Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР, 1974 г. выпуск 12
УДК.519.95.

# ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ КАЧЕСТВА

Ю.В.Шамардин

## § 1. Постановка задачи. Игра $\Gamma$

В статье рассматривается дифференциальная игра качества $\Gamma$ двух игроков $\mathcal{J}_1$, $\mathcal{J}_2$, которую задают следующие элементы:

1. Система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_1\varphi x_1 - b_1\psi x_3, \\ \dot{x}_2 = a_2(1-\varphi)x_1 - b_2(1-\psi)x_3, \\ \dot{x}_3 = -b_3 x_2, \end{cases} \qquad /1/$$

здесь $a_i>0\ (i=1,2)$, $b_i>0\ (i=1,2,3)$; $\varphi$ - параметр управления игрока $\mathcal{J}_1$, $\psi$ - параметр управления игрока $\mathcal{J}_2$, $\varphi$, $\psi \in [0,1]$.

2. Пространство игры

$$S(\Gamma) = \left\{(x_1,x_2,x_3)\,\middle|\, x_i>0\ \ (i=1,2,3)\right\}.$$

3. Терминальное множество игрока $\mathcal{J}_1$

$$\Omega_1(\Gamma) = \left\{(x_1,x_2,x_3)\,\middle|\, x_1>0,\ x_2>0, x_3=0\right\},$$

терминальное множество игрока $\mathcal{J}_2$

$$\Omega_2(\Gamma) = \left\{(x_1,x_2,x_3)\,\middle|\, x_1=0,\ x_2\geq 0,\ x_3>0\right\} \bigcup \left\{(x_1,x_2,x_3)\,\middle|\, x_1\geq 0,\ x_2=0, x_3>0\right\}.$$

Игрокам в каждый момент игры известно лишь положение фазовой точки $z=(x_1,x_2,x_3)$. Стратегии игроки выбирают в виде функций $\varphi(z,t)$, $\psi(z,t)$, $z\in S(\Gamma)$ со значениями из отрезка $[0,1]$. Будем предполагать, что стратегии определяют единственным образом на любом интересующем нас временном интервале траекторию игры $z(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t))$, гладкую, за исключением, быть может, конечного числа точек, и что управления игроков $\varphi(t)=\varphi(z(t),t)$ и $\psi(t)=\psi(z(t),t)$, формируемые в процессе игры, кусочно-непрерывные слева функции времени с конечным числом разрывов.

Точку $z^0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)\in S(\Gamma)$ назовем выигрышной для игрока $\mathcal{J}_1$, если у него найдется такая стратегия $\varphi(z,t)$, $z\in S(\Gamma)$, что для любой стратегии $\psi(z,t)$ игрока $\mathcal{J}_2$, удовлетворяющей вместе с $\varphi(z,t)$ сделанным выше предположениям, траектория игры из точки $z^0$ за конечное время приходит на множество $\Omega_1(\Gamma)$. Аналогично определяется выигрышная точка для игрока $\mathcal{J}_2$.

Цель решения игры качества $\Gamma$ в том, чтобы выяснить, какие точки области $S(\Gamma)$ выигрышные для игрока $\mathcal{J}_1$ и какие для игрока $\mathcal{J}_2$. Игру $\Gamma$ можно интерпретировать как модель войны между двумя игроками. Игрок $\mathcal{J}_2$, обладает только уничтожающим ресурсом $(x_3)$, а игрок $\mathcal{J}_1$ - одним воспроизводящим $(x_1)$ и одним уничтожающим ресурсом. Изменения величин ресурсов во времени описываются системой /I/. Побеждает игрок, сумевший первым за конечное время уничтожить хотя бы один ресурс противника, сохранив при этом часть каждого из своих ресурсов. Решение игры выясняет, кто победит при данных начальных значениях ресурсов игроков. Множества выигрышных точек игроков $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$ обозначим через $A_1(\Gamma)$ и $A_2(\Gamma)$ соответственно.

Т е о р е м а I. Множества $A_1(\Gamma)$ и $A_2(\Gamma)$ являются конусами с вершиной в нуле.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Легко проверить, что на терминальных множествах $\Omega_1(\Gamma)$ и $\Omega_2(\Gamma)$ допустимые области непусты /I/. Отсюда вытекает, что и множества $A_1(\Gamma)$ и $A_2(\Gamma)$ также непусты. Докажем утверждение теоремы для $A_1(\Gamma)$. Обозначим через $z=(x_1,x_2,x_3)$, $F(z,\varphi,\psi)$ – вектор правых частей системы /I/ и запишем в виде

$$\dot{z}=F(z,\varphi,\psi). \qquad /2/$$

Пусть $z_0\in A_1(\Gamma)$ и $\varphi(z,t)$ – выигрышная стратегия игрока $\mathcal{J}_1$ в игре из точки $z_0$. Фиксируем некоторое $\lambda>0$ и положим $\bar{z}_0=\lambda z_0$. Покажем, что $\bar{z}_0\in A_1(\Gamma)$.

Пусть в игре из точки $\bar{z}_0$ игрок $\mathcal{J}_1$ применяет стратегию

$$\bar{\varphi}(z,t)=\varphi\left(\frac{1}{\lambda}\cdot z,t\right),\quad z\in S(\Gamma), \qquad /3/$$

игрок $\mathcal{J}_2$ – некоторую стратегию $\bar{\psi}(z,t)$, $z\in S(\Gamma)$, $\bar{z}(t)$ – траектория игры и $\psi(t)=\bar{\psi}(\bar{z}(t),t)$. Траектория игры $\bar{z}(t)$ удовлетворяет системе

$$\frac{d\bar{z}}{dt}=F(\bar{z},\bar{\varphi}(\bar{z},t),\psi(t)),\qquad \bar{z}(t_0)=\bar{z}_0. \qquad /4/$$

Нетрудно проверить, что $F(\mu\cdot z,\varphi,\psi)=\mu\cdot F(z,\varphi,\psi)$ для всех $\mu>0$ и всех $z\in S(\Gamma)$, поэтому, поделив обе части уравнения /4/ на $\lambda$, получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\bar{z}}{\lambda}\right)=F\left(\frac{\bar{z}}{\lambda},\bar{\varphi}(\bar{z},t),\psi(t)\right). \qquad /5/$$

Обозначим $z(t)=\frac{1}{\lambda}\cdot\bar{z}(t)$. Учитывая /3/, /4/ и /5/, получаем, что $z(t)$ удовлетворяет системе

$$\dot{z}=F(z,\varphi(z,t),\psi(t)),\qquad z(t_0)=\frac{1}{\lambda}\bar{z}_0=z_0,$$

т.е. $z(t)$– траектория в игре из точки $z_0$. Так как $\varphi(z,t)$– выигрышная стратегия, то найдется момент $t_1>t_0$, что $z(t_1)\in\Omega_1(\Gamma)$. Отсюда $\bar{z}(t_1)\in\Omega_1(\Gamma)$, поскольку $\bar{z}(t_1)=\lambda z(t_1)$ и $\Omega_1(\Gamma)$ – конус. Стратегия $\psi(z,t)$ была выбрана произвольно, следовательно, $\bar{z}_0\in A_1(\Gamma)$, а из произвольности $z_0$ и $\lambda$ вытекает, что $A_1(\Gamma)$ – конус.

Доказательство для множества $A_2(\Gamma)$ проводится аналогично.

Свойство однородности правых частей системы /I/ по фазовым координатам позволяет ввести некоторую вспомогательную игру качества, (обозначим ее $\gamma$), тесно связанную с игрой $\Gamma$, и исследовать игру $\gamma$ вместо основной игры.

§ 2. Вспомогательная игра $\gamma$

Рассмотрим преобразование координат:

$$\begin{cases} x_1 = x\cdot\lambda, \\ x_2 = y\cdot\lambda, \\ x_3 = (1-x-y)\cdot\lambda. \end{cases} \qquad /6/$$

Пусть $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ - некоторая траектория системы /I/. Соотношения /6/ определяют функции $x(t)$ , $y(t)$ , $\lambda(t)$ , которые удовлетворяют системе уравнений:

$$\dot{x} = a_1\varphi\cdot x - b_1\psi\cdot(1-x-y) - x\cdot h(x, y, \varphi, \psi), \qquad /7/$$

$$\dot{y} = a_2(1-\varphi)x - b_2(1-\psi)\cdot(1-x-y) - y\cdot h(x, y, \varphi, \psi), \qquad /8/$$

$$\dot{\lambda} = \lambda\cdot h(x, y, \varphi, \psi), \qquad /9/$$

где $h(x, y, \varphi, \psi) = x(a_1\varphi + a_2(1-\varphi)) - (1-x-y)(b_2\psi + b_2(1-\psi)) - b_3 y$.

Обозначим правые части уравнений /7/ и /8/ через $f(x, y, \varphi, \psi)$ и $g(x, y, \varphi, \psi)$ соответственно. Сформулируем дифференциальную игру качества $\gamma$ , которую задают следующие элементы:

I. Система уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y, \varphi, \psi), \\ \dot{y} = g(x, y, \varphi, \psi), \end{cases} \qquad /10/$$

здесь $\varphi$ и $\psi$ - по-прежнему управления соответственно игроков $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ .

2. Пространство игры

$$S(\gamma) = \{(x, y) \mid x>0,\ y>0,\ x+y<1\}.$$

3. Терминальное множество игрока $\mathcal{I}_1$

$$\Omega_1(\gamma) = \{(x, y) \mid x>0,\ y>0,\ x+y=1\},$$

терминальное множество игрока $\mathcal{I}_2$

$$\Omega_2(\gamma) = \{(x, y) \mid x=0,\ 0<y<1\} \cup \{(x, y) \mid 0<x<1,\ y=0\}$$

Допустимые управления, стратегии, выигрышные точки определяются по аналогии с игрой $\Gamma$ .

Через $A_1(\gamma)$ и $A_2(\gamma)$ обозначим множество выигрышных точек в игре $\gamma$ соответственно игроков $\mathcal{I}_1$ и $\mathcal{I}_2$ . Нетрудно видеть, что элементы игры $\gamma$ получаются из соответствующих элементов игры $\Gamma$ с помощью преобразования /6/, при этом игра $\Gamma$ как бы проектируется на плоскость $x_1+x_2+x_3=1$ , и игра $\gamma$ есть, по сути, игра на этой плоскости.

Т е о р е м а 2. Пусть $(x^\circ, y^\circ)\in A_i(\gamma)$ $(i=1,2)$ , тогда точка $(x_1, x_2, x_3) = (x^\circ\lambda, y^\circ\lambda, (1-x^\circ-y^\circ)\lambda)\in A_i(\Gamma)$ $(i=1,2)$, при любом $\lambda>0$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как легко проверить, допустимые области на множествах $\Omega_i(\gamma)$ $(i=1,2)$ непусты. Отсюда вытекает, что и множества $A_i(\gamma)$ $(i=1,2)$ непусты. Пусть $(x^\circ, y^\circ)\in A_1(\gamma)$ и выигрышная стратегия игрока $\mathcal{Y}_1$ $\varphi(x,y,t)$, $(x,y)\in S(\gamma)$. Фиксируем $\lambda^0>0$ и обозначим

$$z_0=(x_1^0,x_2^0,x_3^0)=(x^0\cdot\lambda^0,\ y^0\lambda^0,(1-x^0-y^0)\cdot\lambda^0).$$

Покажем, что $z_0\in A_1(\Gamma)$. Для этого рассмотрим стратегию игрока $\mathcal{Y}_1$ в игре $\Gamma$

$$\bar\varphi(z,t)=\bar\varphi(x_1,x_2,x_3,t)=\varphi\Big(\frac{x_1}{x_1+x_2+x_3},\ \frac{x_2}{x_1+x_2+x_3},\ t\Big),\quad z\in S(\Gamma).$$

Пусть $\bar\psi(z,t)$ - некоторая стратегия игрока $\mathcal{Y}_2$, $z(t)=(x_1(t),\ x_2(t),\ x_3(t))$ - траектория игры и $\psi(t)=\bar\psi(z(t),t)$. Траектория $z(t)$ удовлетворяет системе /2/

$$\dot z=F(z,\bar\varphi(z,t),\psi(t)),\quad z(t_0)=z_0.$$

Траектории $z(t)$ соответствуют функции $x(t)$, $y(t)$, $\lambda(t)$, связанные с $z(t)$ преобразованием /6/ и удовлетворяющие системе уравнений /7/-/9/. Так как траектория $z(t)$ не может из точки $z_0$ за конечное время достичь начала координат /это точка покоя системы/2// и так как $\lambda(t)=x_1(t)+x_2(t)+x_3(t)$, то $\lambda(t)>0$ при всех $t\geqslant t_0$.

Функции $x(t)$, $y(t)$ задают траекторию, соответствующую стратегии $\varphi(x,y,t)$ и управлению $\psi(t)$, из точки $(x^0,y^0)$; $\varphi(x,y,t)$ - выигрышная стратегия, следовательно, найдется такой момент $t_1>t_0$, что $(x(t_1),\ y(t_1))\in\Omega_1(\gamma)$, т.е. $x(t_1)>0$, $y(t_1)>0$, $x(t_1)+y(t_1)=1$. Поскольку $\lambda(t_1)>0$, то $x_1(t_1)>0$, $x_2(t_1)>0$, $x_3(t_1)=0$. Отсюда $z_0\in A_1(\Gamma)$. Доказательство для множества $A_2(\gamma)$ аналогично.

Эта теорема показывает, что по решению игры $\gamma$ можно судить о решении игры $\Gamma$, тем самым можно вместо основной игры рассматривать вспомогательную.

## § 3. Исследование игры $\gamma$

Найдем точки, выигрышные для $\mathcal{Y}_2$, причем выигрышные стратегии будем искать в виде кусочно-постоянных функций $\psi(x,y,t)$, принимающих значения 0 или I. Обозначим через $V(\psi=K)$ $(K=0,1)$ множество всех точек области $S(\gamma)$, из которых игрок $\mathcal{Y}_2$ выигрывает, применяя стратегию $\psi(x,y,t)\equiv K$ $(K=0,1)$. Эти множества непусты, что вытекает из непустоты допустимой области на множестве $\Omega_2(\gamma)$.

Найдем сначала множество $V(\psi=1)$. Обозначим через $\alpha(x,y,\varphi)$ неотрицательную величину угла, образованного направлением вектора правых частей системы /10/ при $\psi$ = I и некотором $\varphi$ и осью иксов. Введем функцию

$$\bar\varphi(x,y)=\begin{cases}\text{I, если } \alpha(x,y,1)\geqslant\alpha(x,y,0),\\[2ex] \text{0, если } \alpha(x,y,1)<\alpha(x,y,0).\end{cases}$$

Пусть $(x_0, y_0) \in S(\gamma)$ и игрок $J_2$ применяет стратегию $\psi(x,y,t)\equiv 1$. Перебирая стратегии $\varphi(x,y,t)$ противника, получаем пучок траекторий из точки $(x_0, y_0)$. Так как правые части системы /10/линейны по $\varphi$, можно показать, что крайние траектории этого пучка описываются системами:

$$\begin{cases} \dot x = f(x,\, y,\, \bar\varphi(x,y,1)), \\ \dot y = g(x,\, y,\, \bar\varphi(x\; y,1)), \end{cases} \qquad /11/$$

$$\begin{cases} \dot x = f(x,y,\, 1-\bar\varphi(x,y),1), \\ \dot y = g(x,y,\, 1-\bar\varphi(x,y),1). \end{cases} \qquad /12/$$

Несложно нарисовать геометрическую картину траекторий систем /11/, /12/ и, пользуясь таким геометрическим представлением, отобрать те точки $(x_0, y_0) \in S(\gamma)$, из которых обе крайние траектории пучка попадают на $\Omega_2(\gamma)$. Все такие точки составляют внутренность области $OAB$, показанной на рис. 1.

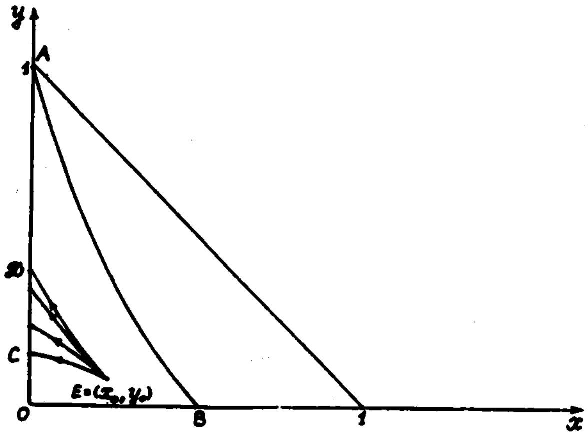


Рис. I

Линия $AB$ – интегральная кривая уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \min\left(\frac{g(x,y,1,1)}{f(x,y,1,1)}, \frac{g(x,y,0,1)}{f(x,y,0,1)}\right),$$

проходящая через точку $A$ = /0,1/. Если взять некоторую точку $E$ из области $OAB$, то пучок траекторий из этой точки заполняет область $CDE$, как это показано на рис. I, причем можно найти такое число $\beta>0$, что для произвольного $\varphi \in [0,1]$ и любой точки $(x,y)$ из области $CDE$ $\quad \dot x = f(x,y,\varphi,1) \le -\beta<0$. Отсюда $x(t)<x(t_0)-$ $-\beta t = x_0-\beta t$, т.е. любая траектория приходит на множество $\Omega_2(\gamma)$ в момент $t_1 < \frac{x_0}{\beta}$. Таким образом, множество $V(\psi=1)$ есть все внутренние точки области $OAB$.

Аналогично можно построить множество $V(\psi=0)$, при этом оказывается, что $V(\psi=0)$ - это внутренние точки области $O'A'B'$ /рис.2/, где $A'B'$ - интегральная кривая уравнения

$$\frac{dy}{dx}=\max\left(\frac{g(x,y,1,0)}{f(x,y,1,0)},\ \frac{g(x,y,0,0)}{f(x,y,0,0)}\right),$$

проходящая через точки $A'=\left(0,\ \frac{\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_2}+\sqrt{b_3}}\right)$ и $B'=\left(\frac{b_2}{a_2+b_2},\ 0\right)$.

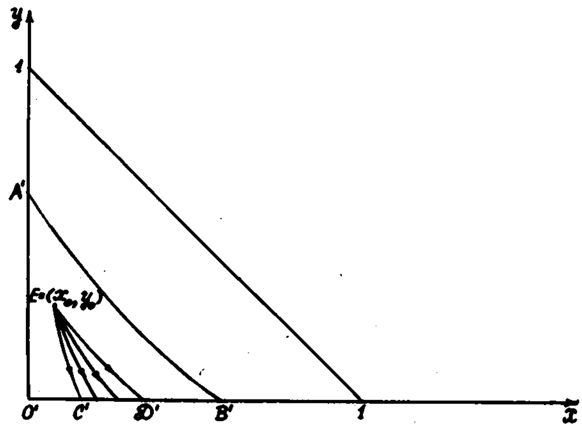


Рис. 2.

Если коэффициенты системы /10/ удовлетворяют условию

$$b_2\ b_3<(a_1)^2,$$

то во множество $V(\psi=0)$ включаются также и точки кривой $A'B'$. Обозначим через $\Omega_2^0(\gamma)$ допустимую область на $\Omega_2(\gamma)$. Нетрудно убедиться, что

$$\Omega_2^0(\gamma)=\left\{(x,y)\,\middle|\,x=0,\ 0<y<1\right\}\cup\left\{(x,y)\,\middle|\,0<x<\frac{b_2}{a_2+b_2},\ y=0\right\}.$$

Рассмотрим множество $M=V(\psi=1)\cup V(\psi=0)$. Очевидно, $\Omega_2^0(\gamma)$ входит в границу области $M$. Кроме того, можно проверить, что часть границы множества $M$, /обозначим ее $L$ /, содержащаяся в $S(\gamma)$, представляет собой полупроницаемую кривую, при этом, если выполняется одно из условий:

$$b_2\cdot b_3>(a_1)^2, \qquad /13/$$

$$\frac{b_2\cdot b_3}{(a_1)^2}<\frac{a_1}{b_1}\cdot\frac{b_2}{a_2}<1; \qquad /14/$$

траектория игры из точек $(x_0,y_0)\in L$ проходит по $L$ и либо достигает точки /0,1/ за конечное время, либо бесконечно долго движется к точке $\left(\frac{b_2}{a_2+b_2}, 0\right)$, т.е. из точек $(x_0, y_0) \in L$ каждый из игроков может добиться лишь нейтрального исхода игры. Следовательно, при выполнении условия /13/ или /14/

$$A_2(\gamma) = M = V(\varphi=1) \bigcup V(\varphi=0).$$

В силу полупроницаемости $L$ будет полупроницаема поверхность $K$ в области $S(\Gamma)$, определяемая равенством

$$K = \left\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = x\cdot\lambda,\ x_2 = y\cdot\lambda,\ x_3 = (1-x-y)\cdot\lambda,\ (x,y)\in L,\ \lambda > 0\right\}.$$

Отсюда, учитывая теорему 2, получаем, что при выполнении /13/ или /14/

$$A_2(\Gamma) = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in S(\Gamma) \mid x_1 = x\cdot\lambda,\ x_2 = y\cdot\lambda,\ x_3 = (1-x-y)\cdot\lambda,\ (x,y)\in A_2(\gamma),\ \lambda > 0\right\}.$$

Выигрышные стратегии игрока $\mathcal{J}_2$ в игре $\Gamma$ строятся так же,как это было сделано в доказательтсве теоремы 2. Что касается игрока $\mathcal{J}_1$, то его выигрышные стратегии тоже можно искать в виде кусочно-постоянных функций $\varphi(x, y, t) \in \{0, 1\}$ и выделять выигрышные точки, пользуясь геометрической картиной пучков траекторий.

Пользуясь рис. 3, опишем выигрышные стратегии игрока $\mathcal{J}_1$ ,когда коэффициенты системы /10/ удовлетворяют неравенствам /14/.

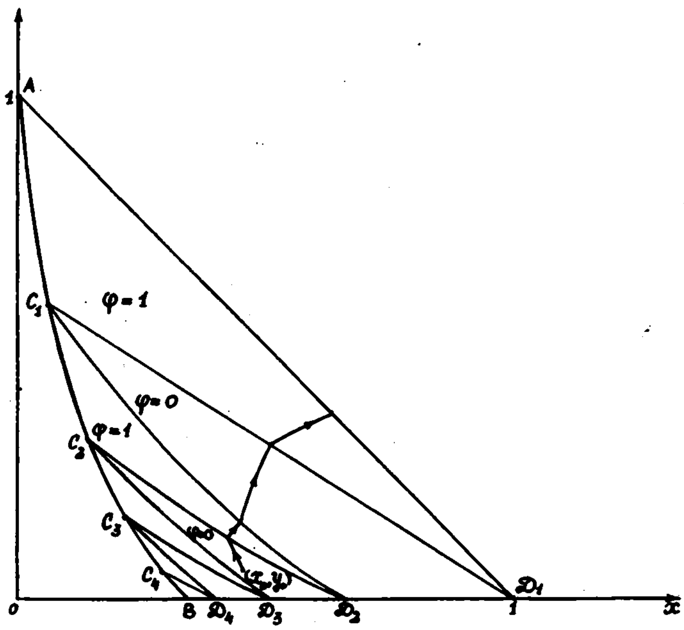


Рис. 3.

Здесь область $OAB$ - это множество $A_2(\gamma)$, линии $C_1\mathcal{D}_1$, $C_2\mathcal{D}_2$, $C_3\mathcal{D}_3$ и т.д. - интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x, y, 1, 0)}{f(x, y, 1, 0)};$$

линии $C_1\mathcal{D}_2$ , $C_2\mathcal{D}_3$ , $C_3\mathcal{D}_4$ и т.д. - интегральные кривые уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x,y,0,1)}{f(x,y,0,1)}$$

Выигрышная стратегия $\varphi(x,y,t)$ игрока $\mathcal{J}_1$ имеет вид:

$$\varphi(x,y,t) = \begin{cases} 1, \text{ в областях } C_1A\mathcal{D}_1,\ C_2C_1\mathcal{D}_2,\ C_3C_2\mathcal{D}_3 \text{ и т.д;} \\ 0, \text{ в областях } \mathcal{D}_2C_1\mathcal{D}_1,\ \mathcal{D}_3C_2\mathcal{D}_2,\ \mathcal{D}_4C_3\mathcal{D}_3 \text{ и т.д.} \end{cases}$$

Примерный вид траектории из точки $(x_0, y_0)$ показан на рис. 3.

В заключение отметим, что построить вспомогательную игру, как это делалось выше, можно в любой дифференциальной игре качества,в которой правые части системы уравнений однородны по фазовым переменным, а пространство игры и терминальные множества - конусы. В частности, таким методом можно исследовать игры, рассмотренные в /2/и/3/.

Поступила в ред.-изд.отдел
7.2.1973 г.

Литература

1. Р.Айзекс. Дифференциальные игры. М. "Мир", 1967.

2. Е.П.Волокитин, И.А.Красс. Один метод исследования дифференциальных игр качества."Управляемые системы", Новосибирск, 1970,вып.6.

3. И.А.Красс, М.А.Мухсинов. Некоторые методы исследования игр качества. "Управляемые системы", Новосибирск, 1972, вып. 10.