Управляемые системы, ИМ, ИК СО АН СССР 1974 г. выпуск 12.
УДК.51+519.1.

# ИССЛЕДОВАНИЯ ПО ТЕОРИИ РАСПИСАНИЙ

Э.Х.Гимади, Н.И.Глебов, В.А.Перепелица

Работы по теории расписаний, ведущиеся в Отделении теоретической кибернетики ИМ СО АН СССР, посвящены качественным исследованиям и алгоритмам с оценками. Содержательно эти исследования можно разделить на два направления. Первое направление охватывает работы, относящиеся к различным постановкам задач календарного планирования: задачи сетевого планирования в условиях ограниченных ресурсов, задача Акерса-Фридмена, задача Беллмана-Джонсона и так далее [1] - [6]. Второе направление связано с исследованием экстремальных задач на графах: задача нахождения минимального гамильтонова контура (задача коммивояжера), задача о минимальном покрытии, взвешенная задача о покрытии, задача о назначениях, задача о минимальном совершенном паросочетании и т.д. [7] - [17]. Ниже изложены некоторые результаты, относящиеся к указанным направлениям.

1. Приведем формулировку достаточно общей задачи календарного планирования, известной под названием задачи Акерса-Фридмена. Даны $n$ работ (деталей) и $m$ исполнителей (станков). Каждая работа выполняется всеми $m$ исполнителями согласно заранее определенному порядку $(j_1, j_2, \ldots, j_m)$, вообще говоря, разному для разных работ. Известны длительности $\tau_{ij} \geq 0$ выполнения каждой работы $i$ каждым исполнителем $j$, причем каждая работа одновременно может выполняться только одним исполнителем и каждый исполнитель одновременно может выполнять только одну работу. Допустимым расписанием $T = \|t_{ij}\|$ называем совокупность моментов $t_{ij} \geq 0$ начал выполнения каждой работы $i = 1, 2, \ldots, n$ каждым исполнителем $j = 1, 2, \ldots, m$, удовлетворяющую следующим условиям:

1°. $t_{ij_1} + \tau_{ij_1} \leq t_{ij_2}$, если $i$ -я работа должна выполняться исполнителем $j_2$ после выполнения ее исполнителем $j_1$.

2°. Интервалы $(t_{i_1 j}, t_{i_1 j} + \tau_{i_1 j})$ и $(t_{i_2 j}, t_{i_2 j} + \tau_{i_2 j})$ не пересекаются для любой пары работ $i_1 \neq i_2$ и любого исполнителя $j = 1, 2, \ldots, m$.

Задача состоит в нахождении допустимого расписания $T = \|t_{ij}\|$, при котором достигает минимума по всем $t_{ij} \geq 0$ величина

$$\max_{(i,j)} (t_{ij} + \tau_{ij})..$$

Такое расписание называется оптимальным или минимальным.

В работах [1], [2] был исследован случай двух работ с ограничением 2° более общего вида, а именно, когда заранее указывается множество $G$ таких пар исполнителей $(j_1, j_2)$, для которых выполнение первой работы исполнителем $j_1$ одновременно с выполнением второй работы исполнителем $j_2$ запрещено.

В [1] получена верхняя оценка длины $L$ оптимального расписания для двух вариантов этой задачи в зависимости от того, допускаются или нет перерывы в выполнении каждой работы каждым исполнителем:

$$L < \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{m}(\tau_{1j}+\tau_{2j})+\sqrt{\left(\sum_{j=1}^{m}(\tau_{1j}-\tau_{2j})\right)^2+P(G)}\right), \qquad /1/$$

где

$$P(G)=4\sum_{(j_1,j_2)\in G}\tau_{1j_2}\,\tau_{2j_2}$$

для первого варианта и

$$P(G)=\sum_{(j_1,j_2)\in G}(\tau_{1j_1}+\tau_{2j_2})^2$$

для второго варианта. В работе [2] построен эффективный метод решения этой задачи с трудоемкостью, не превосходящей трудоемкости отыскания кратчайшего пути между двумя вершинами некоторого ориентированного взвешенного графа с числом вершин $N=|G|$.

В работах [3] - [6] исследуется задача Акерса-Фридмена в том случае, когда длительности $\tau_{ij}$ одинаковы, т.е. $\tau_{ij}=\tau$ для всех $i=1,2,\dots,n$ и $j=1,2,\dots,m$. Целью этих исследований является выяснение влияния на длину минимального расписания порядка выполнения работ различными исполнителями.

В работе [3] для $n=2$ получена достижимая оценка длины оптимального расписания $L\leq\tau(m+[\sqrt{m}])$; позже этот результат был обобщен в [1],(см. /1/).

В [4] рассмотрен особый случай, когда $n=(m-2)!$, выполнение всякой работы $i$ начинается с одного и того же исполнителя $j=1$ и заканчивается одним и тем же исполнителем $j=m$, причем порядок выполнения каждой работы остальными $m-2$ исполнителями отличен от порядка выполнения других работ. Для этого случая установлено, что при нечетном $m$ длина оптимального расписания $L=[(m-2)!+m-1]\tau$, а в случае четного $m$ имеем $L\geq[(m-2)!+m]\tau$.

В работе [5] проводятся исследования функции Шеннона $L(n,m)$, определяемой следующим образом. При $\tau_{ij}=1$ исходная совокупность работ в задаче Акерса-Фридмена полностью описывается $n\times m$ матрицей $S=\|s_{ik}\|$, где $s_{ik}$ номер $k$ -го по порядку исполнителя $i$ -й работы. Пусть $L=L(S)$ - длина кратчайшего расписания для матрицы $S$. Тогда $L(n,m)=\max L(S)$, где максимум берется по всевозможным матрицам $S$ ($L(n,m)$ есть длина наилучшего расписания в наихудшем случае). В [5] для функции Шеннона найдены нетривиальные нижняя и верхняя оценки:

$$m+n-1+\min\left\{\left[\frac{m}{n}\right],[\log_2 n]\left(\sqrt{\frac{m}{[\log_2 n]}}-1\right)\right\}\leq L(n,m)\leq m+(n+1)\sqrt{m}.$$

В работе [6] установлено некоторое достаточное условие на матрицы $S$, при котором $L(S)=n$ (т.е. оптимальное расписание является беспростойным). Доказано, что при $m=o(n)$ для почти всех матриц $S$ оптимальное расписание является беспростойным.

Далее остановимся на некоторых результатах, полученных Н.И. Глебовым и С.В.Севостьяновым для задачи Джонсона, которая отличается от задачи Акерса-Фридмена тем, что порядок выполнения работ исполнителями одинаков для всех работ. Джонсоном был построен эффективный алгоритм решения этой задачи (решающее правило) для случая двух исполнителей ($n \times 2$ - задача Джонсона). Им же указан некоторый класс $n \times 3$ -задач, сводящихся к $n \times 2$ - задачам. Позже некоторое расширение этого класса задач было осуществлено Г.Яшке, (*G. Jaeschke*), а затем В.Я.Бурдюком. Н.И.Глебову удалось существенно расширить класс эффективно решаемых $n \times 3$ -задач, получив достаточно общее условие сводимости $n \times 3$ -задачи к $n \times 2$- задаче. В несколько ослабленном виде это условие формулируется так: для того чтобы указанная сводимость имела место, достаточно, чтобы существовало число $\lambda \in [0,1]$, при котором выполняется неравенство

$$\min_{1 \le i \le n} [\lambda a_i - (1-\lambda) b_i] + \min_{1 \le i \le n} [(1-\lambda) c_i - \lambda b_i] > 0,$$

где $a_i$, $b_i$, $c_i$ - длительности выполнения $i$ -й работы соответственно первым, вторым и третьим исполнителями. При $\lambda = 0$ или $\lambda = 1$ это условие превращается в условие Джонсона.

Для $n \times 3$ - задачи Джонсона С.В.Севастьянов построил алгоритм трудоемкости $\sim n^2$ действий, приводящий к асимптотически оптимальному расписанию, т.е. к расписанию длины $L^*$ такому, что $\frac{L^*}{L} \to 1$ при $n \to \infty$, где $L$ - длина оптимального расписания. Аналогичный результат им же получен для следующей задачи календарного распределения работ по $M$ периодам в случае трех исполнителей: ищется такое разбиение $n$ работ на $M$ подмножеств $N_p$, $p = 1, 2, \ldots, M$, которое минимизирует функционал

$$f(N, \ldots, N_M) = \max_{1 \le p, q \le M} \max_{1 \le j \le 3} \left( \sum_{i \in N_p} \tau_{ij} - \sum_{i \in N_q} \tau_{ij} \right).$$

П. Перейдем к рассмотрению второго направления - экстремальным задачам на графах. Наиболее известной здесь является задача коммивояжера (ЗК), которая состоит в нахождении кратчайшего замкнутого обхода всех вершин взвешенного графа (гамильтонова контура или цикла).

В.К.Коробков и Р.Е.Кричевский [7] предложили алгоритм точного решения ЗК, имеющий трудоемкость порядка $(4+\varepsilon_n)^n$ операций, где $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$, $n$ - число вершин в исходном графе. Заметим, что известные алгоритмы точного решения ЗК (метод ветвей и границ, метод последовательного анализа и отсеивания вариантов, динамическое программирование) для своей работы требуют $\sim 2^{(1+\varepsilon_n)n}$ операций и $\sim 2^n$ ячеек памяти, в то время как в [7] требуется память порядка $n$. В работе [7] предлагается также алгоритм решения задачи двух коммивояжеров, в которой требуется, чтобы в каждой из $n$ точек побывал хотя бы один коммивояжер так, чтобы время от их выхода до возвращения в исходную вершину последнего коммивояжера было минимальным. В этом случае требуется решить порядка $2^n/\sqrt{n}$ задач одного коммивояжера, вообще говоря, на графах с меньшим числом вершин. В указанной работе существенно используются некоторые результаты по монотонным функциям алгебры логики.

В.К.Леонтьевым /8/ выделен класс полных взвешенных графов, для которых построен алгоритм решения ЗК трудоемкости $\sim n^2$ шагов, на каждом из которых находится произвольный гамильтонов контур на некотором неполном графе.

Как теоретические оценки, так и опыт решения экстремальных задач типа ЗК показывают, что известные точные методы в общем случае не гарантируют от перебора, растущего по экспоненте $C^n, n>2$, с ростом размерности $n$ задачи. Вычислительные трудности с ростом $n$ очень быстро становятся непреодолимыми; например, для ЗК указанные точные методы удается реализовать на ЭВМ для значений $n$, не превышающих 35. В связи с этим большой интерес представляют статистически эффективные алгоритмы для решения названных выше экстремальных комбинаторных задач, т.е. алгоритмы удовлетворяющие следующим двум условиям:

I) трудоемкость их сравнительно невелика (например, сравнима с трудоемкостью записи исходной информации о задаче);

2) применение их почти всегда приводит либо к точному, либо к асимптотически точному решению.

Алгоритм $\mathcal{A}$ будем называть асимптотически точным, если существуют такие неотрицательные $\varepsilon_n \to 0, \delta_n \to 0$ при $n \to \infty$, что $\mathcal{P}\{L_{\mathcal{A}} < L(1+\varepsilon_n)\} \geq 1-\delta_n$, где $L$ - точное решение задачи, $L_{\mathcal{A}}$ - решение, полученное в результате применения алгоритма $\mathcal{A}$, $\mathcal{P}\{S\}$ - вероятность события $S$.

Первый результат в направлении выделения классов задач, для которых представляется возможным построение статистически эффективных алгоритмов, получен при анализе известного приближенного алгоритма $\mathcal{A}'$ решения ЗК, строящего кратчайший путь обхода по принципу "иди в ближайшую еще непройденную вершину". В работе [9] авторы исследовали множество $\mathfrak{A}_{n,r}$ всевозможных полных $n$ -вершинных ориентированных графов, у которых весами дуг являются натуральные числа из отрезка $[1, r]$, и показали статистическую эффективность алгоритма $\mathcal{A}'$ для множества $\mathfrak{A}_{n,r}$ при $r < \frac{n}{\ln n} \cdot \frac{1}{\psi(n)}$, где $\psi(n)$ - произвольная, сколь угодно медленно растущая функция от $n$, $\lim\limits_{n\to\infty} \psi(n) = \infty$.

Позже в работе [10] этот результат авторы обобщили на случай, когда веса дуг графа равновероятно принимают любые значения из такого отрезка $[a, b]$, $a>0$, что $\frac{b}{a} < \frac{n}{\ln n} \cdot \frac{1}{\psi(n)}$. В работе [9] исследован также общий случай, когда веса $\nu = 1, 2, \ldots, r$ приписываются дугам графа с вероятностью $p_\nu \geq 0$, $\sum\limits_{\nu=1}^{r} p_\nu = 1$. Установлено, что алгоритм $\mathcal{A}'$ является статистически эффективным, если выполняется следующее соотношение $\sum\limits_{\nu=1}^{r} \frac{1}{F_\nu} < \frac{n}{\psi(n)}$, где $F_\nu = \sum\limits_{t=1}^{\nu} p_t$.

В работе [I2] этот результат был обобщен на случай непрерывного распределения в виде следующей теоремы:

Пусть веса дуг исходного графа принимают случайные значения $\xi$ независимо друг от друга из отрезка $[a, b]$, $a > 0$, и $F(x)$ - интегральная функция распределения нормированной случайной величины $\xi' = \frac{\xi - a}{b - a}$. Тогда алгоритм $\mathcal{A}'$ является статистически эффективным при выполнении условий:

$$\frac{b}{a} < \frac{1}{\varphi(n)} \min\left[\frac{1}{\gamma_n}, \frac{n}{J_n}\right], \quad \lim_{n\to\infty} J_n = \infty,$$

где $\gamma_n$ - корень уравнения $F(y) = \frac{1}{n}$,

$$J_n = \int_{\gamma_n}^{1} \frac{dx}{F(x)}.$$

Как в дискретном, так и в непрерывном случаях при выполнении указанных выше условий алгоритм $\mathcal{A}'$ является статистически эффективным также для задачи о назначениях, поскольку всякую $n \times n$ - матрицу задачи о назначениях можно рассматривать как матрицу весов полного взвешенного графа.

В случае, если ЗК решается на произвольном ( неполном ) графе, то $\mathcal{A}'$ может прекратить работу, не выделив никакого гамильтонова контура. В работах [II], [I3] рассматривается общая ситуация, когда требуется выделить гамильтонов контур ( цикл ) или минимальный гамильтонов контур ( цикл ) на произвольном графе. В этих статьях предлагается алгоритм $\mathcal{A}_\varphi$, который для почти всех $n$ -вершинных графов выделяет гамильтонов контур (цикл). В случае вероятностного графа, если вероятность появления дуги $p \geq \sqrt{\frac{2\ln n}{n}}$, то $\mathcal{A}_\varphi$ с вероятностью $P \geq 1 - \delta_n$, $\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0$, находит гамильтонов контур. Пусть $\mathfrak{A}^*_{n,r}$ ($\widetilde{\mathfrak{A}}_{n,r}$) - множество всех ориентированных ( неориентированных ) $n$ -вершинных графов, у которых дугам ( ребрам ) в качестве весов приписаны натуральные числа из отрезка $[1, r]$. Применим алгоритм $\mathcal{A}_\varphi$ для решения ЗК на графах из этих множеств. В этом случае $\mathcal{A}_\varphi$ является статистически эффективным, если $r \leq \sqrt{\frac{n}{2\ln n}}$, причем его трудоемкость составляет $\sim n^2$ действий ( элементарных операций ) и $\sim n^2$ ячеек памяти.

В работе [I2] эти результаты были улучшены в следующем смысле. Построен алгоритм $\mathcal{A}_{mpr}$ решения ЗК на произвольном взвешенном графе ( $m, p$ и $r$ - некоторые параметры, зависящие от $n$ ), трудоемкость $\mathcal{A}_{mpr}$ составляет $O(n^2)$ операций ( точнее, $\sim \frac{n^2}{\ln n}$ операций ) при требуемой памяти $\sim n^2$ ячеек для хранения элементов исходной матрицы весов. Доказано, что $\mathcal{A}_{mpr}$ является статистически эффективным алгоритмом решения ЗК применительно к графам из множеств $\mathfrak{A}^*_{n,r}$, $\widetilde{\mathfrak{A}}_{n,r}$, если $r < (1 - \varepsilon_n)\sqrt{\frac{2n}{\ln n}}$, или применительно к вероятностным графам при $p \geq (1 + \varepsilon_n)\sqrt{\frac{\ln n}{2n}}$. Для случая обыкновенного неполного графа это означает, что указанный алгоритм выделяет гамильтонов контур (цикл) для почти всех графов с числом дуг $N \cong (1+\varepsilon_n)\frac{n}{2}\sqrt{2n\ln n}$ (ребер $N \cong (1+\varepsilon_n)\frac{n}{2}\sqrt{\frac{1}{2}n\ln n}$).

Пусть на неориентированном графе выделен гамильтонов цикл, в котором перенумеруем в порядке обхода все ребра. Если в этом цикле все четные дуги вычеркнем, то получим некоторое покрытие графа ребрами. Это же покрытие при четном числе вершин одновременно является и совершенным паросочетанием. С учетом этого показано, что при выполнении названных выше условий некоторые несущественные модификации алгоритмов $\mathcal{A}'$, $\mathcal{A}_\varphi$, $\mathcal{A}_{mp\tau}$ являются статитстически эффективными при решении задач о минимальном покрытии, о минимальном совершенном паросочетании, выделения минимальной гамильтоновой цепи, кратчайшей связывающей сети, взвешенной задачи о покрытии, задачи $m$ коммивояжеров (для $m = o(n)$). Например, модификация алгоритма $\mathcal{A}_{mp\tau}$ обладает свойством статистической эффективности для указанных задач, если исходные графы выбираются из таких множеств $\tilde{\mathfrak{A}}_{n,\tau}$, для которых $\tau < \sqrt{\frac{2n}{\ln n}}(1-\varepsilon_n)$.

А.И.Сердюков [14] исследовал задачу о кратчайшем маршруте обхода всех ребер произвольного $n$ -вершинного взвешенного графа $G(U)$ (эйлеров обход). Он доказал, что эта задача эквивалентна задаче нахождения минимального совершенного паросочетания на некотором полном $m$ -вершинном взвешенном графе, где $m$ - число вершин нечетной степени в исходном графе $G(U)$. Установлено достаточное условие вхождения произвольного ребра в минимальное совершенное паросочетание и построен алгоритм решения указанных задач трудоемкости $\sim 2^{\frac{n}{2}(1+\varepsilon_n)}$ действий.

В работе [15] предлагается приближенный алгоритм решения взвешенной задачи о покрытии, для которого априорная оценка относительного уклонения получаемого решения от оптимума не превосходит 1/3. Трудоемкость этого алгоритма составляет $\sim n^3$ действий, причем в классе двудольных графов он приводит к точному решению.

Для вероятностных $n$- вершинных неориентированных графов $\tilde{G}_n$ Э.Х.Гимади и А.И.Сердюковым построены алгоритмы выделения совершенного паросочетания (минимального покрытия). Один из этих алгоритмов, имея трудоемкость $\sim n^2$ операций и $\sim n^2$ требуемых ячеек памяти, почти всегда выделяет в графе $\tilde{G}_n$ совершенное паросочетание (при $n$ - четном), если $p \geqslant \frac{2\ln n}{n}$.

Аналогичные статистически-эффективные алгоритмы для нахождения совершенного паросочетания (минимального покрытия графа дугами) построены и для $n$ - вершинных вероятностных ориентированных графов.

Упомянем работу [17], где доказывается, что для почти всех графов из $\mathfrak{A}^{*}_{n,r}$ решение задачи о назначениях состоит из весов, равных I, если $r < \frac{n}{2\ln n}$ .

В заключение отметим, что в рабо е [16] задача нахождения оптимального севооборота в конечном счете свелась к некоторой экстремальной задаче на взвешенном графе, родственной задаче о назначениях.

Поступила в ред.-изд.отдел
30.I.1974 г.

Литература

I. Н.И.Глебов. О верхней оценке длины оптимального расписания для двух работ.- В кн: Проблемы кибернетики. вып.20,М.,"Наука",1968.

2. Н.И.Глебов. Алгоритм составления оптимального расписания для двух работ.- В кн: Управляемые системы, Новосибирск,"Наука", 1968, вып. I.

3. В.Э.Хенкин. Об одном вопросе теории расписаний.-"Кибернетика", Киев, "Наукова думка", 1966, № 6.

4. В.Э.Хенкин. О некоторых последовательностях перестановок, возникающих в теории расписаний. - В кн.: Проблемы кибернетики, М., "Наука", 1968, вып. 20.

5. Н.И.Глебов, В.А.Перепелица. О верхней и нижней оценках для одной задачи теории расписаний.- В кн.: Исследования по кибернетике, М.,"Советское радио", 1970.

6. В.А.Перепелица. Об одной задаче теории расписаний.- "Кибернетика", Киев, "Наукова думка", 1966, № 5.

7. В.К.Коробков, Р.Е.Кричевский. Некоторые алгоритмы для решения задачи коммивояжера. - В кн.; Математические модели и методы оптимального планирования, Новосибирск, "Наука", 1966.

8. В.К.Леонтьев. Об одной экономической задаче.- "Кибернетика", Киев, "Наукова думка", 1969, вып. 2.

9. В.А.Перепелица, Э.Х.Гимади. К задаче нахождения минимального гамильтонова контура на графе со взвешенными дугами.- В кн.: Дискретный анализ, Новосибирск, 1969, вып.I5.

I0. Э.Х.Гимади, В.А.Перепелица. Статистически эффективный алгоритм выделения гамильтонова контура цикла. - В кн.: Дискретный анализ, Новосибирск, 1973, вып. 22.

II. В.А.Перепелица. О двух задачах из теории графов.- Докл. АН СССР, 1970, № 6.

I2. Э.Х.Гимади, В.А.Перепелица. Асимптотический подход к решению задачи коммивояжера. - В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, 1974. вып. I2.

I3. В.А. Перепелица. Асимптотический подход к решению некоторых экстремальных задач на графах. - В кн.: Проблемы кибернетики, М.,"Наука", I973, вып. 26.

I4. А.И.Сердюков. О задаче нахождения минимального эйлерова мультиграфа для связного графа со взвешенными ребрами.- В кн.: Тезисы докладов X научной студенческой конференции математика ,НГУ, Новосибирск, I972.

I5. А.И.Сердюков. К задаче нахождения минимального покрытия. Материалы XI научной студенческой конференции математика , НГУ,Новосибирск, I973.

I6. А.Ф.Ватищев, В.А.Перепелица. Об одном алгоритме нахождения оптимального севооборота. - В кн.: Оптимальное планирование,Новосибирск, I970, вып. I6.

I7. В.А.Перепелица. К задаче о назначении. В кн.: Управляемые системы, Новосибирск, I969, вып. 2.