Управляемые системы, ИМ,ИК СО АН СССР 1973 г. выпуск II.
УДК.519.95

МЕТОД ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ И ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ II

Ю.М.Волин, Г.М.Островский, А.В.Финкельштейн

С помощью сформулированного в первой части работы [I] подхода выводятся необходимые условия оптимальности в виде обобщенного принципа максимума для задачи оптимального управления процессами, описываемыми системами дифференциальных уравнений в частных производных.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\mathcal{J}(u(\cdot)) = \int_0^T \varphi_0(z_L(t))dt \to max \; ; \qquad /1/$$

$$\frac{\partial z}{\partial \ell} = f(z,y,u), \; \frac{\partial y}{\partial t} = g(z,y,u), \; P=\{\ell,t\}\in D; \qquad /2/$$
$$(z\in R^n, \; y\in R^m)$$

$$z(0,t)=z_0(t), \quad y(\ell,0)=y_0(\ell) \; ; \qquad /3/$$

$$u(P)\in U\subset R^p \; ; \; P\in D \; ; \qquad /4/$$

$$\varphi_i(z_L(\cdot))=0, \; i=1,\dots,q<n \; (z_L(\cdot)=z(L,t)); \qquad /5/$$

$D=\{\ell,t: 0\le\ell\le L, 0\le t\le T\}$; U ограничено, $z_0(\cdot)$, $y_0(\cdot)$ - кусочно-непрерывные фиксированные начальные функции; f, g, φ непрерывны по совокупности аргументов вместе с первыми производными по X, Z_L $(x^T=(z^T, y^T))$
и имеют ограниченные вторые производные по X, Z_L; вектор-функция $G\,(G^T=(f^T, y^T))$ удовлетворяет условию Липшица с константой C:

$$|G(x'',u)-G(x',u)|\le C\,|x'-x''|, \qquad /6/$$

где $|a|=\sum_{i=1}^{z}|a_i|$ $(a^T=(a_1,\dots,a_z))$, при выполнении которого имеем $x\in X$, где X - ограниченное множество в R^{n+m}. Под классом допустимых управлений U будем понимать совокупность кусочно-непрерывных $u(\cdot)$, удовлетворяющих /4/.

Задача /I/ - /5/ имеет место при оптимизации химического реактора с изменяющейся активностью катализатора: переменная z при этом играет роль концентраций реагирующих веществ, y - параметров, характеризующих состояние катализатора, u - температуры процесса.

До сих пор в литературе для задач подобного типа были получены необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума лишь при разного рода дополнительных ограничениях на свойства рассматриваемой системы [2].

Задача /I/ - /5/ принадлежит к классу задач, рассмотренных в [I]. В этом нетрудно убедиться, если, например, под B_u понимать $L_2(R^p;D)$, под B_F - $L_2(R^q;[0,T])$ и считать, что условиям /3/ работы [I] отвечают условия /5/.

Л е м м а I. Пусть $u(\cdot), \bar{u}(\cdot)$ - допустимые управления, $x_0(\cdot)$, $\bar{x}_0(\cdot)$ - начальные функции и $x(\cdot)$, $\bar{x}(\cdot)$ - соответствующие фазовые переменные. Имеет место оценка:

$$|\Delta z(\ell,t)| \le C_1 \Big(|\Delta z_0(t)| + \int_0^T |\Delta z_0|\,dt + \int_0^L |\Delta y_0|\,d\ell + \int_0^L |f(x(\sigma,t),\bar{u}(\sigma,t)) - f(x(\sigma,t),u(\sigma,t))|\,d\sigma + \iint_D |G(x,\bar{u}) - G(x,u)|\,dP \Big),$$

$$|\Delta y(\ell,t)| \le C_1 \Big(|\Delta y_0(\ell)| + \int_0^T |\Delta z_0|\,dt + \int_0^L |\Delta y_0|\,d\ell + \int_0^T |g(x(\ell,\sigma),\bar{u}(\ell,\sigma)) - g(x(\ell,\sigma),u(\ell,\sigma))|\,d\sigma + \iint_D |G(x,\bar{u}) - G(x,u)|\,dP \Big), \quad /7/$$

где $\Delta z = \bar{z} - z$, $\Delta y = \bar{y} - y$, $\Delta z_0 = \bar{z}_0 - z_0$, $\Delta y_0 = \bar{y}_0 - y_0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Интегрируя /2/, с учетом /6/ имеем

$$|\Delta z(\ell,t)| \le |\Delta z_0(t)| + C\int_0^\ell (|\Delta z(\sigma_1,t)| + |\Delta y(\sigma_1,t)|)\,d\sigma_1 + \int_0^L |f(x,\bar{u}) - f(x,u)|\,d\ell,$$

$$|\Delta y(\ell,t)| \le |\Delta y_0(\ell)| + C\int_0^t (|\Delta z(\ell,\sigma_2)| + |\Delta y(\ell,\sigma_2)|)\,d\sigma_2 + \int_0^T |g(x,\bar{u}) - g(x,u)|\,dt. \quad /8/$$

С помощью леммы об интегральных неравенствах [3]:

$$\forall t\in[0,T]\ \Big(0 \le y(t) \le A + B\int_0^t y(s)\,ds\Big) \Longrightarrow \forall t\in[0,T]\ \big(y(t) \le Ae^{Bt}\big) \quad /9/$$

из оценок /8/ получаем:

$$|\Delta z(\ell,t)| \le A_1\Big(|\Delta z_0(t)| + \int_0^\ell |\Delta y|\,d\sigma_1 + \int_0^L |f(x,\bar{u}) - f(x,u)|\,d\ell\Big),$$

$$|\Delta y(\ell,t)| \le A_1\Big(|\Delta y_0(\ell)| + \int_0^t |\Delta z|\,d\sigma_2 + \int_0^T |g(x,\bar{u}) - g(x,u)|\,dt\Big). \quad /10/$$

Из неравенства /10/ следует:

$$|\Delta z(\ell,t)|\leq A_2\Big(|\Delta z_o(t)|+\int_0^Z|\Delta y_o|d\ell+\int_0^\ell\int_0^T|\Delta z|d\sigma_1 dt+$$

$$+\iint_D|g(x,\bar u)-g(x,u)|dP+\int_0^Z|f(x,\bar u)-f(x,u)|d\ell,$$

$$|\Delta y(\ell,t)|\leq A_2\Big(|\Delta y_o(\ell)|+\int_0^T|\Delta z_o|dt+\int_0^Z\int_0^t|\Delta y|d\ell d\sigma_2+$$

$$+\iint_D|f(x,\bar u)-f(x,u)|dP+\int_0^T|g(x,\bar u)-g(x,u)|dt. \qquad /11/$$

Интегрируя первое из неравенств /11/ по t от 0 до T, второе - по ℓ от 0 до Z и снова применяя лемму об интегральных неравенствах, получаем

$$\int_0^T|\Delta z|dt+\int_0^Z|\Delta y|d\ell\leq A_3\Big(\int_0^T|\Delta z_o|dt+\int_0^Z|\Delta y_o|d\ell+$$

$$+\iint_D|G(x,\bar u)-G(x,u)|dP\Big). \qquad /12/$$

С помощью /10/, /12/ теперь легко получаются оценки /7/.

Введем обозначение /для $S'\subset D$ /:

$$\Delta_\ell=\{\ell,\sigma:0\leq\sigma\leq T\},\ \Delta_t=\{\sigma,t:0\leq\sigma\leq Z\}$$

$$d_S=\max\{\sup_{0\leq\ell\leq Z}\mu(\Delta_\ell\cap S),\ \sup_{0\leq t\leq T}\mu(\Delta_t\cap S')\}. \qquad /13/$$

Л е м м а 2. Пусть $u(\cdot)$, $\bar u(\cdot)$ - допустимые управления, $x(\cdot)$, $\bar x(\cdot)$ - соответствующие фазовые переменные, вычисленные при помощи одной и той же начальной функции $x_o(\cdot)$ $M=\{P:u(P)\neq\bar u(P)\}$. Тогда

$$J(\bar u)-J(u)=\iint_D(H(x,\varphi,\bar u)-H(x,\varphi,u))dP+O(d_M\,\mu_M); \qquad /14/$$

$$H(x,\varphi,u)=\varphi^T G(x,u)\qquad(\varphi^T=(\nu^T,\xi^T)); \qquad /15/$$

$$\frac{\partial\nu}{\partial\ell}=-\frac{\partial H}{\partial z},\quad\frac{\partial\xi}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial y},\quad P\in D; \qquad /16/$$

$$\xi(\cdot,T)=0; \qquad /17/$$

$$\nu(L,\cdot)=\varphi^T_{oz_L}(z_L(\cdot)), \qquad /18/$$

где $|O(d_M\mu_M)|\leq C_2 d_M\mu_M$ / C_2 - константа, общая для всех $u,\bar u$ /.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\ell}(\nu^T\Delta z)+\frac{\partial}{\partial t}(\xi^T\Delta y)=\varphi^T(G(\bar x,\bar u)-G(x,u))-\varphi^T G_x(x,u)\Delta x.$$

После интегрирования обеих частей равенства по области D :

$$\int_0^T \varphi_{oz_L} \Delta z_L \, dt = \iint (H(\bar{x},\varphi,\bar{u}) - H(x,\varphi,u) - H_x(x,\varphi,u)\Delta x)\,dP.$$

Отсюда $\mathcal{I}(\bar{u}) - \mathcal{I}(u) = \iint\limits_D (H(x,\varphi,\bar{u}) - H(x,\varphi,u))\,dP + \mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3$.

$$\mathcal{I}_1 = 0.5\int_0^T \Delta z_L^T \varphi_{oz_L^2}(z_L')\,\Delta z_L\,dt,$$

$$\mathcal{I}_2 = \iint\limits_D (H_x(x,\varphi,\bar{u}) - H_x(x,\varphi,u))\,\Delta x\,dP,$$

$$\mathcal{I}_3 = 0.5\iint\limits_D \Delta x^T H_{x^2}(x',\varphi,\bar{u})\,\Delta x\,dP,$$

$$z_L' = z_L + \theta_1\Delta z_L,\ x' = x + \theta_2\Delta x,\ 0 \leqslant \theta_1,\ \theta_2 \leqslant 1.$$

Далее из /7/ следует:

$$|\Delta x(P)| \leqslant C_3(d_M + \mu_M),$$

$$\int_0^T |\Delta z(\ell,t)|\,dt + \int_0^L |\Delta y(\ell,t)|\,d\ell \leqslant C_3\mu_M. \qquad /19/$$

Для $\mathcal{I}_3$ имеем с помощью /19/ оценку:

$$2|\mathcal{I}_3| \leqslant C_4(d_M + \mu_M)\iint\limits_D |\Delta x|\,dP \leqslant C_5(d_M + \mu_M)\mu_M \leqslant$$

$$\leqslant C_5 d_M\mu_M + \mu_M d_M(L+T) \leqslant C_6 d_M\mu_M.$$

$\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ оцениваются аналогично.

Пусть далее $\bar{H}(x,\varphi)$, $M^{\varepsilon}_{H,u}$, $\mu^{\varepsilon}_{H,u}$ определяются формулами /31/ - /33/ работы [I] /с заменой t на P /.

Т е о р е м а I /обобщенный принцип максимума для задачи /I/ - /4//. Пусть $\{u^{(k)}(\cdot)\}$ есть обобщенное решение задачи /I/- - /4/. Тогда

$$\iint\limits_D (\bar{H}(x^{(k)},\varphi^{(k)}) - H(x^{(k)},\varphi^{(k)},u^{(k)}))\,dP \to 0,\ k \to \infty. \qquad /20/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим, что /20/ не выполняется. Тогда существуют $\varepsilon > 0$, $\{k_r\}$ /k_r ∞ / и $\delta_1 > 0$ такие, что $\mu^{\varepsilon}_{H,u^{(k_r)}} > \delta_1$. Пусть $0 < \delta_2 \leqslant 0{,}1\varepsilon/C_2$. В силу леммы 4, $|0(d_M\mu_M)| \leqslant 0{,}1\varepsilon\mu_M$, если $d_M < \delta_2$. Разделим D на N равных прямоугольников S_1, ..., S_N с длинами сторон, меньшими, чем δ_2. При каждом r = I, 2, ... выберем S_r, для которого $\mu(S_r \cap M^{\varepsilon}_{H,u^{(k_r)}})$ максимально. Пусть $\delta = \delta_1/N$. $\mu(S_r) > \delta$. Выберем M_r так, чтобы $M_r \subset S_r$, $\delta < \mu(M_r) < 2\delta$. Имеем $d_{M_r} < \delta_2$.

Теперь для завершения доказательства остается воспользоваться рассуждениями, приведенными в конце доказательства теоремы 3 работы [I].

Замечание I. Необходимое условие оптимальности обобщенного решения задачи /I/ - /4/ имеет форму /9/ работы [I], если ввести обозначение:

$$P_J(u(\cdot)) = \iint_D (\bar H(x,\psi) - H(x,\psi,u))dP, \qquad /21/$$

где $\psi(\cdot)$ удовлетворяют /16/ - /18/.

Замечание 2. Если $J(u)$ имеет вид:

$$J(u) = \int_0^T \varphi(z_L(t))dt + \iint_D f_0(x,u)dP$$

то, как легко показать, теорема I сохраняет силу, если H выражать по формуле:

$$H(x,\psi,u) = f_0(x,u) + \psi^T G(x,u). \qquad /15a/$$

Теорема 2 /первая форма обобщенного принципа максимума для задачи /I/ - /5/ /. Пусть $\bar{\bar{u}}(\cdot)$ - обобщенное решение задачи /I/ - /5/. Тогда существуют $\{\tilde u^{(k)}(\cdot)\}$, $\{\lambda^{(k)}(\cdot)\}$, $(\lambda(\cdot) \in L_1(R^{q+1}; [0,T]),$

$$\|\lambda(\cdot)\|_{L_1} = \int_0^T |\lambda(t)|dt, \ \lambda_0(\cdot) \equiv 1)$$

такие, что

$$\iint_D \|\tilde u^{(k)} - \bar{\bar{u}}^{(k)}\|^2 dP \to 0, \qquad /22/$$

$$k \to \infty$$

$$\iint_D (\bar H(\tilde x^{(k)}, \tilde\varphi^{(k)}) - H(\tilde x^{(k)}, \tilde\varphi^{(k)}, \tilde u^{(k)}))dP \to 0, \qquad /23/$$

где $\tilde\varphi^{(k)}(\cdot)$ удовлетворяют /16/, /17/ и краевому условию

$$\nu(L,\cdot) = \varphi^T_{z_L}(z_L(\cdot))\lambda(\cdot) \qquad /24/$$

/в правую часть /24/ должны быть подставлены $\tilde z_L^{(k)}(\cdot)$, $\lambda^{(k)}(\cdot)$.

Доказательство. Пусть /сравним формулу /II/ работы [I] /:

$$J_{\alpha\beta}(u(\cdot)) = \int_0^T (\varphi_0(z_L(t)) - \frac{\alpha}{2}\sum_{e=1}^{q} \varphi_e^2(z_L(t)))dt - \beta\iint_D \|u - \bar{\bar{u}}\|^2 dP \qquad /25/$$

и $P_J(u(\cdot))$ определен формулой /21/. Легко видеть, что

$$P(u(\cdot),\alpha,\beta) = \iint_D (\bar H_\beta(x,\psi) - H_\beta(x,\psi,u))dP,$$

где /в соответствии с /15a//

$$H_\beta(x,\psi,u) = \psi^T G(x,u) - \beta\|u - \bar{\bar{u}}\|^2 \qquad /26/$$

и $\psi(\cdot)$ удовлетворяет /16/, /17/ и краевому условию

$$\nu(z,\cdot) = \varphi^T_{0z_L}(z_L(\cdot)) -$$
$$-\alpha\sum_{\ell=1}^{q}\varphi_\ell(z_L(\cdot))\varphi^T_{\ell z_L}(z_L(\cdot)). \qquad /27/$$

Пусть далее $B_\Lambda = L_1(q+1;[0,T]), \Lambda_F(u(\cdot),\alpha)$ определяется формулой:

$$\lambda_0(\cdot)\equiv 1,\ \lambda_\ell(\cdot) = -\alpha\varphi_\ell(z_L(\cdot)) \qquad /28/$$

и $Q(u(\cdot),\lambda(\cdot))$ равняется правой части /21/, где $\psi(\cdot)$ удовлетворяет /16/, /17/ и краевому условию /24/. Условие /18/ работы [I] теперь легко вытекает из ограниченности U ; формулы /19/ - /21/ работы [I] очевидны.

Теорема 2 теперь оказывается следствием теоремы I работы [I] .

Будем далее говорить, что последовательность $\{\lambda^{(k)}(\cdot)\}$ является нормированно ограниченной, если для всех k :

$$|\lambda^{(k)}(t)| / \|\lambda^{(k)}(\cdot)\| \leq \tilde{C} < \infty,\quad 0\leq t\leq T. \qquad /29/$$

При выполнении для последовательности $\{\lambda^{(k)}(\cdot)\}$, определяемой теоремой 2, свойства нормированной ограниченности теорема 2 может быть усилена.

Л е м м а 3. Пусть $\psi(\cdot)(\bar\psi(\cdot))$ - решение системы /16/ с краевыми условиями /17/, /24/ при $u(\cdot)$, $x(\cdot)$ $(\bar u(\cdot),\bar x(\cdot))$, $\lambda(\cdot)$ и $|\lambda(t)|\leq\hat C$ $(0\leq t\leq T)$.
Тогда

$$|\Delta\nu(\ell,t)|\leq C_7\Big(\iint_{D_\ell}(|H_x(x,\psi,\bar u)-H_x(x,\psi,u)|+|G(x,\bar u)-$$
$$-G(x,u)|)dP+\int_0^\ell(|H_z(x,\psi,\bar u)-H_z(x,\psi,u)|+|f(x,\bar u)-f(x,u)|)d\ell,$$

$$|\Delta\xi(\ell,t)|\leq C_7\Big(\iint_D(H_x(x,\psi,\bar u)-H_y(x,\psi,u)|+$$
$$+|G(x,\bar u)-G(x,u)|)dP+\int_0^T(|H_y(x,\psi,\bar u)-$$
$$-H(x,\psi,u)|+|g(x,\bar u)-g(x,u)|)dt. \qquad /30/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При выполнении $|\lambda(t)|\leq\tilde C$ функции $\nu_i(\cdot)$, $\xi_i(\cdot)$, очевидно, равномерно ограничены. Применив теперь оценки /7/ к системе /16/, /17/, /24/, получим:

$$|\Delta\nu(\ell,t)|\leq A_4(|\Delta\nu(L,t)|+\int_0^T|\Delta\nu(L,t)|dt+$$

$$+\int_0^L |H_z(\bar{x},\bar{\varphi},\bar{u})-H_z(x,\varphi,u)|d\ell +$$

$$+\iint_D |H_x(\bar{x},\bar{\varphi},\bar{u})-H_x(x,\varphi,u)|dP \leq$$

$$\leq A_5(|\Delta z_L(t)|+\int_0^T |\Delta z_L(t)|dt+\int_0^L (|\Delta x(\ell,t)|+$$

$$+|H_z(x,\varphi,\bar{u})-H_z(x,\varphi,u)|)dP),$$

откуда после приме нения еще раз оценок /7/ /к системе /2/, /3/ / приходим к первому из неравенств /30/. Второе неравенство доказывается аналогично.

Пусть $F(x,u)$- вектор размерности $n+m+(n+m)^2$, получающийся объединением компонент вектора $G(x,u)$ и матрицы $G_x(x,u)$.

Л е м м а 4.

$$|Q(\bar{u}(\cdot),\lambda(\cdot))-Q(u(\cdot),\lambda(\cdot))|\leq C_8\iint_D |F(x,\bar{u})-F(x,u)|dP. \qquad /31/$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Имеем

$$|H(\bar{x},\bar{\varphi},\bar{u})-H(x,\varphi,u)|\leq A_6(|\Delta x|+|\Delta\varphi|+ \qquad /32/$$

$$+|G(x,\varphi,\bar{u})-G(x,\varphi,u)|),$$

$$|\sup_{v\in U} H(\bar{x},\bar{\varphi},v)-\sup_{v\in U} H(x,\varphi,v)|\leq \sup_{v\in U}|H(\bar{x},\bar{\varphi},v)-$$

$$-H(x,\varphi,v)|\leq A_6(|\Delta x|+|\Delta\varphi|). \qquad /33/$$

Далее

$$|Q(\bar{u}(\cdot),\lambda(\cdot))-Q(u(\cdot),\lambda(\cdot))|\leq\iint_D |H(\bar{x},\bar{\varphi},\bar{u})-$$

$$-H(x,\varphi,u)|dP+\iint_D |\bar{H}(\bar{x},\bar{\varphi})-\bar{H}(x,\varphi)|dP,$$

откуда с помощью оценок /7/, /30/ приходим к оценке /31/.

Т е о р е м а 3 / вторая форма обобщенного принципа максимума для задачи /1/ - /5/ /. Пусть $\bar{\bar{u}}(\cdot)$ - обобщенное решение задачи /1/ - /5/ и для $\{\lambda^{(k)}(\cdot)\}$, определяемых теоремой 2, выполнено условие /29/. Тогда существует последовательность $\{\bar{\bar{\lambda}}^{(k)}\}$, для которой выполнено:

$$\lambda_0^{(k)}(\cdot)\equiv a_k>0,\quad \|\bar{\bar{\lambda}}^{(k)}(\cdot)\|=1, \qquad /34/$$

$$\iint_D(\bar{H}(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{\varphi}}^{(k)})-H(\bar{\bar{x}},\bar{\bar{\varphi}}^{(k)},\bar{\bar{u}}))dP\to 0,\quad k\to\infty, \qquad /35/$$

где $\bar{\bar{\varphi}}^{(k)}(\cdot)$ удовлетворяют /16/, /17/, /24/.

Доказательство. Прежде всего заметим, что теорема 2 работы [I], очевидно, остается справедливой, если условие 2^0 выполняется для $\widetilde{S}_\Lambda$ вместо S_Λ : $\widetilde{S}_\Lambda = \{\Lambda : \Lambda = \Lambda^{(k)}/\|\Lambda^{(k)}\|, k = 1,2,\dots\}$, где $\{\Lambda^{(k)}\}$ – последовательность, фигурирующая в утверждении теоремы I [I]. Далее при $\lambda(\cdot) = \lambda^{(k)}(\cdot)/\|\lambda^{(k)}\|$ /k = I,2,.../ в силу /29/ выполнена оценка /3I/. Отсюда с учетом равномерной непрерывности $F(x, u)$ на ограниченном множестве $X \times U$ вытекает справедливость условия 2^0 для множества $\widetilde{S}'_\Lambda$. Утверждение теоремы теперь вытекает из теоремы 2 [I].

Поступила в ред.-изд.отдел
25 мая 1972 г.

Литература

I. Ю.М.Волин. Метод штрафных функций и принцип максимума Понтрягина в задачах оптимального управления. I."Управляемые системы", Новосибирск, 1972, № 10, стр.

2. А.И.Егоров. Необходимые условия оптимальности для систем с распределенными параметрами.-Матем.сб., новая серия, 1966,т. 69 /III/, вып. 3, 37I.

3. В.В.Немыцкий, В.В.Степанов. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1949.