=\overline{1,N}). \qquad /6/$$

Т е о р е м а . /Условия единственности/. Если $x_0\in\Gamma X$ и существует, по крайней мере, одно аффинное линейное многообразие L_{x_0}, такое, что $L_{x_0}\cap X=x_0$, то задача /6/ имеет единственное решение.

Справедливость теоремы следует из леммы I и леммы 2 по индукции.

Л е м м а I . Если $x_0\in\Gamma X$ и через x_0 проходит, по крайней мере, одно аффинное линейное многообразие L_{x_0}, такое, что $L_{x_0}\cap X=x_0$, $x_0=x_1^*+\ldots+x_N^*$, то для любого $1\le k\le N$ $z_k=x_1^*+\ldots+x_k^*\in\Gamma Z^k$ и через z_k проходит, по крайней мере, одно аффинное линейное многообразие L_{z_k}, такое, что $L_{z_k}\cap Z^k=z_k$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Допустим противное. Предположим, что $z_{N-1}\in Z^{N-1}\setminus\Gamma Z^{N-1}$. Покажем, что тогда через точку x_0 не проходит аффинное линейное многообразие с указанным свойством.

Действительно, точки $x_{\lambda_0}=\lambda_0 z_{N-1}+x_N^*$, x_0, $x_{\lambda_1}=\lambda_1 z_{N-1}+x_N^*$, где $\lambda_0>1$, $\lambda_1<1$, принадлежащие X, лежат на одной прямой, причем x_0 лежит между точками x_{λ_0} и x_{λ_1}, так как соотношение

$$\lambda(\lambda_0 z_{N-1}+x_N^*)+(1-\lambda)(\lambda_1 z_{N-1}+x_N^*)=x_0$$

выполняется при $\lambda=\frac{1-\lambda_1}{\lambda_0-\lambda_1}<1$. Следовательно, $z_{N-1}\in\Gamma Z^{N-1}$.

Для завершения доказательства леммы остается показать, что существует аффинное линейное многообразие $L_{z_{N-1}}$ такое, что

$$L_{z_{N-1}}\cap Z^{N-1}=z_{N-1}.$$

Пусть L_{X_0} задается системой

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij} z^j + b_i = 0 \quad (i = \overline{1,r} < m), \qquad /7/$$

где z^j – j – компонента вектора z.

Рассмотрим линейное аффинное многообразие, задаваемое следующим образом

$$\sum_{j=1}^{m} c_{ij} z^j + d_i = 0 \qquad (i = \overline{1,r} < m), \qquad /8/$$

где $d_i = b_i + \sum_{j=1}^{m} c_{ij} X_N^{*j}$.

Точка z_{N-1} лежит на многообразии /8/ в силу /7/. Предположим, что найдется отличная от z_{N-1} точка $z^0 \in \Gamma Z^{N-1}$, которая также лежит на многообразии /8/. Тогда $L_{X_0} \cap X = \{X_0, z^0 + X_N^*\}$. Полученное противоречие и завершает доказательство леммы.

Л е м м а 2 . Пусть A и B – замкнутые, выпуклые множества, $A+B=\{x \in A, y \in B\}$. Тогда , если $z \in \Gamma(A+B)$ и существует, по крайней мере, одно аффинное линейное многообразие L_z такое, что $L_z \cap \cap (A+B) = z$, найдутся единственные $x_0 \in A$ и $y_0 \in B$, такие, что $z = x_0 + y_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Предположим противное. Пусть $z = x^* + y^*$ и $z = x_0 + y_0$, $x^*, x_0 \in A$ и $y^*, y_0 \in B$. Покажем, что тогда точки $x^* + y_0$, z, $x_0 + y^*$ лежат на одной прямой, причем z лежит между точками $x^* + y_0$, $x_0 + y^*$.

Действительно, $\frac{1}{2}(x^* + y_0) + \frac{1}{2}(x_0 + y^*) = z$. Следовательно, такого L_z не существует.

Лемма доказана.

В силу того, что системы $-A^k x_k^* = Bu(k)$ $(k = \overline{1,N})$ относительно $u(k) = (u_1(k), \ldots, u_s(k))$ имеют единственное решение, полученные достаточные условия единственности задачи /6/ являются также условиями единственности для данной задачи оптимального быстродействия. Эти условия существенно неулучшаемы. Вообще говоря, условия $x_0 \in \Gamma X$ не достаточно для единственности даже в случае, если U – многогранник, а для процесса выполнено условие общности положения.

Иллюстрацией этого факта служит следующая задача оптимального быстродействия.

Пусть процесс описывается системой линейных разностных уравнений:

$$\begin{aligned} x_1(n) &= -x_1(n-1) + u_1(n), \\ x_2(n) &= \tfrac{1}{2} x_2(n-1) + u_2(n). \end{aligned} \qquad /10/$$

На управления наложены следующие ограничения:

$$\begin{aligned} u_1(n) + 2u_2(n) &\le 2, \\ u_1(n) - 2u_2(n) &\le 2, \end{aligned} \qquad /11/$$

$$u_1(n) + u_2(n) \geqslant -1,$$
$$u_1(n) - u_2(n) \geqslant -1.$$

Требуется найти хотя бы одно допустимое управление, переводящее систему /10/ из точки X_0 =/-1,4/ в 0.

Покажем, что $X_0 \in \Gamma X$, но оптимальное управление не единственно.

В данном случае $X = X^1 + X^2$.

$$X^1 = \{(\bar{x},\bar{y}) : \bar{x} + \bar{y} \leqslant 2, \bar{x} - \bar{y} \leqslant 2, \bar{x} + \tfrac{1}{2}\bar{y} \geqslant -1, \bar{x} - \tfrac{1}{2}\bar{y} \geqslant -1\},$$
$$X^2 = \{(\bar{x},\bar{y}) : \bar{x} + \tfrac{1}{4}\bar{y} \leqslant 1, \bar{x} - \tfrac{1}{4}\bar{y} \leqslant 1, \bar{x} + \tfrac{1}{2}\bar{y} \geqslant -2, \bar{x} - \tfrac{1}{2}\bar{y} \geqslant -2\}.$$

Отсюда

$$X = \{(\bar{x},\bar{y}) : \bar{x} + \tfrac{1}{4}\bar{y} \leqslant 3, \bar{x} - \tfrac{1}{4}\bar{y} \leqslant 3, \bar{x} + \bar{y} \leqslant 6, \quad \text{/12/}$$
$$\bar{x} - \bar{y} \leqslant 6, \bar{x} + \tfrac{1}{2}\bar{y} \geqslant -3, \bar{x} - \tfrac{1}{2}\bar{y} \geqslant -3\}.$$

Из /12/ следует, что $X_0 \in \Gamma X$.

Оптимальными управлениями будут, например, следующие управления:

$$\bar{u}(1) = (-1, 0), \quad \bar{u}(2) = (0, -1);$$
$$\tilde{u}(1) = (0, -1), \quad \tilde{u}(2) = (1, -\tfrac{1}{2}).$$

Что и требовалось показать.

Поступила в редакцию 27.XII.72г.

Литература

1. В.В.Леонов. Структура областей достижимостей и управляемости.II. Управляемые системы, вып.4-5, 1970г.