Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР, 1974 г. выпуск 12
УДК.519.1.

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЕРА

Э.Х.Гимади, В.А.Перепелица

§ 1. Введение

Приведем математическую постановку задачи коммивояжера в том виде, как она была сформулирована еще в 1934 г. Х.Уитни /1/. Для заданной системы вещественных чисел a_{ij}, $i,j=1,2,\dots,n$, требуется найти перестановку $\pi=(1,i_2,i_3,\dots,i_n)$ целых чисел $1,2,\dots,n$, при которой величина $a_{1i_1}+a_{i_2i_3}+\dots+a_{i_n1}$ достигает минимума. Точнее, требуется найти достаточно эффективный метод, позволяющий среди $(n-1)!$ возможных перестановок π найти минимизирующую.

Существующие точные методы решения этой задачи /применение принципа динамического программирования /2/,/3/, метод ветвей и границ /4/, метод последовательного анализа и отсеивания вариантов /5/ и другие специальные методы, например, /6/ / в общем случае не избавляют от перебора, объем которого растет по экспоненте $C^n, C>2$, с ростом размерности n задачи. Реализация указанных методов практически не выполнима при n, превышающем 35 - 40; к настоящему времени для таких n известны лишь единичные примеры решенных конкретных задач коммивояжера /11/. Поэтому эффективными методами будем считать алгоритмы, трудоемкость которых оценивается сверху степенной функцией от n.

Определенные успехи в построении эффективных методов решения задачи коммивояжера достигнуты при наложении специальных ограничений на общую постановку задачи /7/ - /11/. Так, например, в работе /9/ обоснован алгоритм трудоемкости $O(n^2)$ операций для решения задачи коммивояжера в предположении, что элементы $n\times n$- матрицы $A=\|a_{ij}\|$ представлены в виде $a_{ij}=max(0,\beta_j-\alpha_i)$, $i,j=1,2,\dots,n$, что эквивалентно задаче с $a_{ij}=max(\alpha_i,\beta_j)$. Аналогичные достижения получены в предположении $a_{ij}=\alpha_i\beta_j$, $i,j=1,2,\dots,n$, и при условии, что последовательности α_i и β_j обладают определенными свойствами /7/ - /8/.

Приведенные выше соображения могут служить оправданием для появления ряда приближенных методов. Наибольшую ценность представляют такие из них, которые, во-первых, достаточно просты в вычислительном отношении, и, во-вторых, позволяют оценивать точность полученного решения. В этом отношении большой интерес представляют так называемые статистически эффективные алгоритмы //12/, стр, 507;/14//-/15//, применение которых почти всегда приводит либо к точному решению, либо к решению, которое незначительно отличается от точного, и трудоемкость алгоритма которого сравнительно невелика /например, сравнима с трудоемкостью записи исходной информации о задаче/. К одной из первых работ такого рода по задаче коммивояжера можно отнести работу /13/.

Из постановки задачи следует, что исходная информация о задаче коммивояжера может быть представлена в виде $n\times n$-матрицы $A=\|a_{ij}\|$. В связи с этим трудоемкость записи этой исходной информации составляет $O(n^2)$ операций. Введем понятие асимптотически оптимального алгоритма для определенного класса задач. Пусть $\mathcal{U}$ - класс квадратных матриц, состоящий из множеств $\mathcal{U}_n=\{A\}$ числовых матриц размерности $n\times n$, $n=1,2,\ldots$. Будем говорить о задаче нахождения минимального значения $\mathcal{L}$ целевой функции задачи коммивояжера, зависящей от матрицы $A\in\mathcal{U}_n$ и определенной на множестве перестановок.Обозначим через $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$ численное значение решения задачи коммивояжера для фиксированной матрицы $A\in\mathcal{U}_n$, полученное с помощью некоторого алгоритма $\mathcal{A}$; очевидно, $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}\geqslant\mathcal{L}$. В общем случае $\mathcal{U}_n$ является вероятностным пространством, элементарными событиями которого являются матрицы A, на каждой из которых определена вероятностная мера, и значение $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, полученное для произвольной матрицы из $\mathcal{U}_n$, является случайной величиной.

О п р е д е л е н и е 1. Алгоритм $\mathcal{A}$ для решения указанного выше класса задач на элементах из $\mathcal{U}_n$, $n=1,2,\ldots$, будем называть асимптотически оптимальным, если существуют такие $\varepsilon_n\to 0,\delta_n\to 0$ при $n\to\infty$, что применение алгоритма $\mathcal{A}$ к произвольной матрице из $\mathcal{U}_n$ дает значение $\mathcal{L}_{\mathcal{A}}$, удовлетворяющее неравенству

$$P\left\{\mathcal{L}_{\mathcal{A}}<(1+\varepsilon_n)\mathcal{L}\right\}\geqslant 1-\delta_n, \qquad /1/$$

$P\{B\}$ - вероятность события B.

Это определение при $\varepsilon_n\equiv 0$ совпадает с понятием алгоритма, который почти всегда приводит к точному решению.

В настоящей статье применительно к некоторому классу матриц A задачи коммивояжера будет показана статистическая эффективность простейшего алгоритма $\mathcal{A}'$, работающего по принципу "идти в ближайший город, где еще не побывал". При этом в отличие от работы авторов/14/ предполагается, что элементы матрицы A могут быть выбранными из континуального множества значений.

§ 2. Описание алгоритма и основные допущения

Описание алгоритма $\mathcal{A}'$. В начале работы алгоритма $\mathcal{A}'$ имеем пестановку $\pi^{(0)}=(1,2,\ldots n)$, в которой выделяем произвольный элемент i_1 и меняем местами элементы 1 и i_1 [ж/]. Полученную перестановку обозначим через $\pi^{(1)}$и переходим к 1-му шагу. Пусть перед K-м шагом, $1<K<n-1$, получена перестановка $\pi^{(K)}=(i_1^{(K)},i_2^{(K)},\ldots,i_n^{(K)})$, в которой элементы $i_{K+1}^{(K)}, i_{K+2}^{(K)},\ldots i_n^{(K)}$ есть "номера городов, еще не пройденных коммивояжером к K-му шагу". На K-м шаге просматриваем эле-

ж/ В силу произвольности выбора можно было взять $i_1=1$.

менты строки $i_K^{(K)}$ матрицы A с номерами столбцов $i_S^{(K)}$, $K<S\leqslant n$. Пусть $i_{S_0}^{(K)}$ - номер столбца минимального из этих просмотренных элементов. Тогда, поменяв местами в $\pi^{(K)}$ элементы $i_{K+1}^{(K)}$ и $i_{S_0}^{(K)}$, получим перестановку $\pi^{(K+1)}$ и переходим к следующему шагу. В результате $n-2$ шагов получим перестановку $\pi^{(n-1)}$, которую обозначим через $\pi_{\mathcal{A}'}=(i_1, i_2,\dots,i_n)$. Последняя задает приближенное решение задачи коммивояжера. Значение этого решения равно

$$\mathcal{L}_{\mathcal{A}'}=\sum_{K=1}^{n} a_{i_K i_{K+1}}, \qquad /2/$$

где i_{n+1} совпадает с i_1.

<u>Оценка трудоемкости алгоритма $\mathcal{A}'$</u>. На K-м шаге работы алгоритма $\mathcal{A}'$ просматривается $n-K$ элементов матрицы A. Отсюда следует, что количество затрачиваемых операций не превосходит величины

$$\sum_{K=1}^{n-2}(n-K)<\frac{n^2}{2}.$$

При этом для организации работы алгоритма на K-м шаге затрачивается память не более n ячеек для хранения элементов перестановки $\pi^{(K)}$ x/. Следовательно, алгоритм $\mathcal{A}'$ для своей работы требует $O(n)$ ячеек дополнительной памяти и затрачивает $O(n^2)$ операций.

Будем считать, что элементы матрицы A принимают значения независимо друг от друга из отрезка $[a,b]$ числовой оси, где $a>0$. Полагаем, что a_{ij} - это значения случайной величины ξ, которая задается функцией распределения $\mathcal{F}(x)=P\{\xi\leqslant x\}$, $a\leqslant x\leqslant b$. В настоящей статье мы обобщим результаты, полученные в работе /14/ для случая, когда множество элементов матрицы принимают целочисленные значения из отрезка $[a, b]$, $a=1$, $b=r$.

§ 3. Условия асимптотической оптимальности алгоритма $\mathcal{A}'$

Выясним условия, при которых алгоритм $\mathcal{A}'$ для поставленной задачи коммивояжера является асимптотически оптимальным, т.е. для него выполняется условие /1/, где значение $\mathcal{L}_{\mathcal{A}'}$ определяется формулой /2/ и величина $\mathcal{L}$ есть минимально возможное значение веса /длины/ пути коммивояжера:

$$\mathcal{L}=\min_{\{\pi\}}\sum_{K=1}^{n} a_{i_K i_{K+1}}.$$

---

x/ Если считать, что вся матрица A хранится не в оперативной памяти, то для работы алгоритма $\mathcal{A}'$ на K-м шаге нужно выделить ещё дополнительно не более n ячеек для хранения элементов одной строки $i_K^{(K)}$.

Условие /I/ эквивалентно следующему

$$P\left\{\mathcal{L}_{\mathcal{A}'} > (1+\varepsilon_n)\mathcal{L}\right\} \leq \delta_n\,, \qquad /3/$$

где $\varepsilon_n \to 0$ и $\delta_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Оценим сверху левую часть неравенства /3/. Так как $a>0$,то $\mathcal{L} \geq na$ и

$$P\left\{\mathcal{L}_{\mathcal{A}'} > (1+\varepsilon_n)\mathcal{L}\right\} \leq P\left\{\mathcal{L}_{\mathcal{A}'} > (1+\varepsilon_n)na\right\}. \qquad /4/$$

Обозначим через $\mathcal{L}^*_{\mathcal{A}'}$ и $\mathcal{D}^*_{\mathcal{A}'}$ верхние оценки соответственно математического ожидания $\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}'}$ и дисперсии $\mathcal{D}(\mathcal{L}_{\mathcal{A}'})$ случайной величины $\mathcal{L}_{\mathcal{A}'}$. Тогда, обозначая $\Delta_n = (1+\varepsilon_n)na - \mathcal{L}^*_{\mathcal{A}'}$, и продолжая неравенство /4/, имеем

$$P\left\{\mathcal{L}_{\mathcal{A}'} > (1+\varepsilon_n)na\right\} = P\left\{\mathcal{L}_{\mathcal{A}'} > \mathcal{L}^*_{\mathcal{A}'} + \left[(1+\varepsilon_n)na - \mathcal{L}^*_{\mathcal{A}'}\right]\right\} \leq P\left\{\mathcal{L}_{\mathcal{A}'} > \bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}'} + \Delta_n\right\}. \qquad /5/$$

Выбрав величину $\varepsilon_n = K\left(\frac{\mathcal{L}^*_{\mathcal{A}'}}{na} - 1\right)$, $K > 1$, будем иметь $\Delta_n = (K-1)(\mathcal{L}^*_{\mathcal{A}'} - na) > 0$, что дает нам право продолжить неравенство /5/ и воспользоваться известным неравенством Чебышева:

$$P\left\{\mathcal{L}_{\mathcal{A}'} > \bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}'} + \Delta_n\right\} \leq P\left\{|\mathcal{L}_{\mathcal{A}'} - \bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}'}| \geq \Delta_n\right\} \leq \frac{\mathcal{D}(\mathcal{L}_{\mathcal{A}'})}{\Delta_n^2} \leq \frac{\mathcal{D}^*_{\mathcal{A}'}}{\Delta_n^2} = \frac{\mathcal{D}^*_{\mathcal{A}'}}{(K-1)^2(\mathcal{L}^*_{\mathcal{A}'} - na)^2}. \qquad /6/$$

Поскольку K - константа, $K>1$, то из /3/ - /6/ следует, что условие асимптотической оптимальности алгоритма $\mathcal{A}'$ будет выполнено, если мы покажем, что

$$\varepsilon_n = K\left(\frac{\mathcal{L}^*_{\mathcal{A}'}}{na} - 1\right) \to 0 \text{ и } \qquad \delta_n = \frac{\mathcal{D}^*_{\mathcal{A}'}}{(K-1)^2(\mathcal{L}^*_{\mathcal{A}'} - na)^2} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

<u>Вычисление верхних оценок $\mathcal{L}^*_{\mathcal{A}'}$ и $\mathcal{D}^*_{\mathcal{A}'}$</u>. Математическое ожидание $\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}'}$ равно сумме матожиданий величин $a_{i_k i_{k+1}}$ минимальных элементов матрицы, выбираемых на k -м шаге алгоритма $\mathcal{A}'$. В целях удобства дальнейших вычислений пронормируем случайную величину ξ значений элементов a_{ij} матрицы A , положив $\xi' = \frac{\xi - a}{b - a}$.Обозначим через ℓ_k значение матожидания нормированной случайной величины $\ell_k = a'_{i_k i_{k+1}}$. На k -м шаге алгоритма выбирается минимум из $n-k$ элементов. В силу независимости этих элементов вероятность $\Phi_k(x)$ того, что величина ℓ_k минимального из этих элементов не превышает величины x , равна

$$\Phi_k(x) = P\left\{\ell_k \leq x\right\} = 1 - (1 - F(x))^{n-k},$$

где

$$F_k(x) = P\left\{\xi' \leq x\right\}, \; 0 \leq x \leq 1.$$

Тогда величина $\bar{\ell}_k$ равна

$$\bar{\ell}_k = \begin{cases} \int_0^1 x\,d\Phi_k(x), & \text{при } k = 1,2,\dots,n-1, \\ \bar{\ell}_{n-1}, & \text{при } k = n, \end{cases}$$

откуда получим

$$\bar{\ell}_K = x\Phi_K(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \Phi_K(x)dx = 1 - \int_0^1 \left[1-(1-F(x))^{n-K}\right]dx = \int_0^1 (1-F(x))^{n-K}dx, \quad K=\overline{1,n-1}. \qquad /7/$$

В силу нормировки минимальный элемент $a_{i_{K-1}i_K}$ связан с величиной ℓ_K соотношением $a_{i_K i_{K+1}} = a+(b-a)\ell_K$. Поэтому

$$\bar{\mathcal{L}}_{A'} = \sum_{K=1}^{n}\left[a+(b-a)\bar{\ell}_K\right], \qquad /8/$$

откуда с учетом /7/ имеем

$$\bar{\mathcal{L}}_{A'} = na+(b-a)\Big[\int_0^1\sum_{K=1}^{n-1}(1-F(x))^{n-K}dx +$$

$$+\int_0^1(1-F(x))dx\Big] = na+(b-a)\int_0^1\frac{[1-F(x)][1-(1-F(x))^{n-1}+F(x)]}{F(x)}dx \leqslant$$

$$\leqslant na+(b-a)\int_0^1\frac{1-(1-F(x))^n}{F(x)}dx = na+(b-a)\times$$

$$\times\left[\int_0^{\gamma_n}\frac{1-(1-F(x))^n}{F(x)}dx+\int_{\gamma_n}^1\frac{1-(1-F(x))^n}{F(x)}dx\right],$$

где γ_n – корень уравнения $F(\gamma)=\frac{1}{n}$, то-есть $\gamma_n = F^{-1}(\frac{1}{n})$. Учитывая, что при $0\leqslant z\leqslant 1$ справедливо неравенство $\frac{1-(1-z)^n}{z}\leqslant n$, оценку $\bar{\mathcal{L}}_{A'}$, можем продолжить следующим образом

$$\bar{\mathcal{L}}_{A'} \leqslant \mathcal{L}^*_{A'} = na+(b-a)\left[\gamma_n\cdot n+\int_{\gamma_n}^1\frac{dx}{F(x)}\right]. \qquad /9/$$

Перейдем к вычислению верхней оценки $\mathcal{D}^*_{A'}$. Дисперсия d_K случайной нормированной величины ℓ_K на K-м шаге равна

$$d_K = \int_0^1(x-\bar{\ell}_K)^2d\Phi_K(x) = \int_0^1 x^2d\Phi_K(x)-(\bar{\ell}_K)^2 < \int_0^1 x\,d\Phi_K(x) = \bar{\ell}_K.$$

Тогда с учетом того, что дисперсия минимального элемента $a_{i_K i_{K+1}}$ равна $(b-a)^2d_K$, дисперсия случайной величины $\mathcal{L}_{A'}$, с учетом /8/ оценивается следующим образом:

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_{A'}) = \sum_{K=1}^{n}(b-a)^2d_K < (b-a)^2\sum_{K=1}^{n}\bar{\ell}_K =$$

$$= (b-a)^2\cdot\frac{\bar{\mathcal{L}}_{A'}-na}{(b-a)} \leqslant (b-a)(\mathcal{L}^*_{A'}-na).$$

Окончательно с учетом /9/ получаем верхнюю оценку для $\mathcal{D}(\mathcal{L}_{A'})$:

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}_{A'}) < \mathcal{D}^*_{A'} = (b-a)^2\left[\gamma_n\cdot n+\int_{\gamma_n}^1\frac{dx}{F(x)}\right]. \qquad /10/$$

Вернемся к неравенству /6/. Имея в виду полученные оценки /9/ и /10/, выражения для ε_n и δ_n можно записать в следующем виде:

$$\varepsilon_n = K\left(\frac{b}{a}-1\right)\left[\gamma_n+\frac{1}{n}\int_{\gamma_n}^1\frac{dx}{F(x)}\right], \qquad /11/$$

$$\delta_n = \frac{1}{(K-1)^2\left[\gamma_n\cdot n+\int_{\gamma_n}^1\frac{dx}{F(x)}\right]}. \qquad /12/$$

Обозначим $\mathcal{J}_n=\int\limits_{\gamma_n}^{1}\frac{dx}{F(x)}$, $\psi(n)$- произвольная растущая от n функция, $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n=\infty$.

Т е о р е м а I. Алгоритм $\mathcal{A}'$ является асимптотически оптимальным при выполнении условий $\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{J}_n=\infty$ и

$$\frac{b}{a}\le\frac{1}{\psi(n)}\min\left\{\frac{1}{\gamma_n},\frac{n}{\mathcal{J}_n}\right\}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что при выполнении условий теоремы $\varepsilon_n\to 0$ и $\delta_n\to 0$ с ростом n . Действительно, при $K>1$ имеем:

$$\delta_n=\frac{1}{(\gamma_n n+\mathcal{J}_n)(K-1)^2}\le\frac{1}{\mathcal{J}_n\cdot(K-1)^2}\to 0,$$

$$\varepsilon_n=K(\frac{b}{a}-1)(\gamma_n+\frac{1}{n}\mathcal{J}_n)\le K\cdot\frac{b}{a}(\gamma_n+\frac{1}{n}\mathcal{J}_n)\le$$

$$\le\frac{K}{\psi(n)}\min\left(\frac{1}{\gamma_n},\frac{n}{\mathcal{J}_n}\right)(\gamma_n+\frac{1}{n}\mathcal{J}_n)=$$

$$=\frac{K}{\psi(n)}\min\left(1+\frac{\mathcal{J}_n}{n\gamma_n},1+\frac{n\gamma_n}{\mathcal{J}_n}\right)\le\frac{2K}{\psi(n)}\to 0$$

при $n\to\infty$. Теорема I доказана.

З а м е ч а н и е. Как было показано выше, для своей работы алгоритм $\mathcal{A}'$ требует $O(n^2)$ операций, что сравнимо с трудоемкостью записи исходной информации о задаче коммивояжера. Отсюда получаем, что при выполнении условий теоремы I алгоритм $\mathcal{A}'$ является статистически эффектным.

Равномерное распределение. Определим условия асимптотической оптимальности алгоритма $\mathcal{A}'$ для случая, когда элементы a_{ij} матрицы A могут быть выбраны равновероятно из отрезка $[a,b]$, $a>0$. В этом случае нормированная интегральная функция распределения имеет вид $F(x)=x$, $0\le x\le 1$, $\gamma_n=F^{-1}(\frac{1}{n})=\frac{1}{n}$ и

$$\mathcal{J}_n=\int\limits_{\gamma_n}^{1}\frac{dx}{F(x)}=\int\limits_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{dx}{x}=\ln n .$$

Тогда из теоремы I непосредственно получаем результат, который может быть сформулирован как:

Т е о р е м а 2. Если элементы a_{ij} матрицы A принимают значения равновероятно из отрезка $[a, b]$, то алгоритм $\mathcal{A}'$ является асимптотически оптимальным при выполнении следующего условия

$$\frac{b}{a}\le\frac{n}{\ln n}\cdot\frac{1}{\psi(n)}.$$

Представляет интерес оценить величины ε_n и δ_n , фигурирующие в соотношении /I/.

Учитывая специфику равномерного распределения, можно получить более точные оценки для этих величин по сравнению с общим случаем. Выведем условия асимптотической оптимальности алгоритма $\mathcal{A}'$ в случае равномерного распределения, проведя в сокращенном виде вычисление оценок для $\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}'}$, $\mathcal{D}(\mathcal{L}_{\mathcal{A}'})$ и $P\{\mathcal{L}_{\mathcal{A}'} \leq (1+\varepsilon_n)\mathcal{L}\}$. Согласно /7/,

$$\bar{\ell}_K = \int_0^1 (1-x)^{n-K} dx = \int_0^1 x^{n-K} dx = \frac{1}{n-K+1} ,$$

$$K = 1,2,\dots,n-K; \qquad \bar{\ell}_n = \bar{\ell}_{n-1} = \frac{1}{2} . \qquad /13/$$

С учетом /8/

$$\bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}'} = \sum_{K=1}^{n} \left[a + (b-a)\bar{\ell}_K\right] = na + (b-a)\left(\frac{1}{2} + \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{n-K+1}\right) \leq$$

$$\leq na + (b-a)\left(\frac{1}{2} + \ln n\right) = \mathcal{L}^*_{\mathcal{A}'}$$

Оценим дисперсию $d_K = \int_0^1 (x-\bar{\ell}_K)^2 d\Phi_K(x)$ случайной величины ℓ_K с учетом того, что для равномерного распределения $\Phi_K(x) = 1-(1-x)^{n-K}$.

Используя /13/, имеем

$$d_K = \int_0^1 x^2 d\Phi_K(x) - \bar{\ell}_K^2 = x^2\Phi_K(x)\Big|_0^1 - 2\int_0^1 x\Phi_K(x)dx -$$

$$- \bar{\ell}_K^2 = 1 - 2\int_0^1 x\left[1-(1-x)^{n-K}\right]dx - \bar{\ell}_K^2 =$$

$$= \frac{2}{n-K+1} - \frac{2}{n-K+2} - \frac{1}{(n-K+1)^2} ,$$

$$K = 1,2,\dots,n-1; \quad d_n = d_{n-1} = \frac{1}{12} .$$

Отсюда с учетом определения дисперсии величины $\mathcal{L}_{\mathcal{A}'}$, получим

$$\frac{1}{(b-a)^2}\mathcal{D}(\mathcal{L}_{\mathcal{A}'}) = \sum_{K=1}^{n} d_K = \frac{1}{12} + \sum_{K=1}^{n-1}\left(\frac{2}{n-K+1} - \frac{2}{n-K+2} - \frac{1}{(n-K+1)^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{12} - \frac{2}{n+1} + 1 - \sum_{K=1}^{n-1} \frac{1}{(n-K+1)^2} \leq \frac{13}{12} - \frac{2}{n+1} - \frac{1}{4} - \int_3^{n+1} \frac{dx}{x^2} =$$

$$= \frac{13}{12} - \frac{2}{n+1} - \frac{1}{4} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{3} < 0,417 = \frac{\mathcal{D}^*_{\mathcal{A}'}}{(b-a)^2} .$$

Приведем оценку вероятности невыполнения соотношения /1/ для случая равномерного распределения:

$$P\left\{\mathcal{L}_{\mathcal{A}'} > (1+\varepsilon_n)\mathcal{L}\right\} < P\left\{\mathcal{L}_{\mathcal{A}'} > (1+\varepsilon_n)na\right\} \leq$$

$$\leq P\left\{\mathcal{L}_{\mathcal{A}'} + \mathcal{L}^*_{\mathcal{A}'} - \bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}'} > (1+\varepsilon_n)na\right\} =$$

$$= P\left\{\mathcal{L}_{\mathcal{A}'} - \bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}'} > (1+\varepsilon_n)na - \mathcal{L}^*_{\mathcal{A}'}\right\} <$$

$$\leq P\left\{\left|\mathcal{L}_{\mathcal{A}'} - \bar{\mathcal{L}}_{\mathcal{A}'}\right| > (1+\varepsilon_n)na - \mathcal{L}^*_{\mathcal{A}'}\right\} \leq \frac{\mathcal{D}(\mathcal{L}_{\mathcal{A}'})}{\left[(1+\varepsilon_n)na + \mathcal{L}^*_{\mathcal{A}'}\right]^2} <$$

$$< \frac{0{,}417(b-a)^2}{\left[(1+\varepsilon_n)na - (na + (b-a)(\frac{1}{2} + \ln n))\right]^2} = \frac{0{,}417}{\left[\frac{n\varepsilon_n}{\frac{b}{a}-1} - \ln n - \frac{1}{2}\right]^2} .$$

Положим $\varepsilon_n = \frac{c}{\psi(n)}$, константа $c>1$, и пусть $\frac{a}{b} \leqslant \frac{n}{\ln n} \cdot \frac{1}{\psi(n)}$.
Тогда /14/ может быть продолжено следующим образом:

$$\frac{0,417}{\left[\frac{n\cdot\frac{c}{\psi(n)}}{\left(\frac{b}{a}-1\right)}-\frac{1}{2}-\ln n\right]} \leqslant \frac{0,417}{\left[\frac{c\cdot\frac{b}{a}\cdot\ln n}{\frac{b}{a}-1}-\frac{1}{2}-\ln n\right]^2} = \frac{0,417}{\left[(c-1)\ln n-\frac{1}{2}\right]^2} = \delta_n .$$

Таким образом, окончательная оценка для вероятности выполнения соотношения /1/ примет вид:

$$P\left\{\mathcal{L}_{A'} \leqslant (1+\varepsilon_n)\mathcal{L}\right\} \geqslant 1 - \frac{0,417}{\left[(c-1)\ln n-\frac{1}{2}\right]^2} . \qquad /15/$$

Нетрудно заметить, что эта величина, характеризующая точность получаемого решения, улучшается с ростом $\psi(n)$, но при этом ухудшается оценка для величины $\frac{b}{a}$. Выберем функцию $\psi(n)$ таким образом, чтобы произведение верхних оценок для ε_n и $\frac{b}{a}$ стремилось к 1 с ростом n. Такому условию отвечает функция $\psi(n)=\sqrt{\frac{cn}{\ln n}}$. При этом оценки для $\frac{b}{a}$ и ε_n принимают вид:

$$\frac{b}{a} \leqslant \sqrt{\frac{n}{c\ln n}} , \qquad /16/$$

$$\varepsilon_n \leqslant \sqrt{\frac{c\ln n}{n}} . \qquad /17/$$

Анализ соотношений /15/ - /17/, полученных для равномерного распределения показывает, что уменьшение константы c "улучшает" оценки для $\frac{b}{a}$ и ε_n и "ухудшает" оценку вероятности $P\left\{\mathcal{L}_{A'} \leqslant (1+\varepsilon_n)\mathcal{L}\right\}$.

Для примера в таблице приведены значения оценок /15/ - /17/ при $c=\sqrt{2}$ и $n = 10^2,\ 10^3$ и 10^4.

Таблица 1.

n	ε_n	$\frac{b}{a}$	$P\left\{\mathcal{L}_{A'} \leqslant (1+\varepsilon_n)\mathcal{L}\right\}$
10^2	0,253	3,95	0,781
10^3	0,098	10,2	0,923
10^4	0,037	27	0,958

В заключение заметим, что теорема 2 обобщает аналогичный результат, полученный в /14/ для частного случая равномерного распределения величин a_{ij}, принимающих целочисленные значения из отрезка $[1, r]$.

<u>β - распределение.</u> Очень часто в опытно-конструкторских разработках в промышленности и научно-исследовательских проектах длительности a_{ij} отдельных операций предполагаются распределенными по следующему закону /β - распределение/:

$$f(\xi)=\begin{cases}\dfrac{(\xi-a)^{\alpha}(b-\xi)^{\gamma}}{(b-a)^{\alpha+\gamma+1}\beta(\alpha+1,\gamma+1)}, & \text{если } \xi\in[a,b],\\ 0, & \text{если } \xi\notin[a,b],\end{cases}$$

где

$$\beta(\alpha,\gamma)=\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\gamma-1}dx=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha+\gamma)},$$

α и γ - параметры распределения. В нормированном виде функция плотности $f(\xi)$ запишется следующим образом:

$$f(\xi')=\begin{cases}\dfrac{(\xi')^{\alpha}(1-\xi')^{\gamma}}{\beta(\alpha+1,\gamma+1)}, & \text{если } \xi'\in[0,1],\\ 0, & \text{если } \xi'\notin[0,1].\end{cases}$$

Рассмотрим частный случай β - распределения, когда $\gamma=0$, $\alpha>0$. В этом случае интегральная функция распределения равна

$$F(x)=\int_0^x f(\xi')d\xi'=\int_0^x\frac{x}{\beta(\alpha+1,1)}=x^{\alpha+1}.$$

Вычислим величину γ_n, фигурирующую в условиях теоремы I:

$$\gamma_n=F^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt[\alpha+1]{n}}.$$

Тогда первое из условий теоремы I выполняется в силу $\alpha>0$:

$$\mathcal{J}_n=\int_{\gamma_n}^1\frac{dx}{F(x)}=\int_{\gamma_n}^1\frac{dx}{x^{\alpha+1}}=\frac{1}{\alpha}\left(n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}-1\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\infty.$$

Второе условие принимает вид:

$$\frac{b}{a}<\frac{1}{\psi(n)}\cdot\min\left(\sqrt[\alpha+1]{n},\frac{\alpha n}{n^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}-1}\right)=\frac{\sqrt[\alpha+1]{n}}{\psi(n)}\min\left(1,\frac{\alpha}{1-n^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}}\right).$$

Учитывая, что

$$\min\left(1,\frac{\alpha}{1-n^{-\frac{\alpha}{\alpha+1}}}\right)\geq\min(1,\alpha),$$

получаем следующее условие асимптотической оптимальности алгоритма A' для β - распределения в частном случае $\gamma=0$, $\alpha>0$:

$$\frac{b}{a}\leq\frac{\sqrt[\alpha+1]{n}}{\psi(n)}\cdot\min(1,\alpha).$$

§ 4. Некоторые следствия

Сформулированная выше задача коммивояжера известна также как задача нахождения минимального гамильтонова контура на взвешенном n -вершинном ориентированном графе /16/, где веса дуг исходного графа образуют $n\times n$ матрицу $A=\|a_{ij}\|$, a_{ij} - вес дуги, идущей из вершины i в вершину j. Для случая неориентированного графа говорят о выделении минимального гамильтонова цикла и тогда матрица A весов ребер /неориентированных дуг/ является симметричной / $a_{ij}=a_{ji}$, $i,j=1,2,\ldots,n$ /.

Заметим, что если в ходе применения алгоритма $\mathcal{A}'$ рассматривается некоторый элемент $a_{ij} \in A$, то элемент a_{ji} ни на одном шаге алгоритма не рассматривается. На основании этого замечания и теоремы 2 можем сформулировать

С л е д с т в и е I. Пусть задан полный неориентированный n - вершинный граф, у которого веса a_{ij} ребер (i,j) принимают значения равновероятно из отрезка $[a,b]$, $a>0$. Тогда при $\frac{b}{a} \leq \frac{1}{\psi(n)} \cdot \frac{n}{\ln n}$ алгоритм $\mathcal{A}'$ является асимптотически оптимальным для решения задачи выделения минимального гамильтонова цикла.

Описанный выше алгоритм $\mathcal{A}'$ можно использовать для решения таких известных экстремальных комбинаторных задач, как взвешенная задача о покрытии полного графа ребрами и взвешенная задача о совершенном паросочетании на полном графе. Действительно, пусть в результате работы алгоритма $\mathcal{A}'$ получен некоторый гамильтонов цикл из n ребер. Последовательно перенумеруем ребра полученного цикла и через W обозначим множество ребер с нечетными номерами. Очевидно, множество W является некоторым покрытием исходного графа ребрами, а в случае четного n - и совершенным паросочетанием для этого графа. Указанную модификацию алгоритма $\mathcal{A}'$ для получения множества W обозначим через $\mathcal{A}^*$.

С л е д с т в и е 2. Алгоритм $\mathcal{A}^*$ решения взвешенной задачи о покрытии является асимптотически оптимальным, если веса ребер исходного графа принимают значения равновероятно из отрезка $[a,b]$, $a>0$, и $\frac{b}{a} < \frac{1}{\psi(n)} \cdot \frac{n}{\ln n}$. При этом трудоемкость алгоритма $\mathcal{A}^*$ составляет $O(n^2)$ операций.

Для известной задачи о назначениях /I3/ из теоремы I получаем

С л е д с т в и е 3. Алгоритм $\mathcal{A}'$ является асимптотически оптимальным для решения задачи о назначениях с матрицей $A = \|a_{ij}\|$, если элементы a_{ij} принимают значения ξ случайно из отрезка $[a,b]$, $a>0$, согласно функции распределения $\mathcal{F}(x) = P\{\xi < x\}$ при выполнении условий $\lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{J}_n = \infty$ и $\frac{b}{a} \leq \frac{1}{\psi(n)} \min\left(\frac{1}{\gamma_n}, \frac{n}{\mathcal{J}_n}\right)$.

Поступила в ред-изд.отдел
22.II.1973 г.

Л и т е р а т у р а

I. M.Flood. The Travelling - salesman problem, Oper. Res., 1956, v. 4, NI, 6I-75.

2. Р.Беллман. Применение динамического программирования к задаче коммивояжера.-"Киберн.сборник",1964, № 9, 219-222.

3. М.Хелд,Р.Карп.Применение динамического программирования к задачам упорядочения.- "Кибернетический сборник",1964,№ 4,202-2I8.

4. Дж.Литл,К.Мурти,Д.Суини,К.Кэрел. Алгоритм для решения задачи о коммивояжере.-"Экон. и матем.методы", 1965, I, № I, 94-107.

5. В.В.Шкурба и др. Задачи кал·ндарного планирования и методы их решения,-"Наукова думка", Киев, 1966.

6. В.К.Коробков, Р.Е.Кричевский. Некоторые алгоритмы для решения задачи коммивояжера.-сб. "Математические модели и методы оптимального планирования", Новосибирск,."Наука",1966.

7. Д.А.Супруненко, В.С.Айзенштат, Н.А.Лепешинский. Экстремальные значения функций на множествах перестановок,-Тезисы докладов I Всесоюзной конференции по исследованию операций, Минск, 1972,61-64.

8. В.С.Айзенштат, Д.Н.Кравчук. Алгоритмы отыскания экстремума линейной формы на множестве всех полных циклов в некоторых случаях.- - ДАН БССР, т.XII, № 5, 1968, 401-404.

9. P.C.Gilmore, R.E. Gomory. Sequencing a one - state variable machine: a solvable case of travelling salesman problem, Oper. Res., 1964, 12, 655-679.

10. В.К.Леонтьев. Об одной экономической задаче.-"Кибернетика", Киев, 1969, вып. 2, 98-99.

11. Е.Я.Габович. Задача коммивояжера, I.-Труды ВЦ Тартусского государственного университета, Тарту, вып. 19, 1970, 52-96.

12. А.А.Зыков. Теория конечных графов, I."Наука",Новосибирск, 1969.

13. А.А.Боровков.К вероятностной постановке двух экономических задач,-ДАН СССР, 1962. 146. вып. 5.

14. В.А.Перепелица, Э.Х.Гимади. К задаче нахождения минимального гамильтонова контура на графе со взвешенными дугами.-сб."Дискретный анализ", вып. 15, Новосибирск, 1969, 57-65.

15. Э.Х.Гимади, В.А.Перепелица. Статистически эффективный алгоритм выделения гамильтонова контура /цикла/.- сб. "Дискретный анализ", вып. 22, Новосибирск, 1973, 15-28.

16. В.А.Перепелица. О двух задачах из теории графов.- ДАН СССР, 194, № 6, 1970.