Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР, 1974 г., выпуск 12
УДК.512.25/26+519.3:330.115.

О СХОДИМОСТИ ОДНОГО ИТЕРАЦИОННОГО ПРОЦЕССА

И.И.Дикин (Иркутск)

Рассмотрим задачу: найти

$$\min_{u\in E_m}\sum_{j=1}^{n}\left[x_j^k\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}u_i-c_j\right)\right]^2, \qquad /1/$$

где x^k и c - векторы n -мерного евклидова пространства E_n ; $\|a_{ij}\|$ - $m\times n$ - матрица. Пусть u^k - некоторое решение задачи /1/. Положим

$$\delta_j^k=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}u_i^k-c_j\,, \qquad \Phi_k=\sum_{j=1}^{n}(x_j^k\delta_j^k)^2\,.$$

Опишем итерационный процесс.

Имеем

$$x_j^0>0\,, \quad j=1,2,\ldots,n. \qquad /2/$$

Если $\Phi_k\neq 0$, вычислим

$$x_j^{k+1}=x_j^k(1+\lambda_k x_j^k\delta_j^k),\ \ j=1,2,\ldots,n, \qquad /3/$$

$$\lambda_k=1/\sqrt{\Phi_k}\,. \qquad /4/$$

При $\Phi_k=0$ полагаем $x^{k+1}=x^k$.

Итеративный алгоритм /1/-/4/ предлагается для решения следующей задачи линейного программирования: найти минимум

$$\sum_{j=1}^{n}c_jx_j\,, \qquad /5/$$

если

$$x_j\geqslant 0\,, \quad j=1,2,\ldots,n\,; \qquad /6/$$

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_j-x_j^0)=0, \quad i=1,2,\ldots,m. \qquad /7/$$

Множество векторов, удовлетворяющих условиям /6/-/7/, обозначим через X .

Рассмотрим проблему: минимизировать по $u\in E_m$

$$\sum_{j=1}^{n}\left[x_j\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}u_i-c_j\right)\right]^2. \qquad /8/$$

О п р е д е л е н и е . Задачу линейного программирования /5/-/7/ будем называть невырожденной, если для произвольного вектора $x\in X$ проблема /8/ имеет единственное решение.

Приравняв нулю частные производные у минимизируемой в /8/ функции, получим

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^2\left(\sum_{l=1}^{m}a_{lj}u_l-c_j\right)=0, \quad i=1,2,\ldots,m, \qquad /9/$$

или

$$\sum_{l=1}^{m} b_{il} u_l = d_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots,m , \qquad /10/$$

где

$$b_{il} = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 a_{ij} a_{lj} \quad , \qquad d_i = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^2 a_{ij} \ .$$

По правилу Крамера

$$u_i(x) = \Delta_i(x)/\Delta(x) \ . \qquad /11/$$

На основании теоремы Бине-Коши имеем

$$\Delta(x) = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_m \le n} \left[x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_m} a(j_1, j_2, \ldots, j_m) \right]^2$$

$$\Delta_i(x) = \sum_{1 \le \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_m \le n} (x_{j_1} x_{j_2} \ldots x_{j_m})^2 a(j_1, j_2, \ldots, j_m) a(i, c, j_1, j_2, \ldots, j_m) , \qquad /12/$$

где $a(j_1, j_2, \ldots, j_m)$ и $a(i, c, j_1, j_2, \ldots, j_m)$ - миноры порядка m соответственно матрицы $\|a_{ij}\|$ и матрицы, получающейся из $\|a_{ij}\|$ заменой i строки на вектор c, составленные из столбцов с номерами $j_1, j_2, \ldots, j_m$.

Если задача /5/-/7/ не является вырожденной, то

$$\min \Delta(x) > 0 \ , \quad x \in X \ . \qquad /13/$$

Покажем это. Обозначим через X' выпуклую оболочку всех вершин многогранного множества X. Пусть в точке x^* достигается минимум $\Delta(x)$ на компактном множестве X'. Для каждого $x \in X$ имеет место представление $x = x' + t$, где $x' \in X'$, а t принадлежит конусу, описываемому условиями:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j = 0 , \quad i = 1,2,\ldots,m; \ t_j \geqslant 0 , \ j = 1,2,\ldots,n \ .$$

Очевидно, что $x \geqslant x'$. Тогда, используя представление для $\Delta(x)$ в /12/, получим $\Delta(x) \geqslant \Delta(x') \geqslant \Delta(x^*)$. Поскольку задача /5/-/7/ невырожденная, $\Delta(x^*) > 0$. Неравенство /13/ установлено.

В силу /13/ приведенное в работе определение эквивалентно известному определению невырожденности задачи линейного программирования /см.,например, [3]/.

Пусть $\{x^k\}$ - последовательность векторов, вырабатываемая процессом /1/-/4/. Покажем, что

$$\sum_{j=1}^{n} c_j (x_j^{k+1} - x_j^k) = -\sqrt{\Phi_k} \ . \qquad /14/$$

Действительно,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j (x_j^k)^2 \delta_j^k + \sum_{j=1}^{n} (x_j^k \delta_j^k)^2 = \sum_{i=1}^{m} u_i^k \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x_j^k)^2 \delta_j^k \ . \qquad /15/$$

Поскольку имеют место равенства /9/,

$$\sum_{j=1}^{n} c_j (x_j^k)^2 \delta_j^k = -\Phi_k . \qquad /16/$$

Справедливость равенства /14/ следует из сопоставления формул /3/, /4/ и /16/.

Допустим, что $x_j^t > 0$ при $j = 1,2,\ldots,n$, а $x_s^{t+1} = 0$. По определению процесса /1/-/4/, имеем

$$\delta_j^t = 0 , \ j \neq s , \ \delta_s^t < 0 . \qquad /17/$$

Из /9/ следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x_j^t)^2 \delta_j^t = 0 , \quad i = 1,2,\ldots,m .$$

Сравнив /17/ и /18/, получим, что все элементы s -го столбца матрицы $\| a_{ij} \|$ равны нулю. Тогда на основании /17/ вектор u^0 является решением задачи, двойственной к /5/-/7/; x^1 - решение проблемы /1/-/3/. Поэтому при доказательстве теоремы о сходимости итерационного процесса /1/-/4/ достаточно рассмотреть случай, когда при $k = 0,1\ldots$

$$x_j^k > 0 , \ j = 1,2,\ldots,n . \qquad /19/$$

В дальнейшем предполагается, что вектор x^k есть внутренняя точка множества X.

Покажем, что вектор x^{k+1} совпадает с решением задачи: найти минимум

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условиях:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} (x_j - x_j^0) = 0 , \quad i = 1,2,\ldots,m .$$

$$\sum_{j=1}^{n} [(x_j - x_j^k)/x_j^k]^2 \leq 1 . \qquad /20/$$

Действительно, пусть y^{k+1} есть решение поставленной задачи. Тогда существуют множители Лагранжа v_1^k, v_2^k, ..., v_{m+1}^k, для которых справедливы равенства

$$-c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i^k + 2 v_{m+1}^k (y_j^{k+1} - x_j^k)/(x_j^k)^2 .$$

Если

$$v_{m+1}^k = 0 ,$$

то

$$\sum_{j=1}^{n} c_j (x_j - x_j^*) = 0$$

для векторов x, удовлетворяющих условию /7/.

Пусть $v_{m+1}^k \neq 0$. Имеем

$$y_j^{k+1} - x_j^k = \frac{1}{2v_{m+1}^k}(x_j^k)^2\left(-\sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i^k - c_j\right).$$

Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j^k)^2\left(-\sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i^k - c_j\right) = 0 . \qquad /21/$$

Поэтому в точке $-v^k$ реализуется минимум задачи /1/. Следовательно,

$$y_j^{k+1} - x_j^k = \frac{1}{2v_{m+1}^k}(x_j^k)^2\delta_j^k . \qquad /22/$$

Подставив найденные в /22/ значения величин $y_j^{k+1} - x_j^k$ в /20/, получим $\frac{1}{2v_{m+1}^k} = 1/\sqrt{\Phi_k}$, что и требовалось показать.

Заметим, что в /20/ рассматривается уравнение эллипсоида, вписанного в неотрицательный ортант, точка x^k - центр эллипсоида.

Для удобства последующих ссылок приведем одно элементарное неравенство. Пусть $b_i > 0$ при i = 1,2,...,N. Тогда

$$\frac{\left|\sum_{i=1}^{N} a_i\right|}{\sum_{i=1}^{N} b_i} \le \max_i \frac{|a_i|}{b_i} . \qquad /23/$$

Пусть $\bar{X}$ - множество решений проблемы /5/-/7/. Приведем доказательство утверждения, сформулированного в /2/.

Т е о р е м а . Если x^0 - внутрення точка множества X , существует решение задачи /5/-/7/ и она невырожденная, то

1/ вектор разрешающих множителей есть предел последовательности $\{u^k\}$;

2/ $x^k \to \bar{x}$, где $\bar{x} \in \bar{X}$; если размерность $\bar{X}$ не равна нулю, то $\bar{x}$ - внутрення точка множества $\bar{X}$;

3/ $\sum_{j=1}^{n} c_j(x_j^k - \bar{x}_j)$ сходится к нулю со скоростью геометрической прогрессии.

Д о к а з а т е л ь с т в о . Поскольку выполнены условия /11/, /12/ и /23/, последовательность $\{u^k\}$ является ограниченной. Пусть $\bar{u}$ - ее предельная точка. Положим

$$\delta_j(x) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i(x) - c_j , \quad \bar{\delta}_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{u}_i - c_j .$$

Будем говорить, что $j \in \mathcal{J}_1$, если $\bar{\delta}_j = 0$. Пусть $\mathcal{J}_2 = \mathcal{J} \setminus \mathcal{J}_1$, где $\mathcal{J} = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Через $X(\eta)$ обозначим множество векторов из X , для которых $x_j \le \eta$ при $j \in \mathcal{J}_2$.

Примем в /10/ $u = v + \bar{u}$. Тогда

$$\sum_{l=1}^{m} b_{il} v_l = e_i , \qquad i = 1, 2, \ldots, m , \qquad /24/$$

где

$$e_i = -\sum_{j\in \bar{\mathcal{J}}_2} x_j^2 \bar{\delta}_j a_{ij} .$$

В силу /13/ и /24/ имеет место следующее утверждение. Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\eta > 0$, что $\|u(x) - \bar{u}\| < \varepsilon$ для $x \in X(\eta)$.

Пусть $\bar{\eta}$ такое, что

$$|\delta_j(x)| \geqslant |\bar{\delta}_j|/2, \qquad /25/$$

когда $x \in X(\bar{\eta})$.

Предположим, что существует такое непустое множество $\bar{S} \subset \bar{\mathcal{J}}_2$, что при $s \in \bar{S}$ $\bar{\delta}_s > 0$. На основании /3/: /4/ и /25/ найдется такой индекс $\bar{s} \in \bar{S}$, что при $p = 1, 2, \ldots$ $x^{k_p} \in X(\bar{\eta})$, а $x_{\bar{s}}^{k_p+1} > \bar{\eta}$. Так как $x_{\bar{s}}^{k_p} > \bar{\eta}/2$, имеем $x_{\bar{s}}^{k_p}\delta_{\bar{s}}^{k_p} > \bar{\delta}_{\bar{s}}\bar{\eta}/4$, что противоречит стремлению величины $x_{\bar{s}}^k \delta_{\bar{s}}^k$ к нулю при $k \to \infty$.

Таким образом, существует такой номер K, что при $k > K$

$$x^k \in X(\bar{\eta}) \quad \text{и} \quad \bar{\delta}_j < 0, \quad j \in \bar{\mathcal{J}}_2 \qquad /26/$$

Тогда, используя условия /25/, имеем

$$x_j^k \longrightarrow 0, \quad j \in \bar{\mathcal{J}}_2 . \qquad /27/$$

Сопоставив /27/, /24/ и /13/, получаем $u^k \quad \bar{u}$. Положим $v^k = u^k - \bar{u}$. Тогда $\delta_j^k = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} v_i^k + \bar{\delta}_j$. Очевидно, что при $s \in \bar{\mathcal{J}}_1$ $\delta_s^k = \sum_{i=1}^{m} a_{is} v_i^k$.

Из системы нормальных уравнений /24/ определим вектор v^k. Имеем

$$v_i^k = -\Delta_i^k / \Delta_k ,$$

где

$$\Delta_k = \Delta(x^k),$$

$$\Delta_i^k = \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_m \le n} (x_{j_1}^k x_{j_2}^k \ldots x_{j_m}^k)^2 a(j_1, j_2, \ldots, j_m)\, a(i, \bar{\delta}, j_1, j_2, \ldots, j_m). \qquad /28/$$

Координаты вектора v^k подставим в выражение для δ_s^k, в результате использования равенства /28/ получим

$$(x_s^k)^2 \delta_s^k = \sum_{j\in \bar{\mathcal{J}}_2} \sigma_k(s, j)(x_j^k)^2 \bar{\delta}_j , \quad s \in \bar{\mathcal{J}}_1 , \qquad /29/$$

где

$$\sigma_k(s, j) = \sum a(j, j_1, \ldots, j_{m-1})\, a(s, j_1, \ldots, j_{m-1})(x_s^k x_{j_1}^k \ldots x_{j_{m-1}}^k)^2 / \Delta_k .$$

Отметим, что в силу /23/ и /12/ величина $\sigma_k(s, j)$ равномерно ограничена для всех k.

Из сходимости при $j \in \bar{\mathcal{J}}_2$ $\sum_{k=0}^{\infty} (x_j^k)^2 \bar{\delta}_j / \sqrt{\Phi_k}$

и ограниченности в /29/ коэффициентов $\sigma_k(s, j)$ следует абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}(x_s^k)^2\delta_s^k/\sqrt{\Phi_k}\quad,\quad s\in\bar{\mathcal{J}}_1\ ,\qquad /30/$$

откуда видно, что

$$x_j^k\longrightarrow\bar{x}_j\quad,\quad j\in\bar{\mathcal{J}}_1\,.\qquad /31/$$

Теперь покажем, что $\bar{x}$ – внутренняя точка множества $\bar{X}$, когда решение задачи линейного программирования /5/-/7/ не единственно.

Из справедливости условий /27/, /29/, /31/ и /13/ следует абсолютная сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}x_s^k\,\delta_s^k/\sqrt{\Phi_k}=\sum_{k=0}^{\infty}(x_s^{k+1}-x_s^k)/x_s^k\ ,\quad s\in\bar{\mathcal{J}}_1\ ,$$

что влечет при $s\in\bar{\mathcal{J}}_1$, сходимость

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\ln x_s^{k+1}-\ln x_s^k)\,.$$

Следовательно,

$$\bar{x}_s>0\quad,\quad s\in\bar{\mathcal{J}}_1\ ,\qquad /32/$$

что и требовалось.

Докажем, наконец, что

$$\frac{\sum_{j=1}^{n}c_j(x_j^{k+1}-x_j^k)}{\sum_{j=1}^{n}c_j(x_j^k-\bar{x}_j)}\le 1-q_k\ ,$$

где

$$q_k\longrightarrow 1-1/\sqrt{\bar{\ell}}$$

$\bar{\ell}$ совпадает с числом координат вектора $\bar{x}$ равных нулю.

Имеем

$$\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_j-x_j^k)\delta_j^k=\sum_{j=1}^{n}c_j(x_j^k-\bar{x}_j)\ ,$$

$$\sum_{j=1}^{n}c_j(x_j^k-\bar{x}_j)=\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_j/x_j^k-1)x_j^k\delta_j^k\,.$$

Применив неравенство Коши-Буняковского, получим

$$\sum_{j=1}^{n}c_j(x_j^k-\bar{x}_j)\le\Big[\Phi_k\sum_{j=1}^{n}(\bar{x}_j/x_j^k-1)^2\Big]^{1/2},$$

$$\sum_{j=1}^{n}c_j(x_j^k-\bar{x}_j)\le n_k\sum_{j=1}^{n}c_j(x_j^k-x_j^{k+1})\ ,\qquad /33/$$

где

$$n_k = \left[\sum_{j=1}^{n} (\bar{x}_j / x_j^k - 1)^2\right]^{1/2}.$$

Из /33/ следует

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} c_j (x_j^{k+1} - \bar{x}_j)}{\sum_{j=1}^{n} c_j (x_j^k - \bar{x}_j)} \leq q_k , \quad q_k = 1 - 1/n_k .$$

В силу /32/ и /34/ $q_k \sim 1 - 1/\sqrt{e}$, что и завершает доказательство.

Поступила в ред.-изд.отдел
27 октября 1971 г.

Л и т е р а т у р а

1. С.Гасс, Линейное программирование, М., 1961.

2. И.И.Дикин. О сходимости одного итерационного процесса, Всесоюзная конференция по проблемам теоретической кибернетики, Тезисы докладов, Новосибирск, 1969.