Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1974 г. выпуск 12.
УДК.519.95.

ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР, ВЫПОЛНЕННЫХ В ОТДЕЛЕНИИ КИБЕРНЕТИКИ

В.Н.Лагунов, И.А.Красс

Исследования по теории дифференциальных игр в отделении кибернетики ИМ СО АН СССР развивались главным образом в следующих направлениях.

Первое направление образует группа работ [4] - [11], в которых разрабатывался метод исследования нелинейных дифференциальных игр, названный автором [11] экстраполяционным.

Второе направление образуют работы [16] - [21], посвященные исследованию некоторого класса как дискретных [19], [15], [16], так и непрерывных [18] [20] во времени игр с тремя терминальными поверхностями. Кроме того, в работе [21] исследованы вопросы существования седловой точки для дифференциальных игр в банаховом пространстве.

Исследовались и другие аспекты теории дифференциальных игр, в частности о существовании решения минорантной дифференциальной игры в случае двух функционалов [12].

Остановимся более подробно на первых двух направлениях.

I. Суть экстраполяционного метода, лежащего в основе первого направления, заключается в следующем. Пусть движение фазовой точки x в дифференциальной игре описывается векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(x, u_1, u_2); \quad u_1 \in \mathcal{U}_1, \quad u_2 \in \mathcal{U}_2, \tag{1}$$

где $\mathcal{U}_i$ - некоторые классы допустимых управлений u_i соответственно первого и второго игроков /а u_i - векторы соответствующих пространств управлений/. Рассмотрим множество

$$\mathcal{Y}(x(t_0), \Delta t) = \left\{ x(t) : t \in [t_0, t_0 + \Delta t] \right\} \tag{2}$$

траекторий уравнения /1/, исходящих из точки $x(t_0)$ под воздействием всевозможных допустимых управлений игроков на отрезке времени $[t_0, t_0 + \Delta t]$. Обозначим через

$$H(x(t_0)\Delta t) \tag{3}$$

множество концов семейства траекторий /1/. Совокупность множеств /2/, /3/ называется экстраполяционной конструкцией /эта конструкция аналогична до некоторой степени экстремальной конструкции Н.Н.Красовского [2] /. Множество векторов

$$F(x(t_0)) = \left\{ f(x(t_0), u_1, u_2), \quad u_i \in \mathcal{U}_i(t_0) \right\}, \tag{4}$$

где векторы u_i пробегают в момент t_0 всевозможные допустимые значения, называется полной вектограммой в момент t_0 [3] . Если одно из управлений u_{i_0} на отрезке $[t_0, t_0+\Delta t]$ каким-либо образом фиксировано /в частности, оно может быть просто константой/,то такому случаю соответствует подсемейство

$$\mathcal{Y}(z(t_0),\ \Delta t,\ u_{i_0}) \qquad /5/$$

семейства /2/ траекторий и соответственно подмножества

$$H(z(t_0),\ \Delta t,\ u_{i_0}), \qquad /6/$$

$$F(z(t_0),\ u_{i_0}), \qquad /7/$$

множеств /3/, /4/.

Выбирая должным образом Δt и соответствующую /обычно кусочно-программную/ стратегию, тот или иной игрок, используя геометрию получающихся при этом множеств /5/ - /7/, может достичь определенного успеха в игре.

Так, например, в работе [II] рассматривается дифференциальная игра довольного общего вида, где на правую часть системы /I/ накладываются сравнительно слабые ограничения: функция f в /I/ предполагается непрерывной по всем аргументам и удовлетворяющей условию Липшица по z . При некоторых дополнительных предположениях получены достаточные, а для специального случая и необходимые условия убегания, аналогичные в некотором смысле результатам для линейной дифференциальной игры, рассмотренной в [I] .

В работе [7] получена оценка снизу платы в дифференциальной игре преследования для точечных объектов, перемещающихся по траекториям ограниченной кривизны; при этом упомянутая плата есть точная нижняя грань расстояния между объектами на всем бесконечном полуинтервале времени $0 \leqslant t \leqslant \infty$.

Отметим некоторые характерные особенности экстрополяционного метода. Этот метод одинаково применим как к линейным, так и нелинейным дифференциальным играм. Отпадает, как правило, необходимость делать предположение о дискриминации противника. Больше того, в некоторых случаях /см.,например, 8 / объекту на определенных отрезках времени для формирования своего управления вообще не требуется никакой информации о поведении противника.

2. Перейдем теперь ко второму направлению. Исследуемый класс игр, который является одним из подходов к общей задаче о взаимодействии моделей экономической динамики [I3] в конечномерном случае описывается так.

Имеются две модели $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ экономической динамики типа Гейла [I4] с технологическими отображениями a_1, a_2 , две матрицы взаимодействия S_1, S_2 и два неотрицательных вектора $\varepsilon_1, \varepsilon_2$. Если $x_1(0), x_2(0)$ - начальные состояния моделей $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$,то два последовательных хода в этой игре описываются соотношениями

$$\varphi_1(x_1(0), x_2(0)) = x_1(1) + f_1(x_1(0), x_2(0)); \quad x_2(1) = x_2(0) - S_1 f_1(x_1(0), x_2(0)),$$

$$\varphi_1(x_1(0), x_2(0)) \in a_1(x_1(0)); \quad x_1(1) \geqslant \varepsilon_1;$$

$$\varphi_2(x_1(1), x_2(1)) = x_2(2) + f_2(x_1(1), x_2(1)), \quad x_1(2) = x_1(1) - S_2 f_2(x_1(1), x_2(1)),$$

$$\varphi_2(x_1(1), x_2(1)) \in a_2(x_2(1)), \quad x_2(2) \geqslant \varepsilon_2;$$

где пара функций (φ_i, f_i), действующих из E_+^{2n} в E_+^n, есть траектория i -го игрока, управляющего моделью $\mathfrak{M}_i$ $(i=1,2)$.

Если после первого хода неравенство $x_2(1) \geqslant \varepsilon_2$ нарушается,то игру выигрывает первый игрок; если после второго хода нарушено неравенство $x_1(2) \geqslant \varepsilon_1$, то игру выигрывает второй игрок. Наконец, при одновременном нарушении обоих неравенств игра оканчивается ничьей. Ставится задача об отыскании множества V_T^i начальных состояний игры и стратегий, обеспечивающий i -му игроку выигрыш не позже, чем через T периодов. Эта задача является обобщением задачи, рассмотренной в [15], [16]. В работе [17] описываются множества V_T^i, а при некоторых ограничениях на взаимодействующие модели - выигрывающие стратегии.

В случае непрерывного времени и моделей леонтьевского типа описанная выше игра приводится к следующей дифференциальной игре:

$$\dot{x}_1 = A_1(x_1 - f_1) - S_2 f_2; \quad \dot{x}_2 = A_2(x_2 - f_2) - S_1 f_1$$
$$0 < f_i < x_i; \quad x_i \geqslant 0; \quad i = 1,$$

Здесь A_i, S_i - матрицы с неотрицательными элементами; размерности у матрицы A_i суть $n_i \times n_i$ $(i=1,2)$, у матриц S_1 - $n_1 \times n_2$, а у матрицы S_2 - $n_2 \times n_1$.

Если в момент t выполняются соотношения $x_1(t) \geqslant 0$, $x_2(t) \not\geqslant 0$, то игру выигрывает первый игрок, в противном случае /т.е. при $x_1(t) \not\geqslant 0$, $x_2(t) \geqslant 0$/ - второй. Наконец,в случае $x_1(t) \not\geqslant 0$, $x_2(t) \not\geqslant 0$ игра оканчивается ничьей. В этой игре качества,которая обобщает некоторые игры качества рассмотренные в [3], ставится вопрос о нахождении выигрывающих стратегии /в смысле [2]/.

В [18] развивается метод решения дифференциальных игр качества описанного класса.Этот метод, названный авторами методом желательных направлений, позволяет полностью решить заданную игру в случае $n_1 = n_2 = 1$. В [19] этот метод развивается дальше, а также развивается метод отыскания линейных барьеров. С помощью развитых методов полностью исследуется игра при $n_1 = 2$, $n_2 = 1$. Наконец, в [20] показывается, что метод полупроницаемых поверхностей, развитый в общем случае Айзексом для решения игр степени /см. 3 / неприменим к играм качества с двумя терминальными поверхностями.

Поступила в ред.-изд.отдел.
25.I.1974 г.

Литература

1. Л.С.Понтрягин. Линейная дифференциальная игра убегания. Докл.АН СССР, 191, № 2, 1970.

2. Н.Н.Красовский. Игровые задачи о встрече движений. М., "Наука", 1970.

3. Р.Айзекс. Дифференциальные игры, М., "Мир", 1967.

4. В.Н.Лагунов. Об условиях существования преследующего управления.- В кн.: Дискретный анализ, Новосибирск, 1976, вып. II.

5. В.Н.Лагунов. Об управлении преследуемого объекта.- В кн.: Дискретный анализ, Новосибирск, 1968, вып. 13.

6. В.Н.Лагунов. Игра преследования при наличии трения.- В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1968, вып. I.

7. В.Н.Лагунов. Оценка платы в одной дифференциальной игре.- - В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1969, вып. 2.

8. В.Н.Лагунов. Оценка платы в одной дифференциальной игре при наличии эффекта запаздывания. - В кн.: Управляемые системы,Новосибирск, 1970, вып. 6.

9. В.Н.Лагунов. Определение одного класса допустимых движений для случая, когда скорость может обратиться в нуль. - В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1970, вып. 7.

10. В.Н.Лагунов. Асимптотические свойства некоторых нелинейных игр преследования. Докл.АН СССР, 1971, 197, № 2.

11. В.Н.Лагунов. Нелинейная дифференциальная игра убегания.Докл. АН СССР, 1972, 202, № 3.

12. В.И.Болдырев. Существование решения "минорантной" дифференциальной игры в случае двух функционалов. - В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1968, вып. I.

13. И.А.Полетаев, И.А.Красс, Е.П.Волокитин. Тезисы первой всесоюзной конференции по исследованию операций. Минск, 1972.

14. В.Л.Макаров, А.М.Рубинов. Суперлинейные точечномножественные отображения и модели экономической динамики. -"Успехи математических наук", М.,1970, т.25, № 5.

15. И.А.Полетаев. Об использовании моделей производства.- В кн.: Исследования по кибернетике, М., "Сов.радио", 1970.

16. Л.Ф.Гринько, И.А.Красс. Об одной игре двух экономических моделей.- В кн.: Исследования по кибернетике, М., "Сов.радио", 1970.

17. И.А.Красс. Конфликтное взаимодействие двух линейных экономических моделей. - В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1969,вып.2.

18. Е.П.Волокитин,И.А.Красс. Один метод исследования дифференциальных игр качества. - В кн.: Управляемые системы, Новосибирск,1970, вып. 6.

19. И.А.Красс, М.А.Мухсинов. Некоторые методы исследования дифференциальных игр качества с тремя терминальными поверхностями.- В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1972, вып. 10.

20. Е.П.Волокитин. О дифференциальных играх качества с несколькими терминальными поверхностями. - В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1971, вып. 9.

21. М.А.Мухсинов. К теории дифференциальных игр в банаховых пространствах. - В кн.: Управляемые системы, Новосибирск,1973,вып.11.