Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1974 г. выпуск 12
УДК.518.734.3

# ОБ ОДНОЙ ОССБЕННОСТИ НЕКОТОРЫХ АЛГОРИТМОВ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Д.Г.Терзи

1. Задачи целочисленного линейного программирования вида

$$\max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad /1/$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ , \quad i=1,\dots,m \ , \qquad /2/$$

$$x_j \geqslant 0 \ , \quad j=1,\dots,n \ , \qquad /3/$$

$$x_j - \text{целый} \ , \qquad j=1,\dots,n \qquad /4/$$

имеют большое практическое значение. Они встречаются, например, при создании автоматизированных систем управления [ 1 ], при составлении некоторых моделей сельскохозяйственного производства [ 2 ]. Для их решения известны многие алгоритмы, часть из которых описаны в [ 3 ] -[ 4 ].

Цель этой заметки состоит в том, чтобы 1/ обратить внимание на одну особенность некоторых алгоритмов решения задач /1/-/4/, связанную с возможностью возникновения в процессе счета больших чисел, 2/ привести некоторые частные результаты по устранению этой трудности в алгоритмах [ 5 ] , [ 9 ] сведения задачи /1/-/4/ к задаче о ранце.

2. Существуют технические трудности, связанные с возможностью возникновения в процессе счета больших чисел:

а/ Возрастание коэффициентов симплексных таблиц в третьем алгоритме Гомори отмечено в работе Финкельштейна [ 6 ];

б/ Одним из распространенных алгоритмов является первый алгоритм Гомори. Однако часто невозможно им довести решение задачи /1/-/4/ до конца из-за накапливающихся в процессе счета ошибок округления. Если же попытаться реализовать этот алгоритм так, чтобы в нем не возникали ошибки округления, запоминая на каждой итерации две матрицы: одна для числителей, другая для знаменателей дробей $p_{ij}/q_{ij}$ , $(p_{ij}, q_{ij})=1$ , представляющих элементы симплексной таблицы, то также возникают большие числа;

в/ При решении системы /2/ в целых числах алгоритмом Эрмита, во многих случаях оказывающемся полезным, возможно возникновение больших чисел в формулах, представляющих все целочисленные решения. В работе [ 8 ] на этот счет приведен пример;

г/ Одним из методов решения задачи /1/-/4/ является метод сведения ее к задаче о ранце и решение последней, для которой разработано много специальных алгоритмов. При сведении исходной задачи к задаче о ранце, например, алгоритмом Фридмана [5] поступают так: берут два уравнения из /2/ и по ним строят одно уравнение, равносильное обоим. Повторяя этот процесс $m-1$ раз, получим вместо $m$ уравнений /2/ одно, равносильное им. В этом процессе основную роль играет

Л е м м а /Фридмана/. Пусть $P$ -множество целочисленных $n$-мерных векторов, функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$, заданные на $P$, таковы, что 1/ принимают целые значения, 2/ хотя бы одна из них ограничена, например, $f_1(x)$.

Тогда система

$$\begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ x\in P \end{cases}$$

равносильна уравнению

$$\begin{cases} f_1(x)+\lambda f_2(x)=0, \\ x\in P, \end{cases}$$

где

$$\lambda>\sup_{x\in P}|f_1(x)|. \qquad /5/$$

При таком способе сведения системы /2/ к равносильному уравнению в последнем могут возникать большие числа. Вопросу уменьшения роста коэффициентов равносильного уравнения посвящена работа Гловера и Волсея [9], которые усилив результат Мэтьюса [10], добились некоторого успеха, но и у них наблюдается тот же недостаток.

3. В этом пункте обобщается лемма Фридмана /лемма 1/: строится новый алгоритм агрегации уравнений /2/ и оцениваются значения коэффициентов агрегированного /равносильного/ уравнения. Эти оценки показывают /лемма 2/, что в предлагаемом алгоритме не возникают большие числа.

Л е м м а 1. Пусть $P$ -множество произвольной природы. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ таковы, что существует вещественное число $\lambda(<+\infty)$, такое что

$$\lambda>\sup_{x\in P}\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right|, \qquad /6/$$

$$f_2(x)\neq 0 .$$

Тогда система

$$\begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \\ x\in P \end{cases} \qquad /7/$$

равносильна уравнению

$$\begin{cases} f_1(x) + \lambda f_2(x) = 0, \\ x \in P \end{cases} \qquad /8/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $x$ удовлетворяет /7/, то он удовлетворяет и /8/. Обратно. Пусть $x$ удовлетворяет /8/. Тогда если $f_2(x)=0$, то и $f_1(x)=0$. Если же предположить, что $f_2(x)\neq 0$, то

$$\lambda = -\frac{f_1(x)}{f_2(x)} \le \sup_{x\in P}\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right| < \lambda$$

Получаем противоречие. Лемма I доказана.

З а м е ч а н и е. Из условия /6/ получаем условие /5/, если $f_2(x)$ принимает целые значения на $P$, так как в этом случае

$$\sup_{\substack{x\in P\\ f_2(x)\neq 0}}\left|\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right| \le \sup_{\substack{x\in P\\ f_2(x)\neq 0}}\left|f_1(x)\right| \Big/ \inf_{\substack{x\in P\\ f_2(x)\neq 0}}\left|f_2(x)\right| \le \sup_{x\in P}|f_1(x)|.$$

Алгоритм. При описании алгоритма мы будем предполагать, что числа $a_{ij}$, $i=1,\dots,m$, $j=1,\dots,n$ -целые.

Пусть $m \geqslant 2$, $i=0$ и область $P$ допустимых решений /2/-/4/ ограничена, то есть $0\le x_j \le d_j$, $j=1,\dots,n$.

I шаг. Увеличить $i$ на единицу.

2 шаг. Найти $\max\limits_{1\le j\le n}|a_{ij}| = |a_{ik}|$.

3 шаг. Разделить обе части $i$ -го уравнения на $|a_{ik}|$, получить уравнение

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j = \beta_i,$$

где

$$\alpha_{ij} = a_{ij}/|a_{ik}|,\ \beta_i = b_i/|a_{ik}|.$$

4 шаг. Если $i=n$, то конец счета.

5 шаг.

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j = \beta_i,$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{i+1,j}x_j = b_{i+1}$$

построить одно уравнение

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha'_{i+1,j}x_j = \beta'_{i+1},$$

где

$$\alpha'_{i+1,j} = \alpha_{ij} + \lambda a_{i+1,j}\ , \quad \beta'_{i+1} = \beta_i + \lambda b_{i+1},$$

$$\lambda > \max_{0 \le x_j \le d_j} \left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j\right| + |\beta_i|\ .$$

6 шаг. Произвести замену

$$a_{i+1,j} = \alpha'_{i+1,j}\ , \quad b_{i+1} = \beta'_{i+1}$$

и идти на I шаг.

Л е м м а 2. Если система /2/ имеет решения в указанной области, то каждый коэффициент уравнений, получаемых в ходе работы этого алгоритма, не превосходит величины $2rs + r + s$ , где

$$r = \sum_{j=1}^{n} d_j\ , \quad s = \max\left(\max_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} |a_{ij}|,\ \max_{1 \le i \le m} |b_i|\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Любое $|\alpha_{ij}| \le 1$, $|a_{ij}| \le s$, $|b_i| \le s$, $i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n$. Так как допустимая область непуста , то

$$|\beta_i| \le \max_{0 \le x_j \le d_j} \left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j\right| \le \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| \max_{0 \le x_j \le d_j} x_j \le \sum_{j=1}^{n} d_j\ .$$

Далее, оценим числа $\alpha'_{i+1,j}$ , $\beta'_{i+1}$ и $\lambda$ , считая, что

$$\lambda = \max_{0 \le x_j \le d_j} \left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j\right| + |\beta_i| + 1.$$

Имеем $\lambda \le 2\sum_{j=1}^{n} d_j + 1 = 2r + 1$ ,

$$|\alpha'_{i+1,j}| \le |\alpha_{ij}| + \lambda |a_{i+1,j}| \le 1 + (2r+1)s = 2rs + s + 1,$$

$$|\beta'_{i+1}| \le |\beta_i| + \lambda |b_{i+1}| \le r + (2r+1)s = 2rs + r + s\ .$$

Естественно считать $r \geqslant 1$ , так как иначе все $x_j$ были бы равны нулю.

Поступила в ред-изд.отдел
II.7.1973 г.

Л и т е р а т у р а

1. М.С.Болотина. Разработка подсистемы календарного планирования АСУ-"Эльмаш". Конференция "Проблемы разработки и внедрения АСУ на машиностроительных предприятиях. Оперативное управление производством". Новосибирск, 1972, стр. 89-98.

2. Л.Н.Комзакова, Э.А.Финн. Об одном методе расчета машинотракторного парка по затратам на выполнение комплекса работ. Конференция "Научные методы управления в сельском хозяйстве". Новосибирск, 1971, стр. 31-34.

3. А.А.Корбут, Ю.Ю.Финкельштейн. Дискретное программирование. М.,"Наука", 1969.

4. M.L.Balinski,K.Spilberg, Methods for integer programming: algebraic, combinatorial and enumerative, Aronofsky J.F.(ed), Progress in oper.res.III,New York, 1969,195-292.

5. А.А.Фридман. Булевы методы и их приложения. Труды 2-ой Зимней школы по математическому программированию и смежным вопросам. М.,стр. 202-309.

6. Ю.Ю.Финкельштейн. Оценка числа итераций для полностью целочисленного алгоритма Гомори. ДАН СССР, 1970, т.193,№3,стр.543-546.

7. Д.Г. Терзи. Алгоритм Эрмита и решение задач дискретного программирования, Сб. "Оптимизация". Новосибирск, ИМ СО АН СССР, 1973, II /28/.

8. Хедли ДЖ. Нелинейное и динамическое программирование, М., "Мир", 1967.

9. F.Glover,Wolsey R.E.D.,Aggregating diophantine equations, Zeitshrift für Oper. Res., 1972, 16, N1, 1-10.

10. G.B. Mathews, On the partition of numbers, Proc. London Math. Soc., 1897, v. 28, 486-490.